STUDIO DI FUNZIONE

Studiare una funzione significa determinarne le caratteristiche fondamentali in modo tale da essere in grado di produrre un disegno (qualitativo) del suo comportamento.

Solitamente si segue il seguente schema.

1. <u>Dominio</u> La ricerca del dominio di definizione è il primo passo da compiere per capire dove la funzione è definita

2. <u>Parità/disparità</u> Controllare se la funzione è pari ($f(x) = f(-x)$) oppure dispari ($f(x) = -f(-x)$) permette di semplificare tutta l'analisi perché possiamo concentrarci sulle parti del dominio contenute in $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \geq 0\}$. Analogo discorso vale in caso di <u>periodicità</u>

3. <u>Intersezioni con gli assi</u> È importante andare a calcolare $f(0)$ (se $0 \in D$) ovvero l'intersezione con l'asse y e risolvere $f(x) = 0$, ovvero trovare le intersezioni con l'asse x.

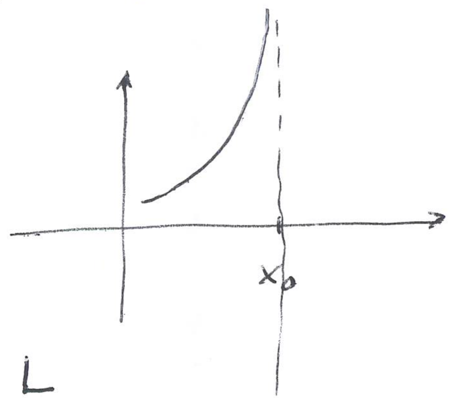
4. <u>Studio del segno</u> viene affrontato risolvendo $f(x) > 0$. Molto spesso questa analisi risulta superflua in quanto conoscere le intersezioni con l'asse x e le anche dei successivi punti sono più che sufficienti per capire il segno.

5. <u>Limiti</u> Bisogna studiare i limiti per x che tende agli estremi del dominio.

In particolare se accade

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm \infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

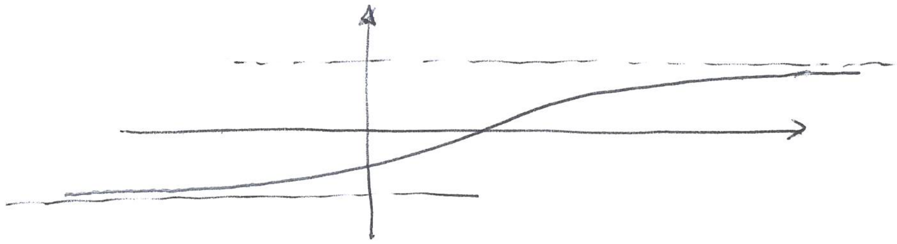
diremo che la retta $x = x_0$ è un <u>asintoto verticale</u>



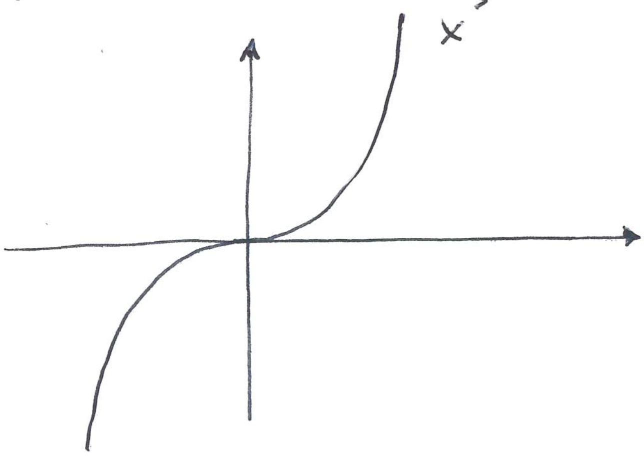
Se inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ allora la retta $y = L$ è un <u>asintoto orizzontale</u>

Naturalmente si possono avere due limiti diversi per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e quindi ci possono essere due asintoti orizzontali



6. <u>Derivata prima</u> Lo studio del segno di $f'(x)$ e le soluzioni di $f'(x) = 0$ permette di capire dove le funzioni è crescente ($f'(x) > 0$) oppure decrescente ($f'(x) < 0$), e di trovare i <u>punti stazionari</u> ($f'(x) = 0$). I punti stazionari possono essere massimi o minimi locali. Tuttavia esistono situazioni in cui $f'(x_0) = 0$ con x_0 né p.to di massimo né di minimo. Basta pensare alla funzione $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ e quindi $f'(x)$ si annulla in 0. Tuttavia 0 non è un massimo né un minimo



