Studiare e disegnare il grafico delle seguenti funzioni

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.2*

$$y = \frac{1}{4x^4 - 5x^2 + 1}$$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.4*

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.6*

$$y = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - |x|}$$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.8*

$$y = \sqrt[3]{x} \cdot e^{1/x}$$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.10*

$$y = atgx - \frac{x}{2}$$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.12*

$$y = x^{ln^2 x} - 1$$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.14*

$$y = 1 + \frac{2^{x+1}}{2^x - 1}$$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.16*

$$y = 2x\sqrt{2} - ln(x^2 - 1)$$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.18*

$$y = e^{\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}} - 1$$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.21*

$$y = e^{\frac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1}} - 1$$

Esercizio no.1:soluzione

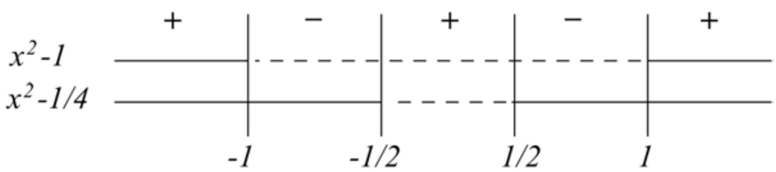
La funzione da studiare è: $y=\dfrac{1}{4x^4-5x^2+1}$

Notiamo come la funzione possa essere riscritta come:

$$y=\frac{1}{4(x^2-1)\cdot\left(x^2-\frac{1}{4}\right)} \qquad C.E.\equiv\left(-\infty —— -1 —— -\frac{1}{2} —— \frac{1}{2} —— 1 —— +\infty\right)$$

questo per rispettare le condizioni $x^2-1\neq 0$ e $x^2-\frac{1}{4}\neq 0$.
Si tratta di una funzione pari con y(-x)=y(x) ed è dunque possibile studiarla nell'intervallo $\left[0 —— \frac{1}{2} —— 1 —— +\infty\right)$.
La condizione y=0 è impossibile non vi sono intersezioni con l'asse delle x, mentre quando x=0 y=1.
Il segno della funzione si ottiene risolvendo la disequazione:

$$(x^2-1)\cdot\left(x^2-\frac{1}{4}\right)>0$$



Le condizioni agli estremi sono le seguenti:

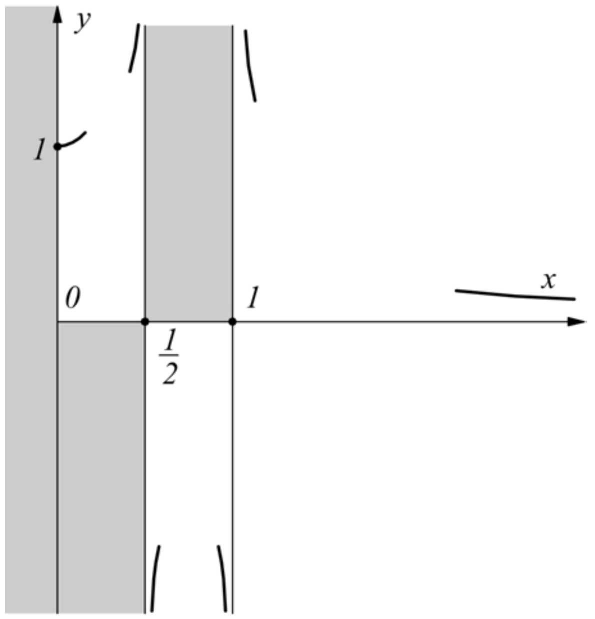
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{1}{4\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{-3\cdot 0^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{1}{4\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{-3\cdot 0^+}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{4(1^--1)\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{0^-\cdot 3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{4(1^+-1)\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{0^+\cdot 3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=0^+$ è possibile tracciare un grafico preliminare.



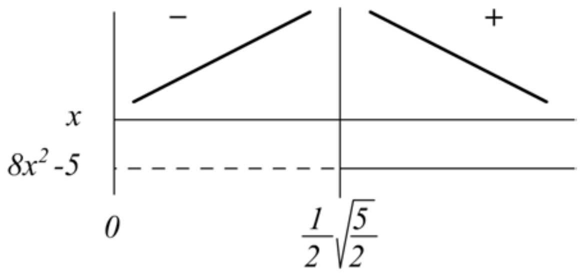
le rette x=1/2 ed x=1 appaiono come asintoti verticali mentre l'asse x è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

$$y' = -\frac{16x^3 - 10x}{(4x^4 - 5x^2 + 1)^2} =$$

$$= -2x\frac{(8x^2 - 5)}{(4x^4 - 5x^2 + 1)^2} =$$

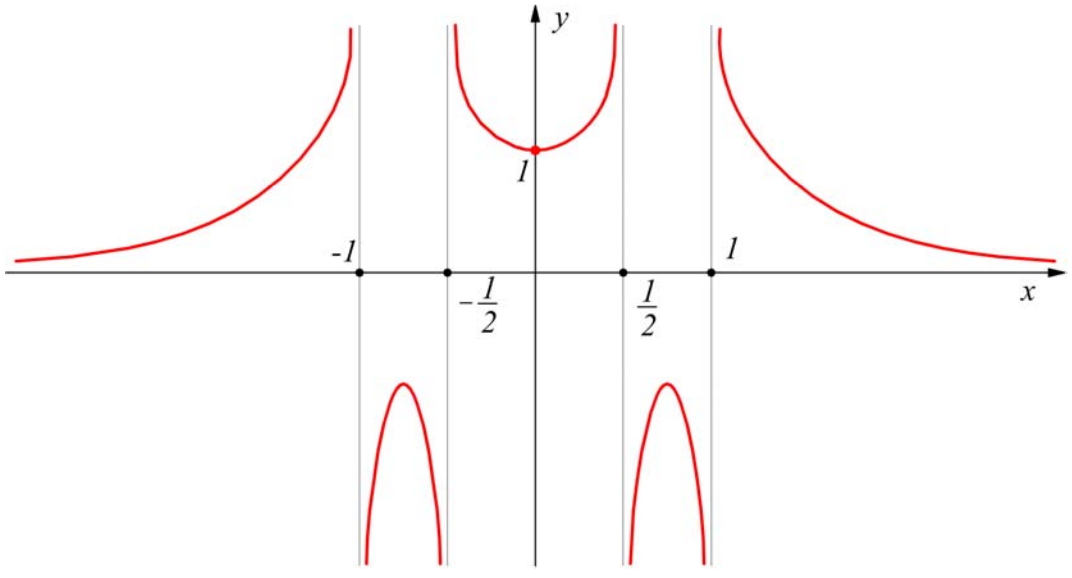
$$y' = -2x(8x^2 - 5)y^2$$

ovviamente si ha y'>0 per $x(8x^2-5)<0$.



Si presenta un massimo in $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$ con $y\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{16}{9} \cong -1,\bar{7}$ notiamo che

$\lim_{x \to 0\pm} y' = 0$ la curva arriva in (0,1) con tangente orizzontale



Esercizio no.2:soluzione

La funzione da studiare è $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4}$

Per l'esistenza deve essere $x^2-1\geq 0$ cioè $x\leq -1 \lor x\geq 1$.
Poi deve essere $x^2-4\neq 0$ cioè $x\neq\pm 2$. se ne conclude
C.E.≡ (-∞ — -2— -1] ∨ [1 |— 2 — +∞)

Si tratta di una funzione pari che soddisfa la condizione y(-x)=y(x) simmetrica dunque rispetto l'asse delle ordinate ed è possibile dunque studiarla nel semipiano destro per x∈ [1 — 2 — +∞).

