Studio di funzioni
Esercizi svolti

1) **Esercizio**
Data la funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$,

a) determinare il dominio, il segno, i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti di f;

b) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi di f;

c) tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione
a) Per determinare il dominio di f, imponiamo che il denominatore sia diverso da zero, quindi $\operatorname{dom} f = I\!R \setminus \{-2, 3\}$.
Per studiare il segno di f risolviamo la disequazione

$$\frac{x-1}{x^2-x-6} > 0$$

ottenendo: $f(x) > 0$ per x in $(-2, 1)$ e $(3, +\infty)$.
Risulta

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x \to -3^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Quindi, $x = -2$ e $x = 3$ sono asintoti verticali completi e $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo.
b) Si ha

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x+7}{(x^2-x-6)^2}\,.$$

La derivata prima è sempre negativa. Dunque la funzione f è decrescente negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$ e non vi sono punti di massimo o di minimo.
c) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 1.

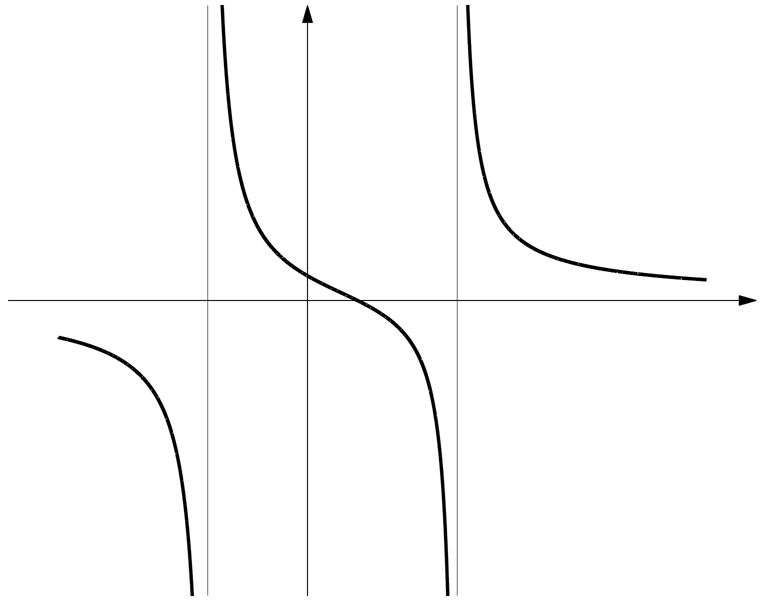

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$

2) **Esercizio**
Sia
$$f(x) = e^{-x} - e^{-3x}\,.$$

a) Disegnare un grafico di f mettendone in evidenza gli zeri, i punti critici, gli intervalli di monotonia e convessità.

b) Verificare in particolare che f ha un unico punto di flesso e determinare il più grande intervallo contenente questo punto sul quale f risulta invertibile.

c) Si calcoli la derivata prima di tale funzione inversa nel punto di flesso.

Soluzione
a) Scriviamo
$$f(x) = e^{-x}(1 - e^{-2x})$$
e osserviamo che $e^{-x} > 0$ per ogni x, quindi $f(x) = 0$ se $1 - e^{-2x} = 0$, ossia per $x = 0$. Inoltre
$$f'(x) = -e^{-x} + 3e^{-3x} = -e^{-x}(1 - 3e^{-2x}),$$
dunque $f'(x) = 0$ se $1 - 3e^{-2x} = 0$, ossia per $x = \frac{\ln 3}{2}$; $f'(x) > 0$ se $x < \frac{\ln 3}{2}$ e quindi f è crescente in $(-\infty, \frac{\ln 3}{2})$ e decrescente in $(\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$. Si ha
$$f''(x) = e^{-x} - 9e^{-3x} = e^{-x}(1 - 9e^{-2x}),$$
dunque $f''(x) = 0$ se $1 - 9e^{-2x} = 0$, ossia per $x = \ln 3$; $f''(x) > 0$ se $x > \ln 3$, quindi f è concava in $(-\infty, \ln 3)$ ed è convessa in $(\ln 3, +\infty)$.