7. <u>Derivata seconda</u> Lo studio del segno della derivata seconda $f''(x)$ permette di capire dove la funzione ha concavità rivolta verso l'alto

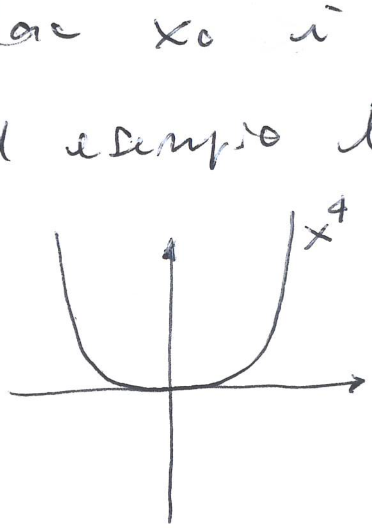
$$f''(x) > 0$$

oppure verso il basso

$$f''(x) < 0$$

Nei punti in cui <u>cambia la concavità</u>, come ad esempio lo 0 per $f(x) = x^3$ la derivata seconda si annulla. Tali punti sono detti <u>punti di flesso</u>.

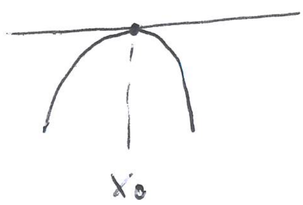
Tuttavia non è sempre vero che se $f''(x_0) = 0$ allora x_0 è punto di flesso. Consideriamo ad esempio la funzione $f(x) = x^4$



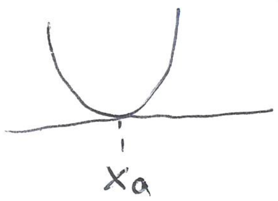
$$f'(x) = 4x^3 \rightarrow f''(x) = 12x^2$$

Chiaramente $f''(0) = 0$ ma 0 non è un punto di flesso

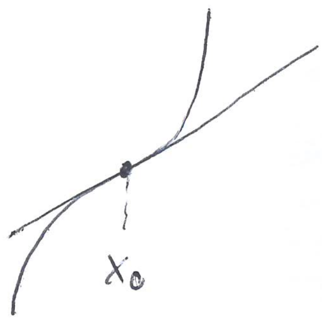
Lo studio della derivata seconda consente inoltre di caratterizzare i punti stazionari ottenuti con la derivata prima



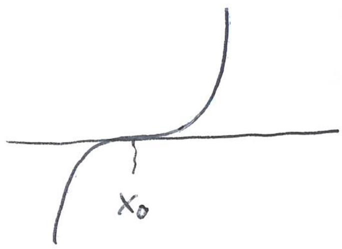
$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) < 0 \rightarrow$
punto di massimo locale



$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) > 0 \rightarrow$
punto di minimo locale



$f'(x_0) \neq 0 \quad f''(x_0) = 0 \rightarrow$
punto di flesso (obliquo)



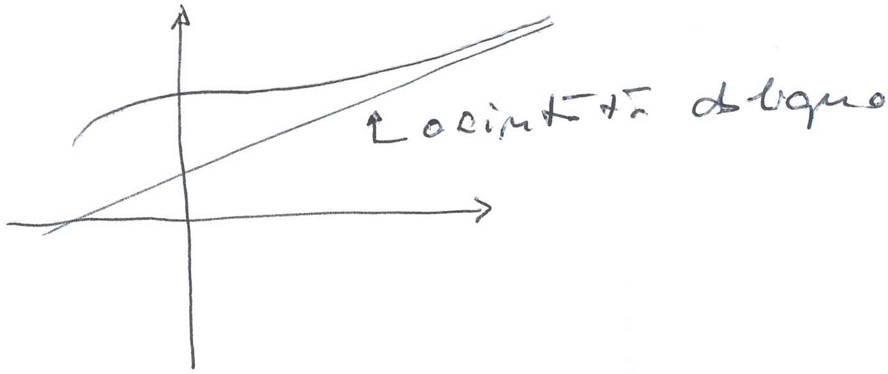
$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \rightarrow$
punto di flesso (orizzontale)