L'asse y non può mai essere intersecato dalla curva perché x=0 ∉CE.
Se poniamo y=0 avremo

$\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} = 0 \quad \to \quad x = \pm 1$ l'asse delle x viene incrociato dalla curva nel punto P(1,0).

dato che $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ sempre il segno della funzione è condizionato dal denominatore
$x^2-4>0 \to x<-2 \lor x>2$.
Le condizioni agli estremi sono

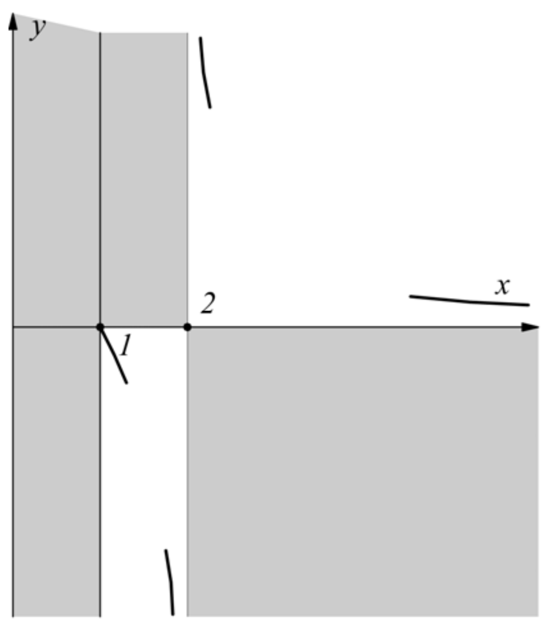
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} = 0^+$ per x→+∞ la funzione è positiva.

il numeratore è un infinito di ordine inferiore rispetto il denominatore

$$\lim_{x\to 2-} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{0^+} = +\infty$$

Si deduce il grafico preliminare pertinente al semipiano destro.



$$y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x^2-4)-2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-4)^2} = \frac{x(x^2-4)-2x(x^2-1)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{x(x^2-4-2x^2+2)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-1}} = -\frac{x(x^2+2)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-1}}$$

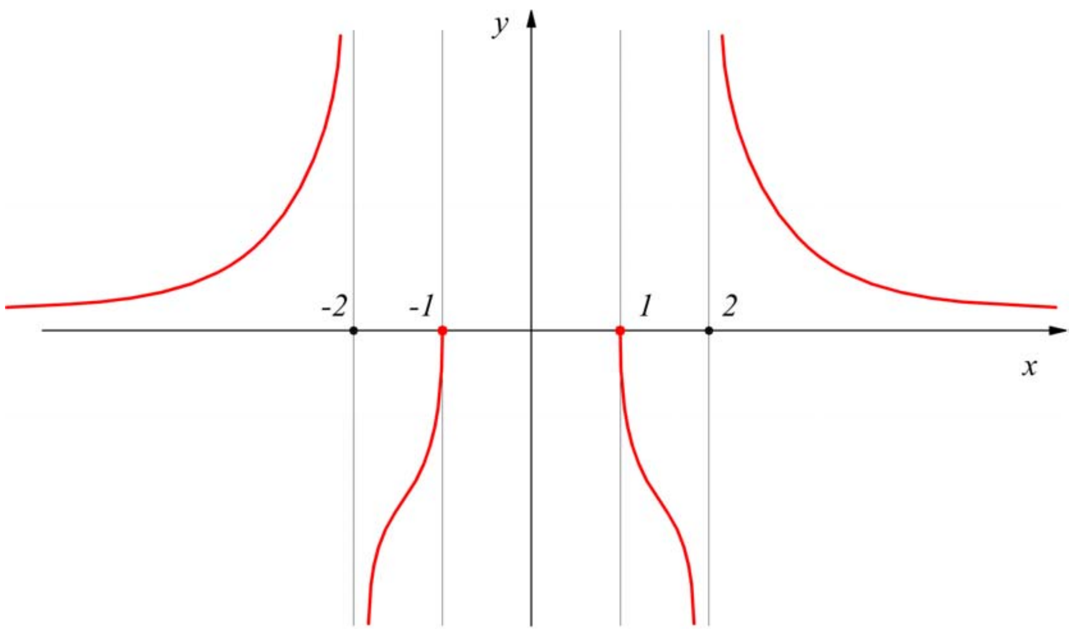
dato che:

$x^2+2>0$ sempre
$(x^2-4)^2>0$ sempre eccetto che per $x\neq 2$.
$\sqrt{x^2-1}>0$ sempre

y'>0 per x<0 quindi per x>1 la funzione e decrescente.

$$\lim_{x\to 1+} y' = \lim_{x\to 1+} -\frac{x(x^2+2)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{3\cdot 0^+} = -\infty$$

cioè in tale punto la tangente alla curva è verticale. Il diagramma completo è qui riportato.



Si nota come debba necessariamente esserci un flesso per 1<x<2.

Esercizio no.3:soluzione

La funzione da studiare è: $y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-|x|}$ bisogna considerare che :

$$y = \begin{cases} y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1+x} & se \ \ x < 0 \\ y = 2 \quad se \ \ x = 0 \\ y = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} & se \ \ x > 0 \end{cases}$$

la funzione non risulta, dunque, definita in x=±1. C.E.≡ (-∞ — -1 — 1 — +∞).

I) x<0 $y = \frac{2}{1+x} > 0$ è verificata per -1<x<0

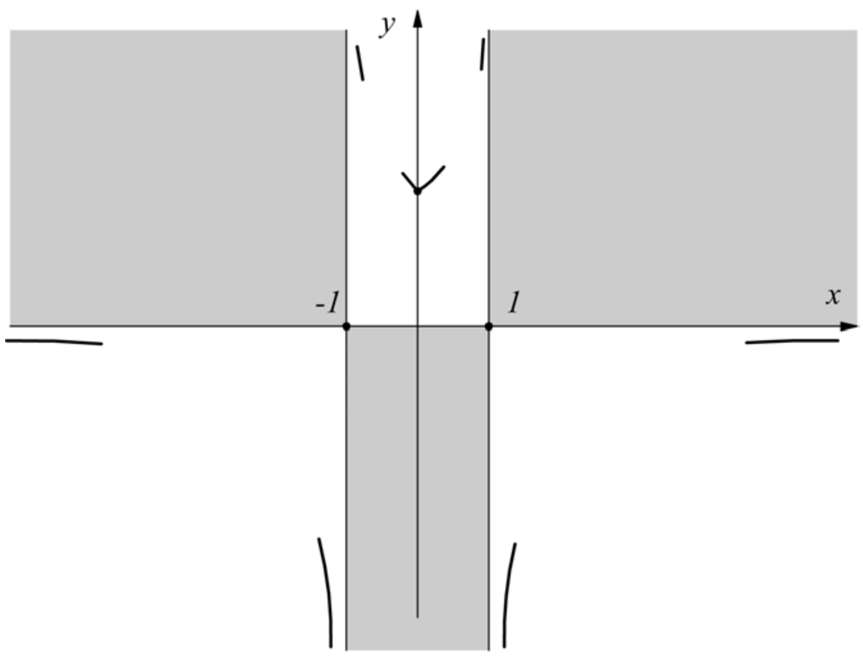
notiamo che la condizione y=0 non si ha mai, non si hanno dunque intersezioni con l'asse delle ascisse inoltre

$$\lim_{x\to 0-} \frac{2}{1+x} = 2^+ \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1+x} = 0^- \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{1+x} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2}{1+x} = +\infty$$

I) x>0 $y = \frac{2}{1-x^2} > 0$ è verificata solo per 0<x<1 anche qui la condizione y=0 non si verifica mai e non vi sono intersezioni con l'asse x.