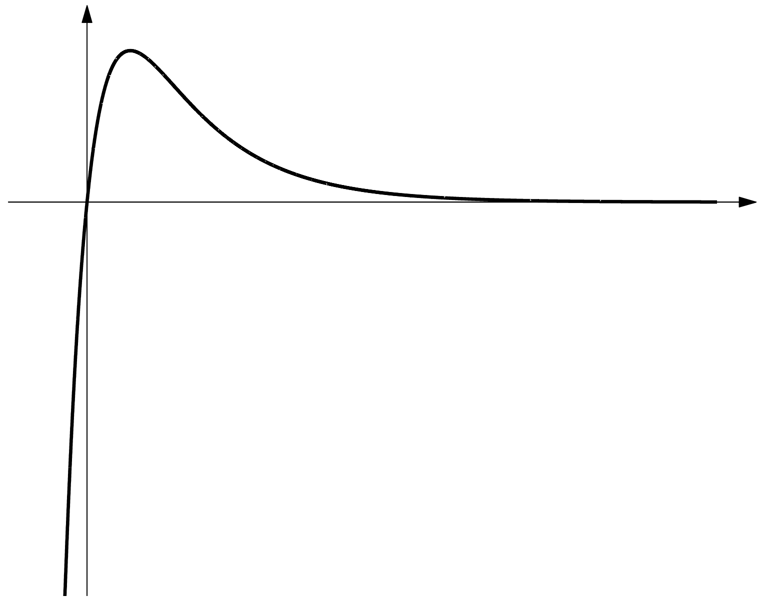

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$

Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 2.

b) Per quanto visto al punto precedente, $x = \ln 3$ è l'unico punto di flesso della funzione. Inoltre f risulta invertibile negli intervalli $(-\infty, \frac{\ln 3}{2})$ e $(\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$ e quindi il più grande intervallo che contiene il punto di flesso e in cui f è invertibile è $(\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$.
c) Poiché $f(\ln 3) = \frac{8}{27}$, risulta

$$(f^{-1})'(\frac{8}{27}) = \frac{1}{f'(\ln 3)} = -\frac{27}{6}\,.$$

3) **Esercizio**

Sia data la funzione reale di variabile reale $f(x) = 2^x - 5^x$.

a) Determinarne gli eventuali zeri.

b) Determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o di minimo.

c) Verificare che f è un infinito per $x \to +\infty$ e determinarne l'ordine rispetto alla funzione $g(x) = e^x$ assunta come infinito campione.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione

a) Possiamo scrivere $f(x) = 2^x\Big(1 - (5/2)^x\Big)$, così $f(x) = 0$ per $1 - (5/2)^x = 0$, ossia per $x = 0$.

b) Si ha $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5^x \ln 5$ e $f'(x) = 0$ per $(5/2)^x = \ln 2/\ln 5$ ossia

$$x_0 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln 5}}{\ln \frac{5}{2}} < 0$$

è un punto critico di f. Per studiare il segno di f', scriviamo

$$f'(x) = 2^x \ln 2\Big(1 - (5/2)^x \frac{\ln 5}{\ln 2}\Big)$$

e notiamo che $2^x \ln 2 > 0$, $\ln 5/\ln 2$ è positivo. Allora $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x < x_0$. Il punto x_0 è un punto di massimo assoluto e la funzione risulta crescente sull'intervallo $(-\infty, x_0)$ e decrescente sull'intervallo $(x_0, +\infty)$.

c) Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^x\Big(1 - (5/2)^x\Big) = -\infty\,,$$

la funzione è un infinito per $x \to +\infty$. Per determinarne l'ordine rispetto all'infinito campione $g(x) = e^x$, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{\alpha x}} &= \lim_{x\to+\infty} \Big(e^{x\ln 2} - e^{x\ln 5}\Big)e^{-\alpha x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln 5-\alpha)}\Big(e^{x(\ln 2-\ln 5)} - 1\Big) \\
&= -\lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln 5-\alpha)}
\end{aligned}$$

poiché $\ln 2 - \ln 5 < 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\Big(e^{x(\ln 2-\ln 5)} - 1\Big) = -1$. Affinché tale limite sia finito e diverso da zero, la quantità $\ln 5 - \alpha$ deve essere nulla. Allora $\alpha = \ln 5$ è l'ordine di infinito cercato.

d) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 3.

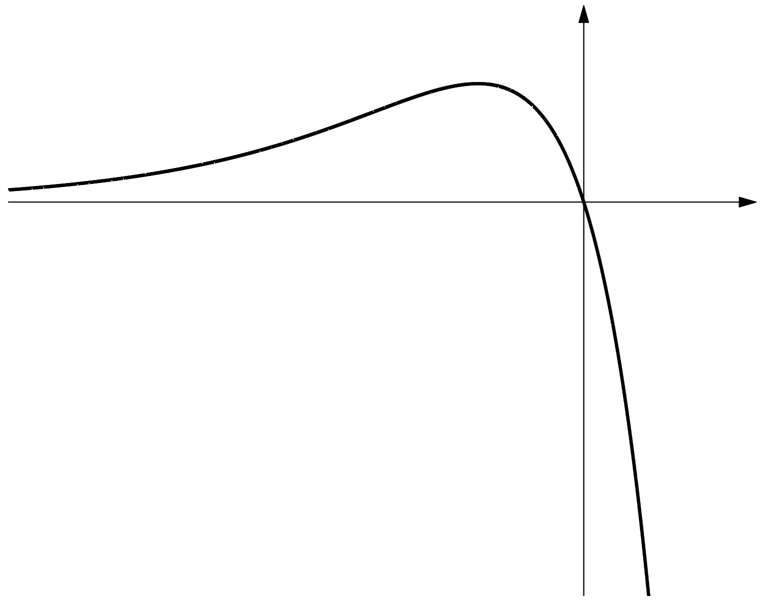

Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = 2^x - 5^x$

4) **Esercizio**
Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln x - \arctan(x-1)\,.$$

a) Determinare il dominio di f, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi di f.

c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione
a) Il dominio di f è l'intervallo $(0, +\infty)$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,;$$

e quindi la funzione ha soltanto un asintoto verticale (destro) di equazione $x = 0$ e non ha asintoti orizzontali od obliqui.
b) Si ha

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x[1+(x-1)^2]}$$

e quindi $f'(x) = 0$ per $x = 1$ e $x = 2$; $f'(x) > 0$ per x in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$. La funzione è crescente negli intervalli $(0, 1)$ e $(2, +\infty)$, decrescente nell'intervallo $(1, 2)$. Il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo con $f(1) = 0$ e il punto $x = 2$ è un punto di minimo relativo con $f(2) = \ln 2 - \pi/4 < 0$.
c) Le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ sono due: $x = 1$ e un punto $x_0 > 2$, come risulta dall'applicazione del teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $[2, K]$ con K numero reale sufficientemente grande e tale che $f(K) > 0$ (si ricordi che la funzione è infinita per $x \to +\infty$ e quindi tale punto esiste certamente).
d) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 4.