- $f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0$

$\rightarrow$ necessarie ulteriori analisi ovvero vedere quello che succede in un intorno di x_0

8. Asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$

alcune funzioni si comportano asintoticamente come rette $y = mx + q$, $m \neq 0$



Se $\exists$ finito

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \overset{H}{=} \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f'(x)$$

ed esiste finito

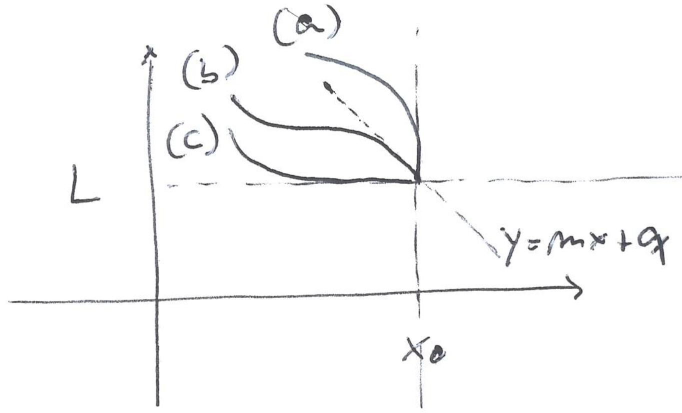
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) - mx = q$$

allora la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$

9. Studio dei casi $\lim_{\substack{x \to x_0^+ \\ (x \to x_0^-)}} f(x) = L$

Supponiamo che $f(x)$ tende ad un valore finito L per $x \to x_0^+$ $(x \to x_0^-)$

Si distinguono 3 casi, come nelle figure che segue per $\{x \to x_0^-$



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$

<u>caso (a)</u> $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = -\infty$

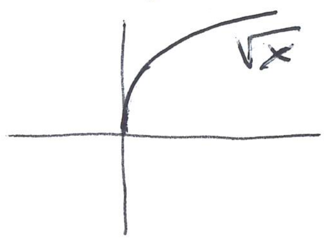
<u>caso (b)</u> $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = m$

<u>caso (c)</u> $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = 0$

Discorso analogo per $x \to x_0^+$. In pratica per disegnare correttamente il grafico occorre capire il modo in cui $f(x)\to L$, ovvero la pendenza della curva, descritta da $f'(x)$. <u>Esempio</u>: $f(x)=\sqrt{x}$

Sappiamo che $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$. Sappiamo inoltre che $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$$



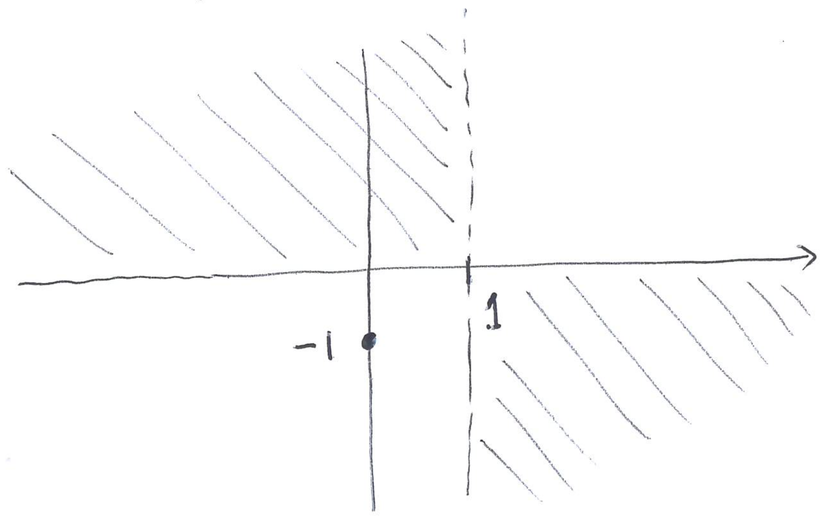
Esempi di studio di funzioni

i) $$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

Il dominio è $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

La funzione non presenta simmetrie né periodicità. L'equazione $f(x)=0$ non ha soluzioni quindi non ci sono intersezioni con l'asse x. Inoltre $f(0) = -1 \Rightarrow$ la funzione passa per il punto $(0,-1)$. Essendo il numeratore sempre positivo, il segno di $f(x)$ dipende solo dal denominatore. Abbiamo dunque