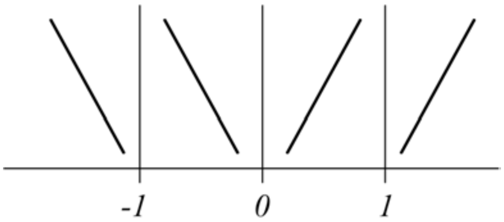
$$\lim_{x\to 0+} \frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{1^+} = 2^+ \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{2}{1-x^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{2}{1-x^2} = +\infty$$

Si può dunque tracciare un preliminare grafico.



per x<0 $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{1+x}\right)=y'=\frac{-2}{(1+x)^2}$ mentre per x>0 $\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{(1-x^2)}\right]=y'=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$

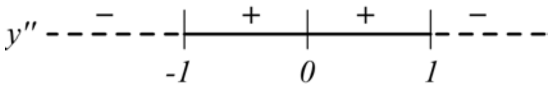
la prima non è definita in x=-1 ed è sempre negativa, quindi la funzione è decrescente, la seconda non è definita in x=1 ed è sempre positiva quindi la funzione è crescente.



Attenzione $\lim_{x\to 0+}\frac{4x}{(1-x^2)^2}=0$

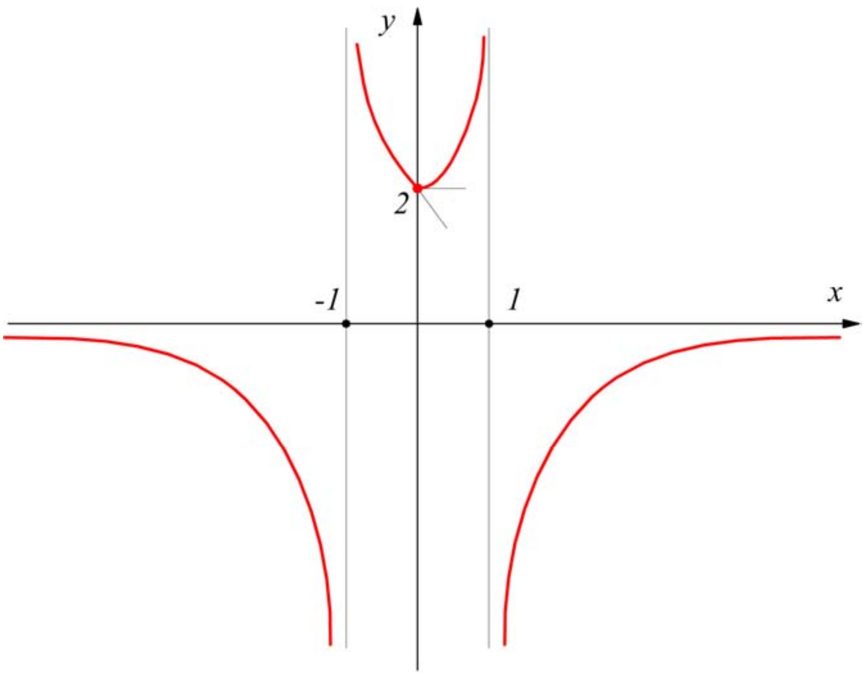
quindi la funzione arriva in prossimità di x=0 con tangente orizzontale.

per x<0 $y''=\frac{4}{(1+x)^3}$ mentre per x>0 $y''=\frac{4+12x^2}{(1-x^2)^3}$ si ricavano i segni:



per x<-1 e per x>1 la concavità è rivolta verso il basso per -1<x<1 verso l'alto.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{(1+x)^2}=0$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{(1-x^2)^2}=0$ non ci sono asintoti obliqui.



Esercizio no.4:soluzione

La funzione è: $y = \sqrt[3]{x} \cdot e^{1/x}$

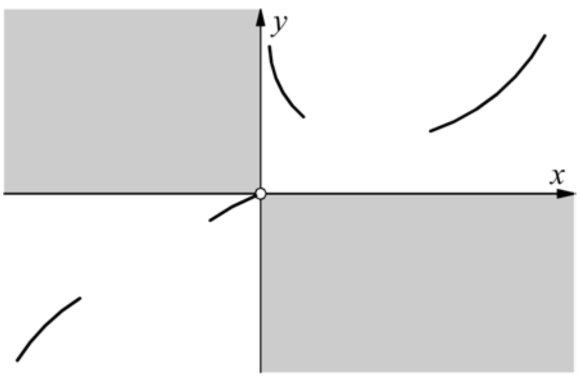
Dato che si ha 1/x deve essere $x \neq 0$ $C.E.:(-\infty —— 0 —— +\infty)$ quando

$x=0 \rightarrow y=0$ ma questa soluzione non è accettabile dato che $x \notin CE$; si deduce che la curva non interseca gli assi coordinati.
Per il segno della funzione, dato che $e^{1/x}>0$ si ha $y>0$ per $x>0$. Valutiamo ora le condizioni agli estremi del campo.

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \cdot e^0 = -\infty \cdot 1 = -\infty \qquad \lim_{x\to 0-} y = 0^- \cdot e^{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{x^{-1/3}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{x\to 0+} 3\frac{e^{1/x}}{x^{2/3}} = +\infty$$

perché $e^{1/x}$ tende a 0 più velocemente di $x^{2/3}$.



$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

L'asse delle y è asintoto verticale della funzione per $x \rightarrow 0^+$.
Il punto di scissa x=0 è di discontinuità del II° ordine.

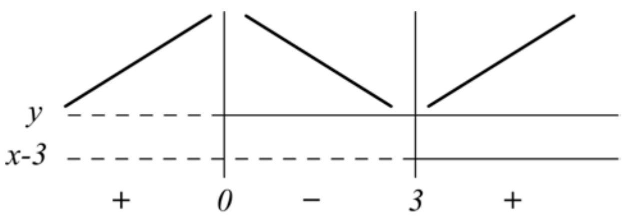
Calcoliamo le derivate

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{1/x}}{x\sqrt[3]{x^2}}(x-3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} \cdot e^{1/x}}{x^2}(x-3) = \frac{1}{3}y\frac{x-3}{x^2}$$

$$y'' = \frac{1}{3} \cdot \left(y'\frac{x-3}{x^2} + y\frac{x^2-2x^2+6x}{x^4} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}y\frac{(x-3)^2}{x^4} + y\frac{-x^2+6x}{x^4} \right) =$$

$$= \frac{y}{9x^4}(x^2-6x+9-3x^2+18x) = -\frac{y}{9x^4}(2x^2-12x-9)$$

studiando la y' notiamo come $x^2>0$ $\forall x$ quindi : $y'>0$ per $y(x-3)>0$



Il punto di ascissa x=3 è di minimo con $y(3) = \sqrt[3]{3e}$ invece il punto di ascissa x=0 non è di massimo perché in tal punto la funzione non è definita.