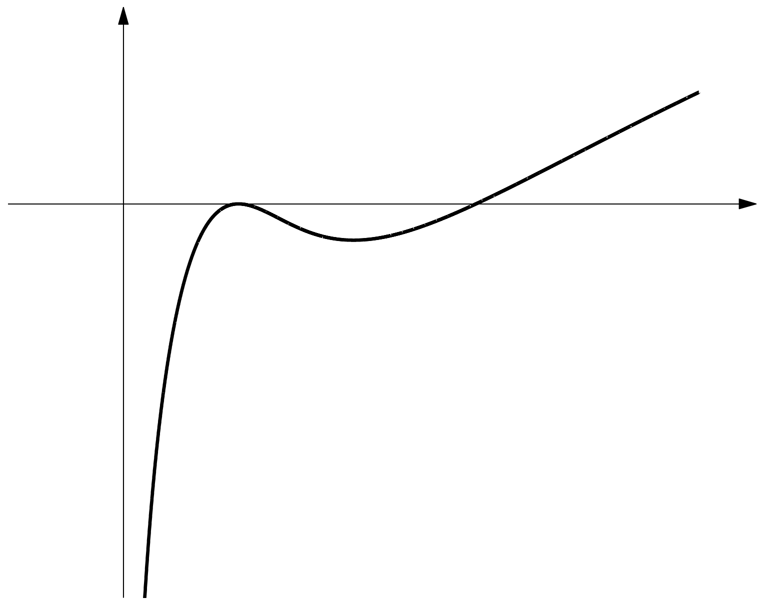

Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = \ln x - \arctan(x - 1)$

5) **Esercizio**

Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}\,.$$
Si chiede di

a) determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

b) determinarne gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabiltà e gli eventuali estremi;

c) determinare il più grande intervallo di invertibilità di f contenente il punto $x = 1$;

d) tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ e della funzione $f(|x|)$.

Soluzione

a) Il dominio di f è tutto l'asse reale. Risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\,,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - x)(\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2)}{(\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^2}{3x^2} = -\frac{5}{3}.$$

e quindi la retta $y = x - \frac{5}{3}$ è un asintoto obliquo completo.

b) Si ha
$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)(x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}}\,;$$
quindi $f'(x) = 0$ per $x = \frac{4}{3}$ e $f'(x) > 0$ per x in $(-\infty, \frac{4}{3})$ e $(2, +\infty)$. Allora f è crescente negli intervalli $(-\infty, \frac{4}{3})$ e $(2, +\infty)$ e decrescente in $(\frac{4}{3}, 2)$; $x = \frac{4}{3}$ è un punto di massimo relativo con $f(\frac{4}{3}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ e $x = 2$ è un punto di minimo relativo con $f(2) = 0$. Inoltre $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di non derivabilità della funzione in quanto
$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm\infty\,;$$
più precisamente $x = 1$ è un punto a tangente verticale e $x = 2$ è una cuspide.

c) Il più grande intervallo contenente $x = 1$ su cui la funzione è invertibile è l'intervallo $(-\infty, \frac{4}{3}]$.

d) I grafici qualitativi della funzione $f(x)$ e della funzione $f(|x|)$ sono mostrati nelle Figure 5 e 6.