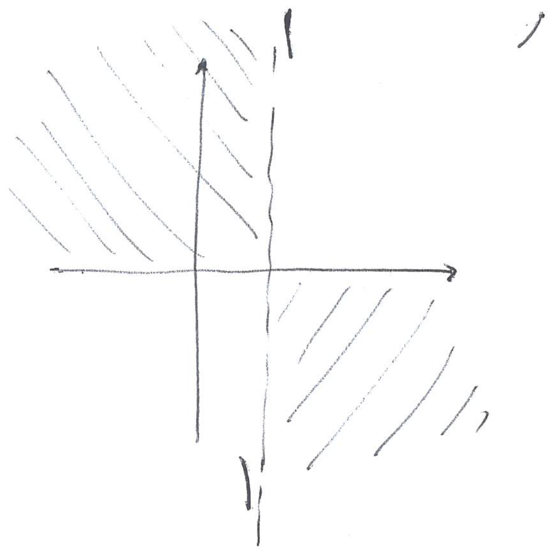
$f(x) > 0$ per $x > 1$, $f(x) < 0$ per $x < 1$



Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$



$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$$

Da questi limiti si capisce che la funzione deve avere almeno un minimo locale per $x>1$ e un massimo locale per $x<1$. Inoltre la retta $x=1$ è un asintoto verticale. Non ci sono asintoti orizzontali. La derivata deve rilevare i due punti stazionari, cioè $f'(x)=0$ deve avere almeno due soluzioni

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

Quindi $f'(x) = 0$ per

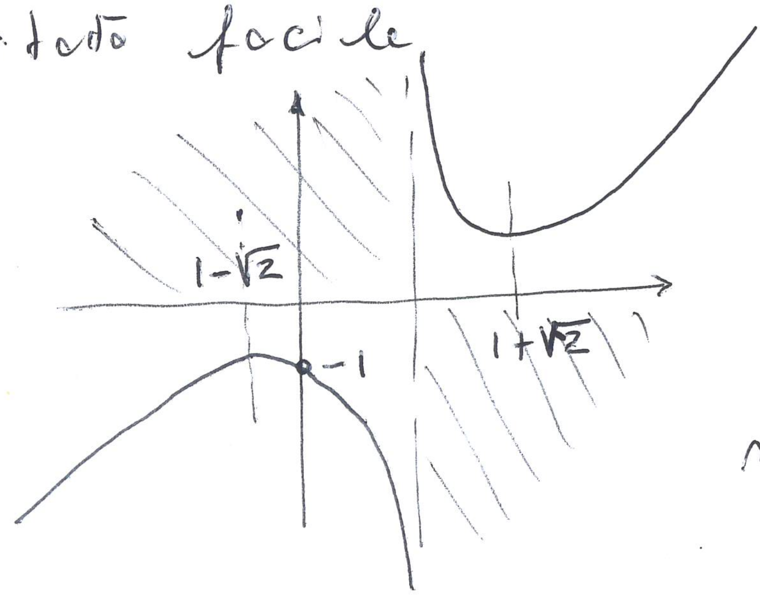
$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad , \quad \text{cioè}$$

$$x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Non ci possono essere altri punti stazionari!

Quindi necessariamente $1-\sqrt{2}$ è un max locale, $1+\sqrt{2}$ è un min locale. Dallo studio dei limiti so anche che la funzione è crescente $(f'(x)>0)$ per $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2})$ e per $x \in (1+\sqrt{2}, +\infty)$. È decrescente per $x \in (1-\sqrt{2}, 1) \cup (1, 1+\sqrt{2})$

Tutto questo senza bisogno di studiare il segno di $f'(x)$ anche se sarebbe stato facile



prima bozza del grafico senza aver studiato la derivata II né gli asintoti obliqui

Lo studio della derivata II permette di rilevare eventuali cambi di concavità non riportati nella prima bozza, in cui sembra che $f''(x)$ era < 0 per $x < 1$ e $f(x) > 0$ per $x > 1$. Vediamo se la bozza è corretta oppure no.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$ e quindi

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-1)}{(x-1)^3}$$

$$= 2 \, \frac{x^2-2x+1-x^2+2x+1}{(x-1)^3}$$

$$= 2 \, \frac{2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Quindi $f''(x) = 0$ mai! e pertanto niente flessi. Inoltre $f''(x) > 0$ per $x > 1$ e $f''(x) < 0$ per $x < 1$. Pertanto dal punto di vista della concavità, la prima bozza va bene.