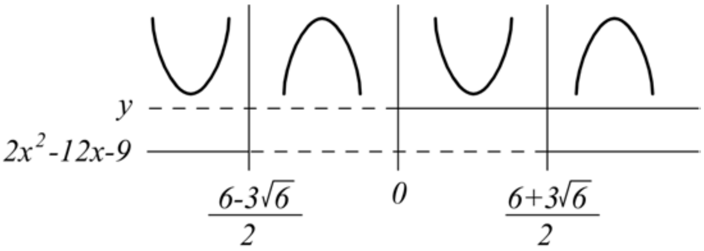
$$\lim_{x\to 0-} y' = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{1}{3}\lim_{x\to 0-}(x-3)\cdot \lim_{x\to 0-}\frac{e^{1/x}}{x\sqrt[3]{x^2}} = -\lim_{x\to 0-}\frac{x^{-5/3}}{e^{-1/x}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{H} \frac{5}{3}\lim_{x\to 0-}\frac{x^{-2/3}}{e^{-1/x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{H} -\frac{10}{9}\lim_{x\to 0-}\frac{x^{1/3}}{e^{-1/x}} = 0^+$$

per cui per $x\to 0$ da sinistra la curva assume un orientamento orizzontale.

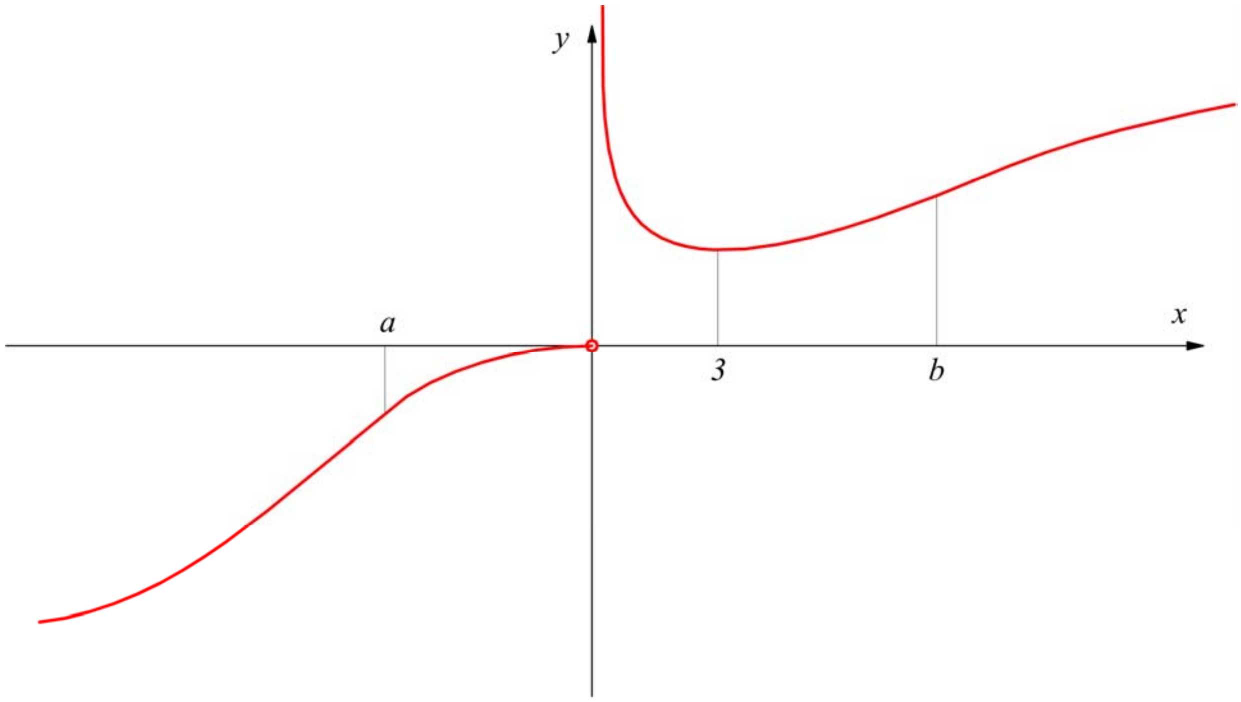
Studiando la y'' si ha:

$y''>0$ per $y(2x^2-12x-9)<0$



questo perché il trinomio è positivo per $x < a = \frac{6 - 3\sqrt{6}}{2}$ e per $x > b = \frac{6+3\sqrt{6}}{2}$
a e b sono due punti di flesso. Se cerchiamo un eventuale asintoto obliquo di equazione y=mx+q avremo

$\lim_{x\to\pm\infty} y' = 0$ la curva non ha asintoti obliqui.



Esercizio no.5:soluzione

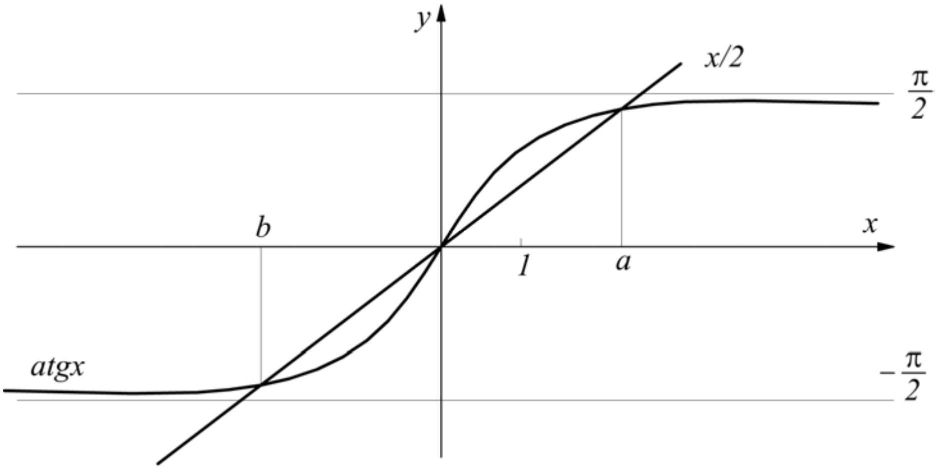
Studiamo la funzione $y = atgx - \frac{x}{2}$

Per il campo di esistenza deve essere non vi sono limitazioni C.E.≡ (-∞ — +∞)
Per le eventuali intersezioni con gli assi avremo:

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; O(0,0)$$

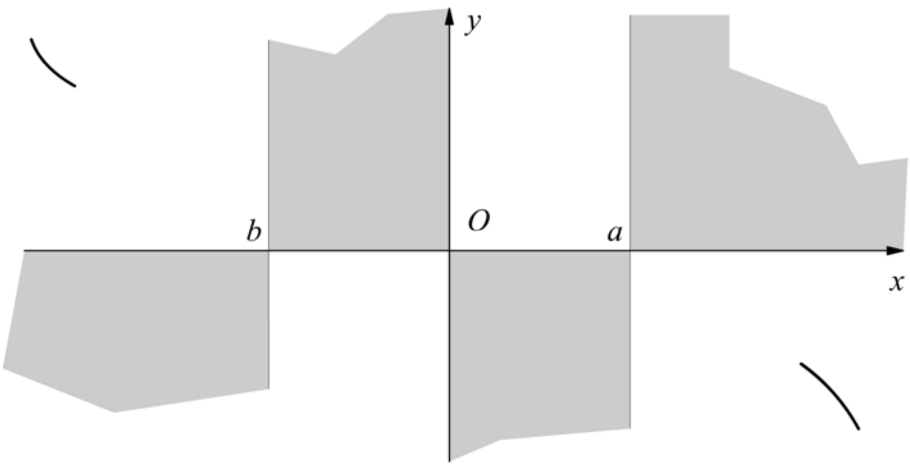
$$y = 0 \;\rightarrow\; atgx - \frac{x}{2} = 0$$

questa ultima equazione può essere risolta esclusivamente per via grafica.