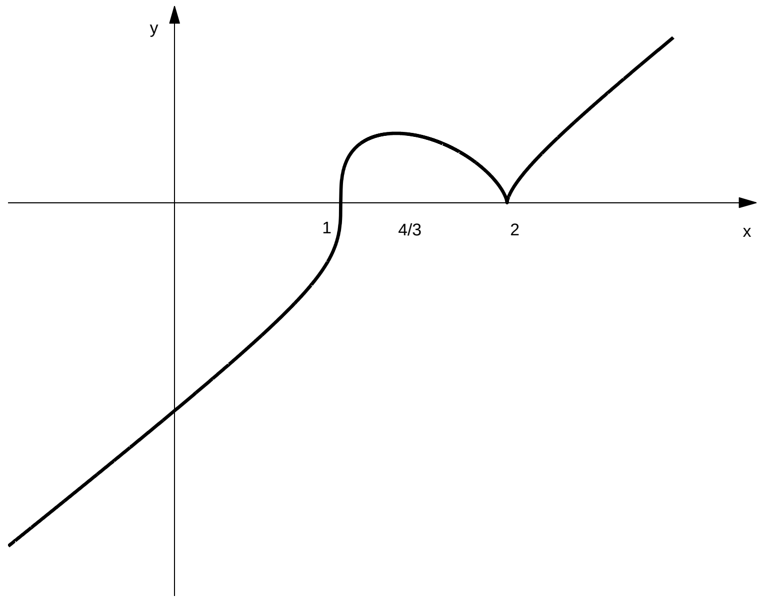

Figura 5: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$

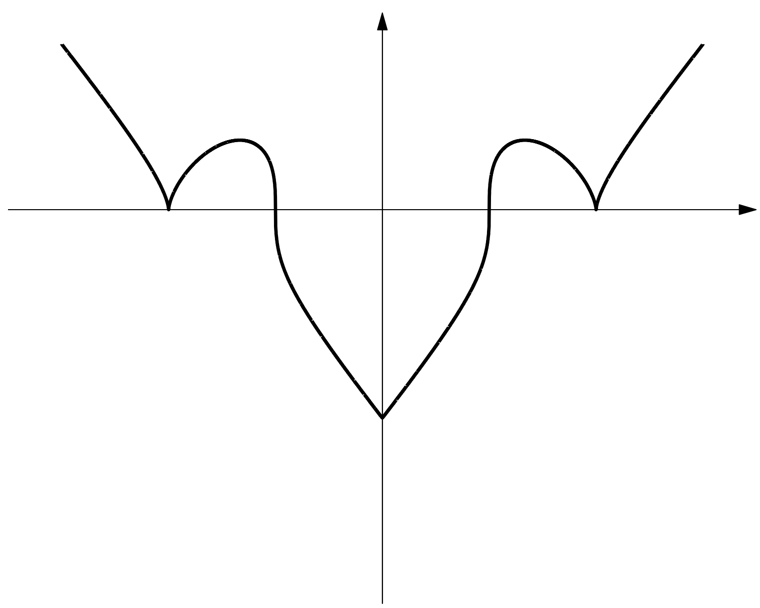

Figura 6: Grafico della funzione $f(|x|) = \sqrt[3]{(|x|-1)(|x|-2)^2}$

6) **Esercizio**
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2}{1-3x-x|x|}\,.$$
Si chiede di

a) determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
b) determinarne gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabiltà e gli eventuali estremi;
c) determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$;
d) determinare l'immagine della funzione;
e) tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione
a) Per determinare il dominio, osserviamo che
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-3x-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{1-3x+x^2} & x < 0\,, \end{cases}$$
inoltre $x^2+3x-1=0$ se $x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ e per $x \geq 0$ soltanto la radice $x_0 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ è da considerare, mentre $x^2-3x+1=0$ non ha soluzioni negative. Quindi il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$. Risulta
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp 1\,, \qquad \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \mp\infty\,;$$
dunque la retta $y=-1$ è un asintoto orizzontale destro, la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale sinistro e la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale completo.
b) Si ha
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x(2-3x)}{(1-3x-x^2)^2} & x > 0\,,\ x \neq x_0 \\ \frac{x(2-3x)}{(1-3x+x^2)^2} & x < 0\,. \end{cases}$$
Allora $f'(x) = 0$ se $x = \frac{2}{3}$; $f'(x) > 0$ per $x \in (0, x_0) \cup (x_0, \frac{2}{3})$. Dunque, gli intervalli di monotonia di f sono: $(-\infty, 0)$, $(\frac{2}{3}, +\infty)$ dove la funzione è decrescente, $(0, x_0)$, $(x_0, \frac{2}{3})$ dove la funzione è crescente. La funzione ha un punto di minimo relativo in $x=0$ con $f(0)=0$ e un punto di massimo relativo in $x=\frac{2}{3}$ con $f(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{13}$.
Inoltre, f è continua nell'origine, $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 0$, e quindi la derivata prima nell'origine esiste e vale 0; la funzione risulta derivabile in tutto il suo dominio.
c) L'equazione $f(x) = -1$ ha una sola soluzione per $x = \frac{1}{3}$, come si può facilmente verificare imponendo l'equazione $\frac{x^2}{1-3x-x^2} = -1$.
d) Dal grafico, risulta im $f = (-\infty, -\frac{4}{13}] \cup [0, +\infty)$.
e) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 7.