Cerchiamo infine la presenza di eventuali asintoti obliqui

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1$$

potrebbe quindi essere $m=1$ sempre che esista finito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - 1 \cdot x \quad \text{oppure}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 1 \cdot x$$

Abbiamo

$$f(x) - x = \frac{x^2+1}{x-1} - x = \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}$$

$$= \frac{x+1}{x-1}$$

Quindi $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = 1 = q$

$\Rightarrow$ la retta $y = x+1$ è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

(13)

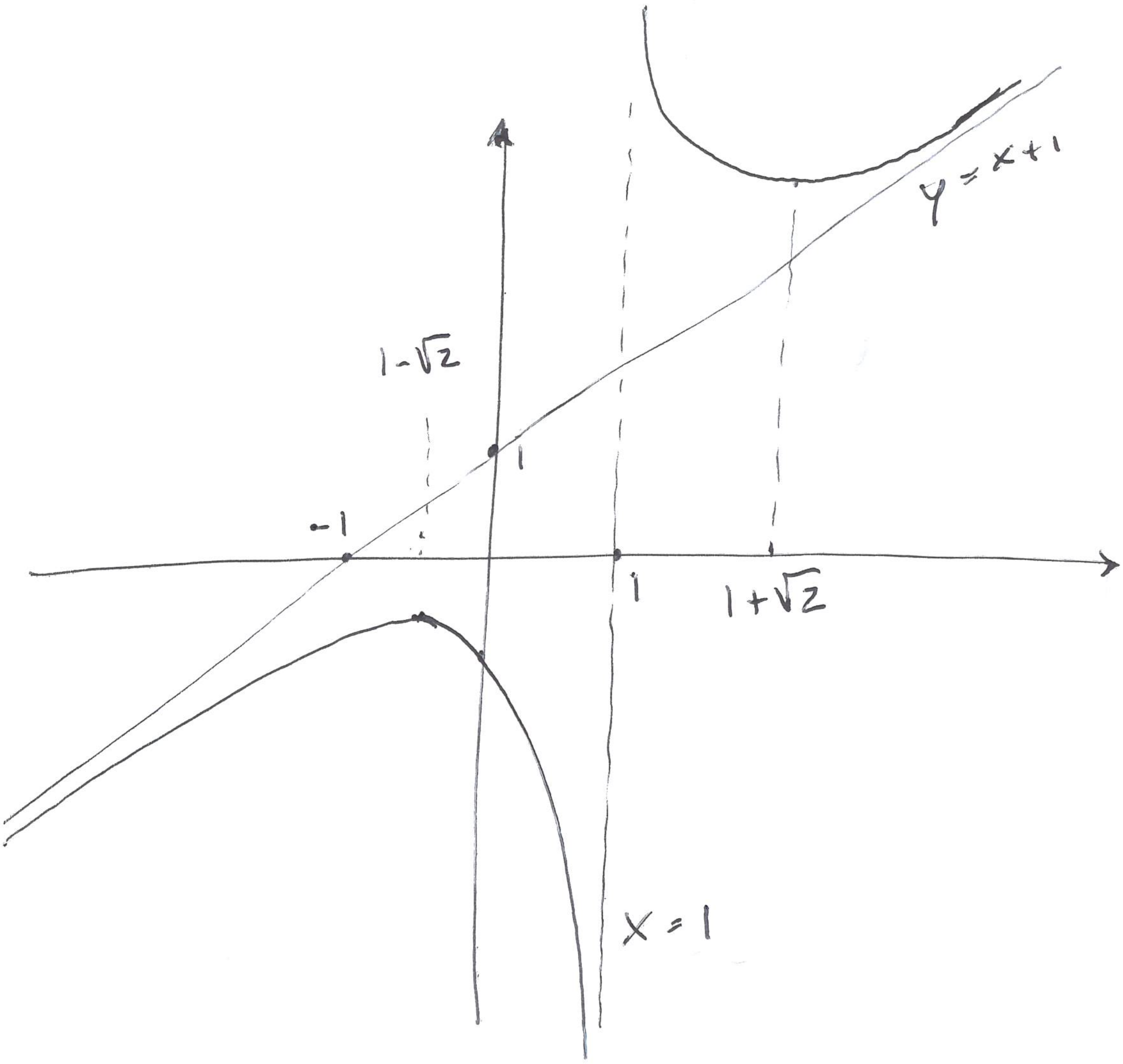


Grafico finale