oltre all'origine dove x=0 già preso in considerazione si otterrebbero: x=a=2,3 e x=b=-2,3.
Sempre basandosi sul grafico precedente si ottiene il segno della funzione e considerando le condizioni agli estremi del campo:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} y = +\infty$$



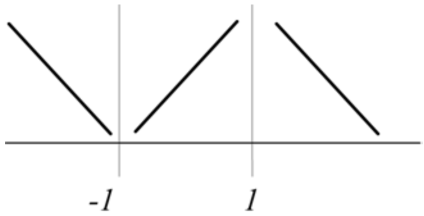
Calcoliamo le derivate:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \qquad\qquad y'' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Studiando la y' si ottiene:

$$y'>0 \ \rightarrow \ \frac{1}{1+x^2}>\frac{1}{2} \ \rightarrow \ 1+x^2<2 \ \rightarrow \ x^2-1<0 \quad \text{cioè:} \quad -1<x<1$$

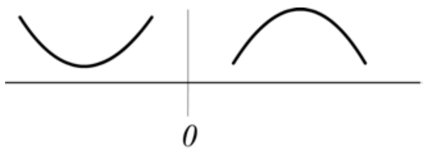
quindi graficamente la funzione sarà crescente e decrescente nei tratti seguenti:



i punti di ascissa x=-1 e x=1 sono rispettivamente punti di minimo e massimo.

$$y(-1)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2} \ \rightarrow \ min \qquad\qquad y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} \ \rightarrow \ max$$

studiando la y’’ otterremo:



$y''>0 \ \rightarrow \ x<0$ quindi

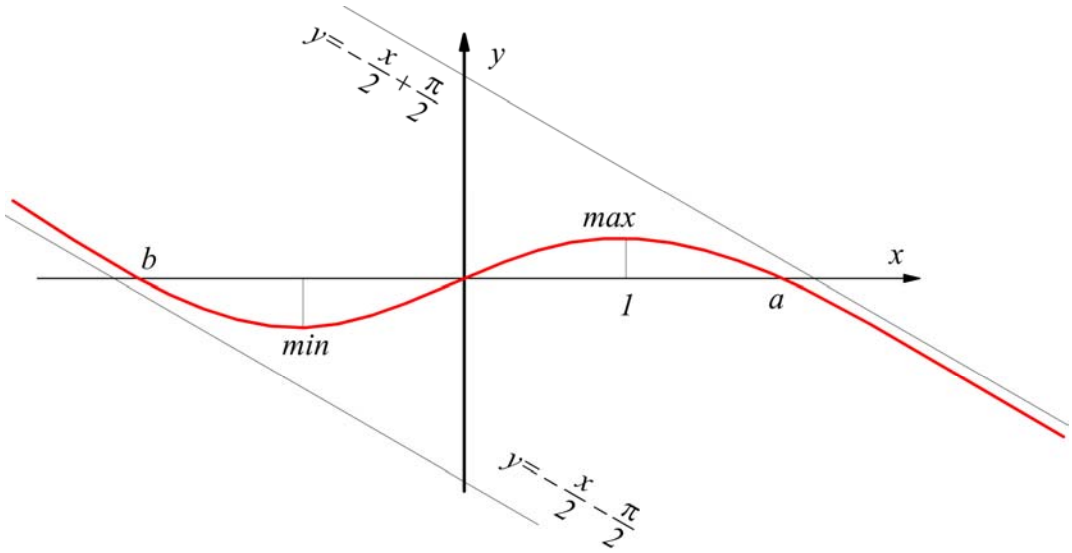
l’origine è un flesso obliquo con $y'(0)=\frac{1}{2}$

per gli eventuali asintoti obliqui avremo: y=mx+q

$$m_1=\lim_{x\to-\infty} y'=-\frac{1}{2} \qquad\qquad q_1=\lim_{x\to-\infty}(y-m_1x)=\lim_{x\to-\infty} atgx=-\frac{\pi}{2}$$

$$m_2=\lim_{x\to+\infty} y'=-\frac{1}{2} \qquad\qquad q_2=\lim_{x\to+\infty}(y-m_2x)=\lim_{x\to+\infty} atgx=\frac{\pi}{2}$$

Dunque le rette $y=-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$ e $y=-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$ sono asintoti obliqui rispettivamente per x→-∞ e per x→+∞ .

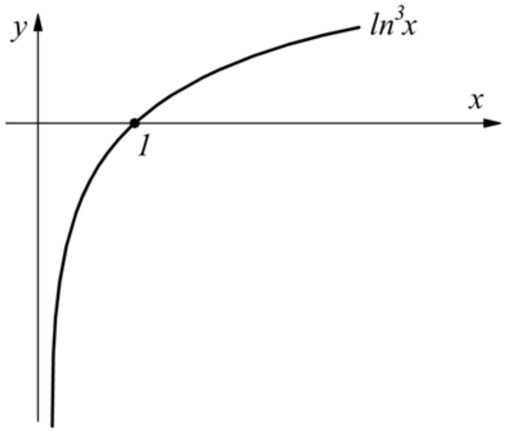


Esercizio no.6:soluzione

La funzione da studiare: $y = x^{ln^2 x} - 1$

Per il campo di esistenza deve essere x>0: C.E.≡ (0 — +∞).
Dato che $x^{ln^2 x} = (e^{ln x})^{ln^2 x} = e^{ln^3 x}$ possiamo studiare la funzione:
$y = e^{ln^3 x} - 1$

poi per il segno della funzione ci chiediamo

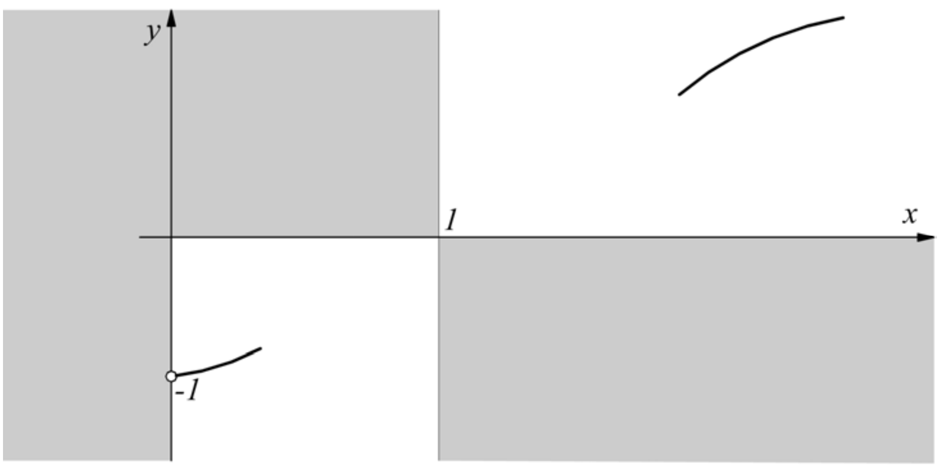


$$y > 0 \;\rightarrow\; e^{ln^3 x} > 1 \;\rightarrow\; ln^3 x > ln 1$$
$$\rightarrow\; ln^3 x > 0 \;\rightarrow\; x > 1$$