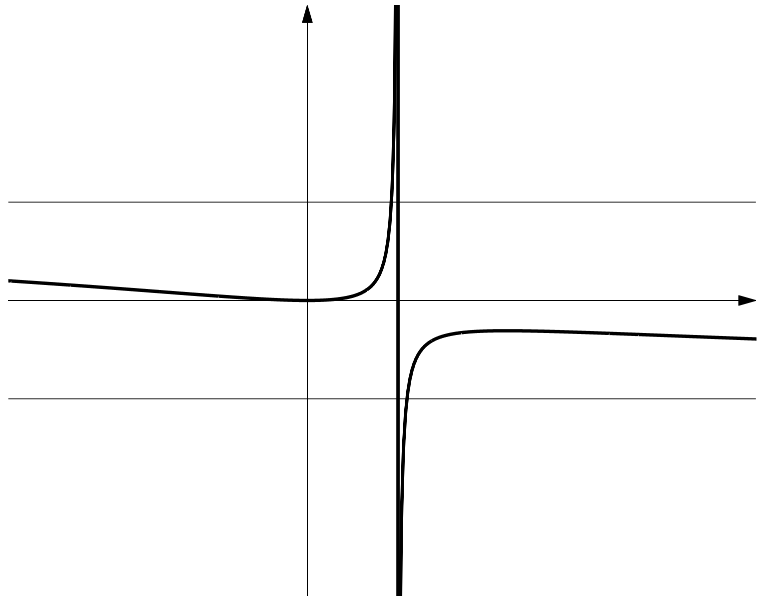

Figura 7: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2}{1-3x-x|x|}$

7) **Esercizio**
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln|x| - 1}\,.$$

Si chiede di

a) determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

b) determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi;

c) determinare l'immagine della funzione;

d) tracciare un grafico qualitativo di f;

e) posto $f(0) = 0$, discutere la continuità e la derivabilità di f in $x = 0$.

Soluzione
a) Osserviamo che la funzione è pari, quindi la studieremo soltanto per $x > 0$. Si ha $\operatorname{dom} f = I\!R \setminus \{0, \pm e\}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to e^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to -e^{\pm}} f(x) = \mp\infty\,.$$

Le rette $x = e$ e $x = -e$ sono asintoti verticali completi; non vi sono asintoti obliqui.
b) Si ha

$$f'(x) = \frac{x(2\ln x - 3)}{(\ln x - 1)^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = \pm e^{3/2}$; $f'(x) > 0$ per x negli intervalli $(-e^{3/2}, -e)$, $(-e, 0)$, $(e^{3/2}, +\infty)$ dove la funzione risulta crescente. Inoltre f è decrescente in $(-\infty, -e^{3/2})$, $(0, e)$, $(e, e^{3/2})$.
I punti $x = -e^{3/2}$ e $x = e^{3/2}$ sono punti di minimo relativo con ordinata $2e^3$.
c) Dal grafico si vede che im $f = (-\infty, 0) \cup [2e^3, +\infty)$.
d) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 8.