Le condizioni agli estremi del campo sono:

$$\lim_{x \to 0+} y = -1^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

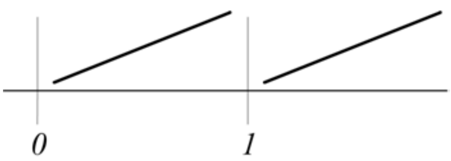
Si può dedurre un primo andamento approssimativo



Calcolo le derivate prima e seconda:

$$y' = e^{ln^3 x} \cdot 3 ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = 3(y+1)\frac{ln^2 x}{x} \qquad y'' = \frac{3(y+1)}{x^2}(3 ln^3 x - ln x + 2) ln x$$

Studiando la y’ noteremo y’>0 sempre, tranne che per lnx=0 → x=1. La funzione è sempre crescente, inoltre notiamo y’’(1)=0. Il punto di ascissa x=1 è di flesso orizzontale dato che y’(1)=0.



Il comportamento della derivata prima per x→0^+ è:

$$\lim_{x\to 0+} y' = 0\cdot(+\infty) = \lim_{x\to 0+} 3\frac{e^{ln^3 x}}{e^{ln\, x}} ln^2\, x$$

dopo aver posto $x=e^{lnx}$; proseguiamo ora sostituendo t=lnx:

$$\lim_{x\to -\infty} 3e^{t^3-t}\cdot t^2 = 3\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{t^2}{e^{t-t^3}}\right) = 0^+$$

Questo applicando l'Hospital oppure confrontando gli infiniti. Considerando la derivata seconda:

y''>0 se $(3\,ln^3\, x - ln\, x + 2)\,ln\, x > 0$ quest'ultima può essere ulteriormente rimaneggiata.

$$(3ln^3 x - lnx + 2) = 3ln^3 x - 3lnx + 2lnx + 2 = 3lnx(ln^2 x - 1) + 2(lnx + 1) =$$

$$= (lnx + 1)(3ln^2 x - 3lnx + 2)$$

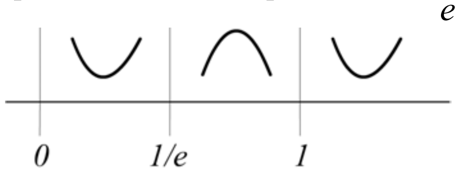
lo studio del segno della y'' si riduce, dunque allo studio della forma:

$$(lnx + 1)(3ln^2 x - 3lnx + 2)lnx > 0$$

il trinomio di II°grado ha Δ<0 e quindi basta considerare

$$(ln\, x + 1)\,ln\, x > 0 \quad \to \quad ln\, x < -1 \;\vee\; ln\, x > 0$$

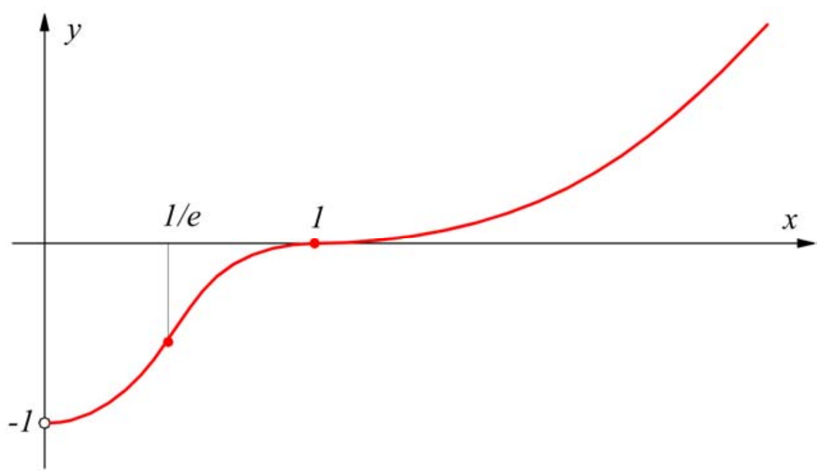
questa condizione equivale a $x < \frac{1}{e} \;\vee\; x > 1$



Questi ultimi due valori costituiscono punti di flesso.
La ricerca di un eventuale asintoto obliquo di equazione y=mx+q richiede la verifica:

$\lim_{x\to +\infty} y' = 0$ non vi sono dunque asintoti obliqui.

In base alle considerazioni sopra esposte possiamo tracciare il seguente grafico:



Esercizio no.7:soluzione

La funzione in questione è: $$y = 1 + \frac{2^{x+1}}{2^x - 1}$$

per il campo di esistenza dovrà essere $2^x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 0$: C.E.≡ (-∞ — 0 — +∞).
Per le eventuali intersezioni con gli assi notiamo:

$x = 0 \rightarrow \quad y = 1 + \frac{2}{0} = \infty \quad \rightarrow$ non vi sono intersezioni con l'asse y.

Poi valutiamo il segno della funzione:

$$1 + \frac{2^{x+1}}{2^x - 1} > 0 \rightarrow \quad 2^x - 1 + 2 \cdot 2^x > 0 \rightarrow \quad 3 \cdot 2^x - 1 > 0 \rightarrow \quad 2^x > \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$x > \ln_2\left(\frac{1}{3}\right) \rightarrow \quad x > \frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{\ln 2} \rightarrow \quad x > -\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

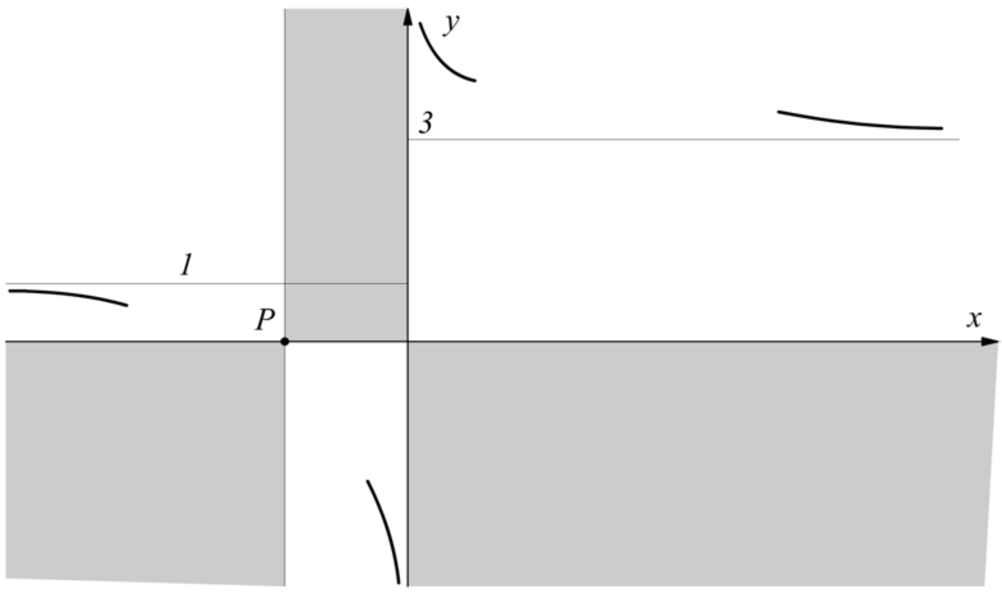
se x>0 questa ultima condizione è sempre verificata, se x<0 deve essere verificata la

$x < -\frac{\ln 3}{\ln 2}$ la funzione interseca l'asse x nel punto $P\left(-\frac{\ln 3}{\ln 2}, 0\right)$

Le condizioni agli estremi del campo sono:

$$\lim_{x \to -\infty} y = 1^- \qquad \lim_{x \to 0-} y = -\infty \qquad \lim_{x \to 0+} y = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} y = 3^+$$

il grafico rappresentativo i settori dove è collocata la curva:

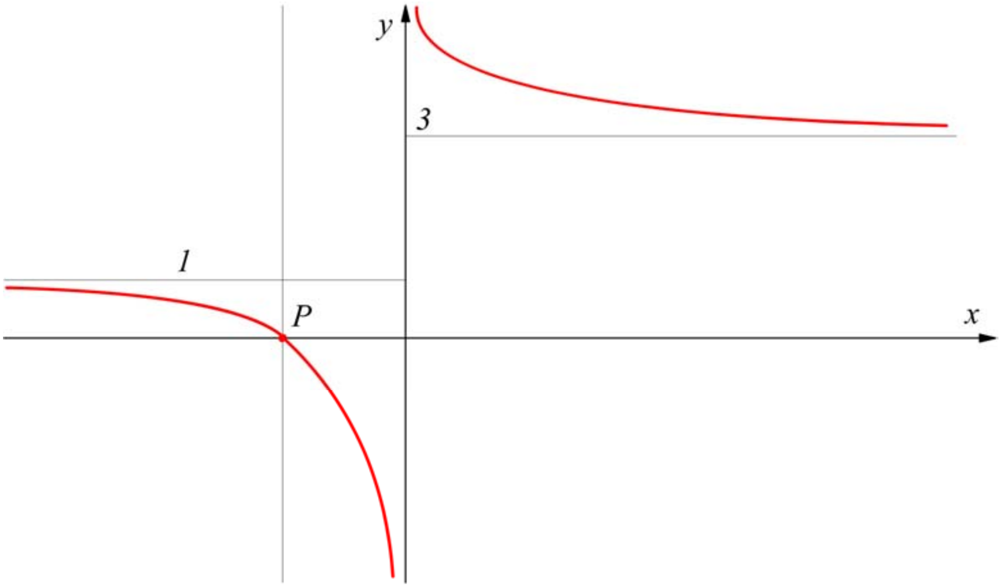


gli asintoti orizzontali y=1 ed y=3 non intersecano la curva; la retta x=0 è asintoto verticale. Le derivate sono:

$$y' = \frac{(2^x - 1)2^{x+1} \cdot \ln 2 - 2^{x+1} \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x - 1)^2} = -\frac{2^{x+1}}{(2^x - 1)^2} \ln 2$$

$$y'' = \frac{2^{x+1}(2^x + 1)}{(2^x - 1)^3} \ln^2 2$$

Osservando il comportamento della y': y'>0 mai! (la curva è sempre decrescente).
Mentre y''>0 $\rightarrow$ $2^x-1>0$ $\rightarrow$ $2^x>1$ $\rightarrow$ x>0. Dato che il punto x=0 non appartiene al C.E. la curva non presenta flessi.



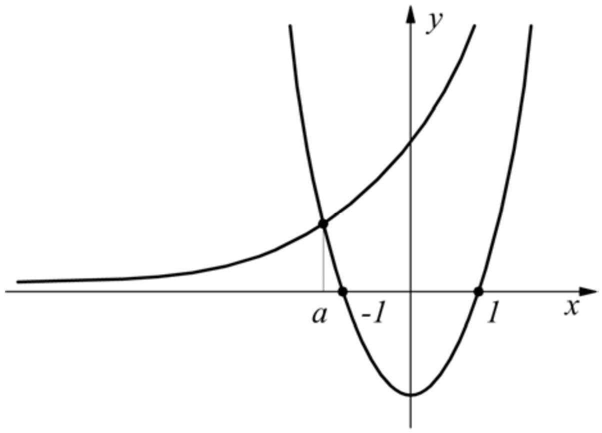
Esercizio no.8:soluzione

$$y = 2x\sqrt{2} - ln(x^2 - 1)$$

Per la ricerca del campo di esistenza si ha $x^2-1>0$ che è verificato per x<-1 e x>1.
C.E.≡ (-∞ — -1 — 1 — +∞) . In conseguenza di ciò la curva non interseca l'asse delle ordinate.
Ponendo y=0 verifichiamo eventuali intersezioni con l'asse delle ascisse.

$$2x\sqrt{2} - ln(x^2 - 1) = 0 \quad \rightarrow \quad ln\, e^{2x\sqrt{2}} - ln(x^2 - 1) = 0$$

$$ln\frac{e^{2x\sqrt{2}}}{x^2 - 1} = 0 \quad \rightarrow \quad e^{2x\sqrt{2}} = x^2 - 1$$ si procede per via grafica



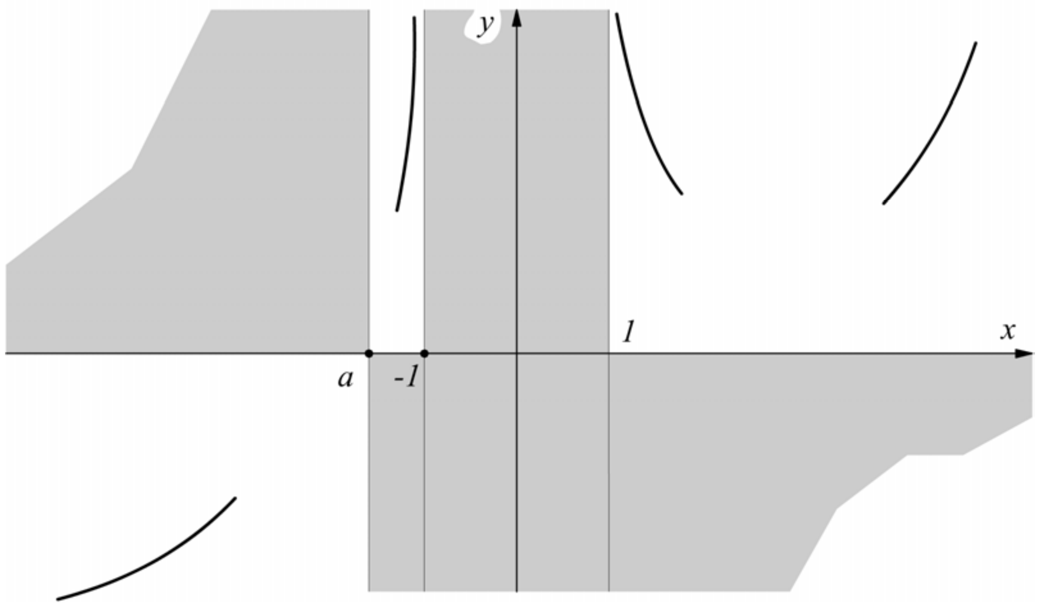
L'unico punto di intersezione per le due curve si ha per x=a<-1. Altre intersezioni non ve ne sono perché la curva esponenziale tende a +∞ più rapidamente della parabola.

Per il segno della funzione basterà considerare che y>0 quando x>a.