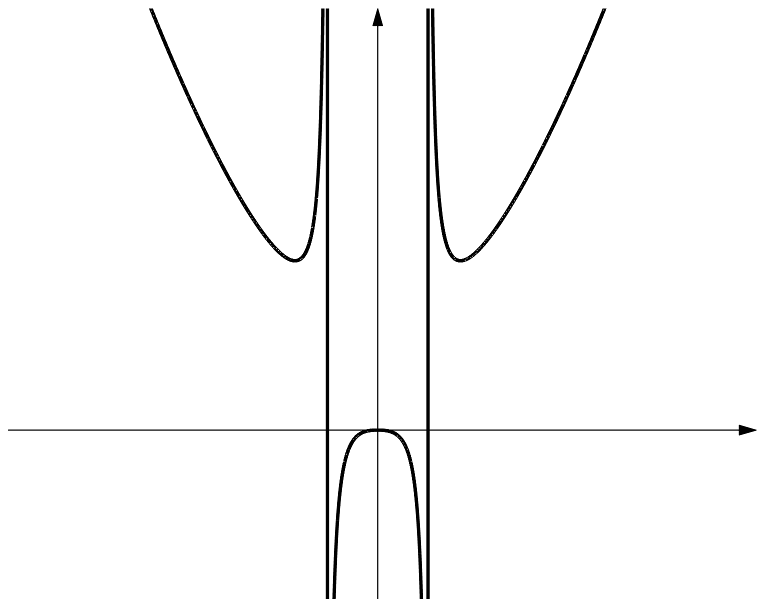

Figura 8: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2}{\ln|x| - 1}$

e) Posto $f(0) = 0$, la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$, in quanto

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = 0\,.$$

8) **Esercizio**
Si consideri la funzione
$$f(x) = (x-1)^3(2-x)\,.$$
Si chiede di

a) studiarne il comportamento e disegnarne un grafico qualitativo;

b) considerare le funzioni
$$g_1(x) = \sqrt[3]{f(x)}\,, \qquad g_2(x) = \sqrt[3]{|f(x)|}$$
e determinare, per ciascuna di esse, i punti di estremo e i punti di non derivabilità.

Soluzione
a) Non è difficile verificare che $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$; la funzione è crescente in $(-\infty, \frac{7}{4})$ e decrescente in $(\frac{7}{4}, +\infty)$, il punto $x = \frac{7}{4}$ è un punto di massimo assoluto con $f(\frac{7}{4}) = \frac{27}{256}$; f è convessa in $(1, \frac{3}{2})$, concava in $(-\infty, 1)$ e in $(\frac{3}{2}, +\infty)$, i punti $x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$ sono punti di flesso.
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 9.

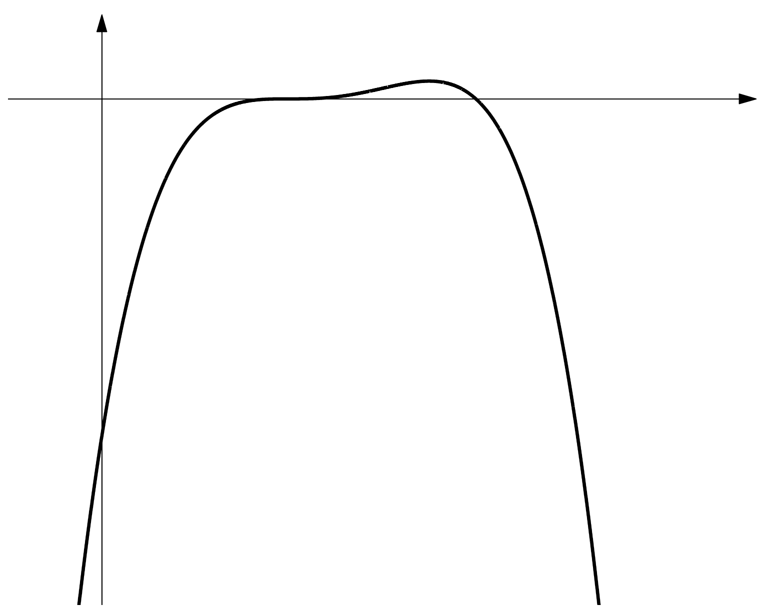

Figura 9: Grafico della funzione $f(x) = (x-1)^3(2-x)$

b) Possiamo scrivere
$$g_1(x) = (x-1)\sqrt[3]{2-x}\,, \qquad g_2(x) = |g_1(x)|\,.$$

La funzione g_1 ha un punto di massimo in $x = \frac{7}{4}$ e un punto di non derivabiltà in $x = 2$ (tangente verticale).
La funzione g_2 ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{7}{4}$ e due punti di minimo assoluto in $x = 1$ e $x = 2$. In tali punti di minimo risulta non derivabile.
I grafici delle funzioni g_1 e g_2 sono mostrati nelle Figure 10 e11.

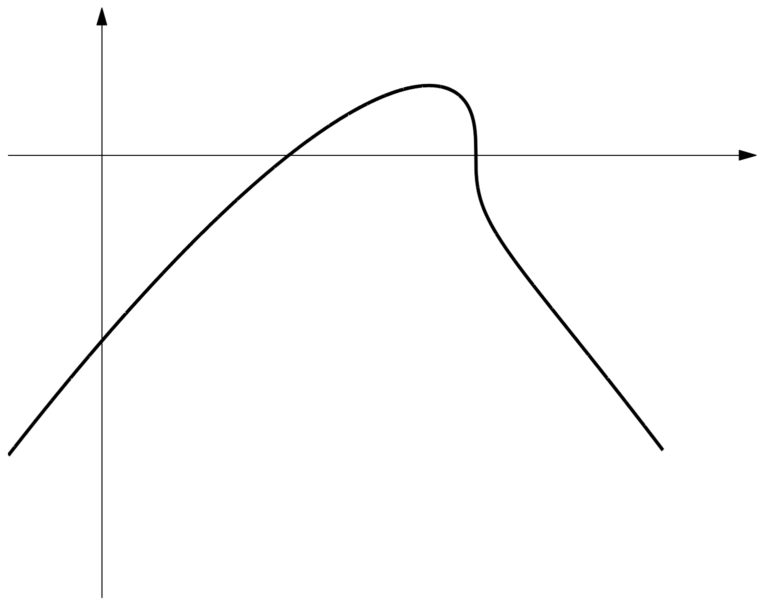

Figura 10: Grafico della funzione $g_1(x)$

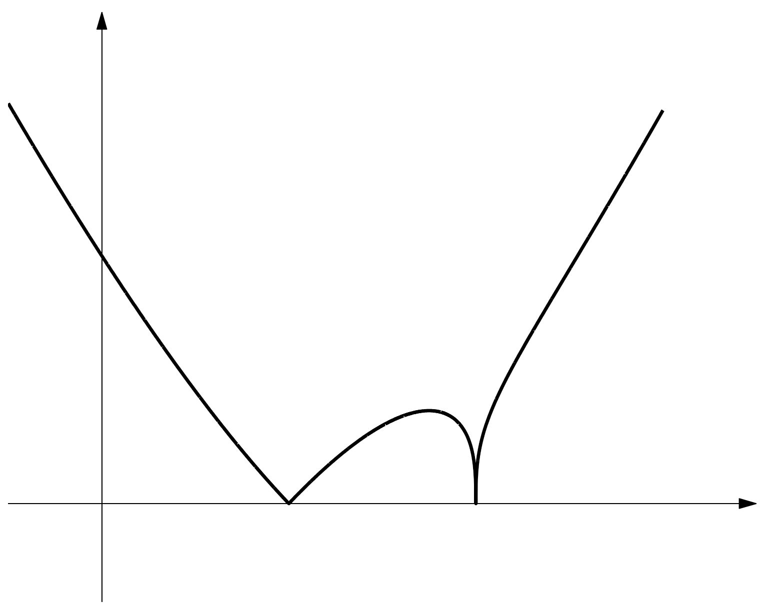

Figura 11: Grafico della funzione $g_2(x)$