Le condizioni agli estremi del campo sono:

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} y = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} y = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x\sqrt{2}}}{x^2 - 1} = +\infty$$ per il confronto fra infiniti.

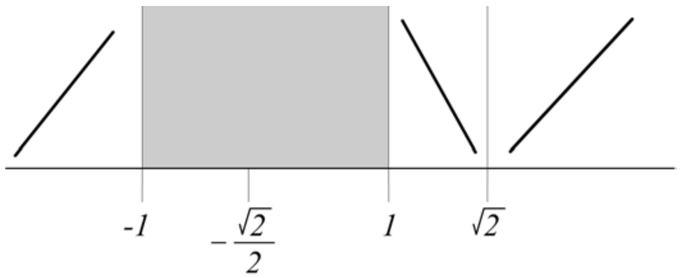


poi avremo:

$$y' = 2\sqrt{2} - \frac{2x}{x^2-1} = 2\cdot\frac{x^2\sqrt{2}-x-\sqrt{2}}{x^2-1} \qquad y'' = 2\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

La derivata seconda è sempre positiva, mentre per la derivata prima avremo:

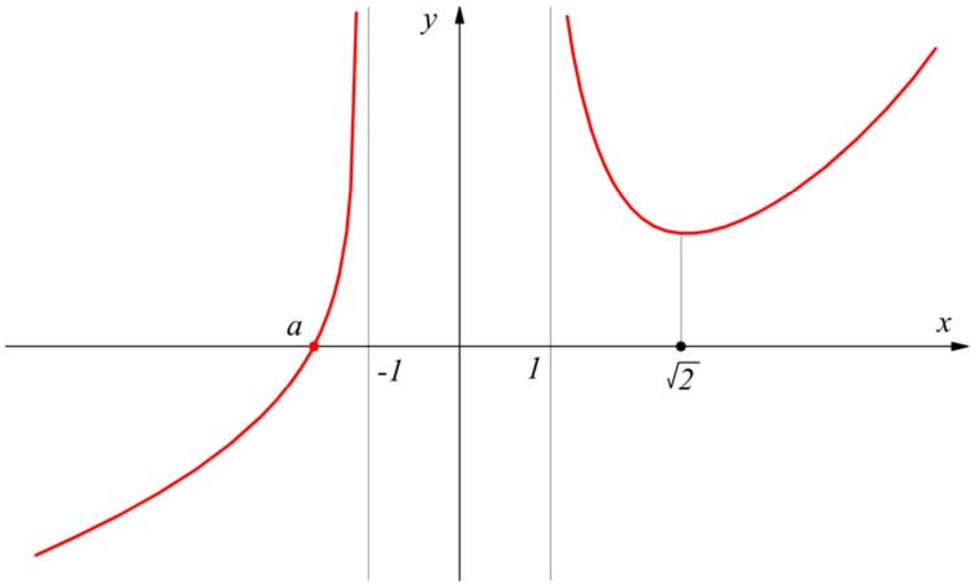
$$y' > 0 \;\rightarrow\; x^2\sqrt{2}-x-\sqrt{2} > 0 \;\rightarrow\; x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \;\vee\; x > \sqrt{2}$$



Per $x = \sqrt{2}$ si ha un minimo di ordinata $y(\sqrt{2}) = 4$. Per gli eventuali asintoti obliqui di equazione y=mx+q si ha:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} y' = 2\sqrt{2} \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty}(y - mx) = -\infty$$

La curva di funzione non ha asintoti obliqui.



Esercizio no.9:soluzione

$$y = e^{\frac{\sin x+1}{\sin x-1}} - 1$$

Deve essere $sinx \neq 1$ quindi $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in N)$ con k numero naturale,

otteniamo : C.E.≡ (-∞— $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ —+∞).

La funzione è periodica con periodo 2π, possiamo studiarla semplicemente nell'intervallo [0 — $\frac{\pi}{2}$ — 2π].

Le eventuali intersezioni con gli assi si hanno per

$x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{e} - 1$ il punto $P\left(0, \frac{1}{e} - 1\right)$ è intersezione con l'asse delle ordinate.

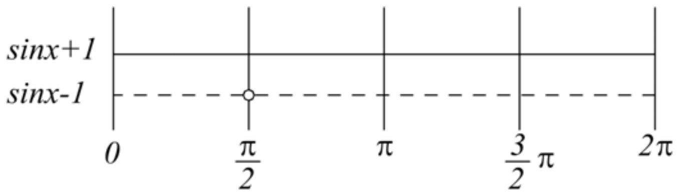
considerando l'estremo del campo 2π noteremo la stessa ordinata $T\left(2\pi, \frac{1}{e} - 1\right)$.

Poi poniamo $y = 0 \rightarrow exp\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right) = 1 \rightarrow \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}\pi$

$X\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ è intersezione con l'asse delle ordinate.

Lo studio del segno della funzione prevede:

$y > 0 \rightarrow exp\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right) > 1 \rightarrow \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} > 0$ dato che $-1 \leq \sin x \leq 1$



la disequazione non è mai verificata, la funzione è sempre negativa.
Le condizioni agli estremi del campo sono:

$\lim_{x \to \pi/2-} y = -1 \qquad \lim_{x \to \pi/2+} y = -1$ il punto $x = \frac{\pi}{2}$ è di discontinuità di III^a specie.

Calcolo delle derivate

$$y' = \frac{-2\cos x}{(\sin x - 1)^2} exp\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right) = -2(y + 1)\frac{\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$y''=-2\left\{y'\frac{\cos x}{(\sin x-1)^2}+(y+1)\frac{-\sin x(\sin x-1)^2-2\cos^2 x(\sin x-1)}{(\sin x-1)^4}\right\}$$

$$=-2\left\{-2(y+1)\frac{\cos^2 x}{(\sin x-1)^4}-(y+1)\frac{(\sin x-1)(\sin^2 x-\sin x+2\cos^2 x)}{(\sin x-1)^4}\right\}$$

$$=-2\frac{(y+1)}{(\sin x-1)^4}\left\{2(\sin^2 x-1)-(\sin x-1)(\sin^2 x-\sin x+2-2\sin^2 x)\right\}$$

$$=-2\frac{(y+1)}{(\sin x-1)^4}\left\{(\sin x-1)(2\sin x+2+\sin^2 x+\sin x-2)\right\}$$

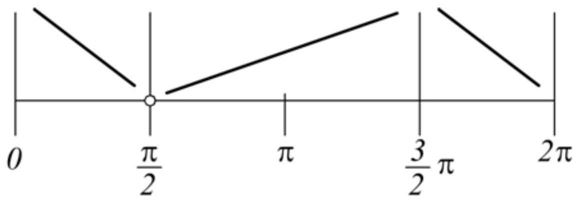
$$=-2\frac{(y+1)}{(\sin x-1)^3}(\sin^2 x+3\sin x) \;\rightarrow\; y''=\frac{-2\sin x(y+1)}{(\sin x-1)^3}(\sin x+3)$$

Studiando la y' si ha:

$$y'>0 \;\rightarrow\; -2(y+1)\frac{\cos x}{(\sin x-1)^2}>0$$

dato che $y+1=exp\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right)$ e $(\sin x-1)^2$ sono sempre positivi il segno è determinato da cosx>0; sappiamo che cosx<0 per π/2<x<3π/2.

Questo è il segno della y' nell'intervallo studiato.



abbiamo un massimo in $\left(\frac{3}{2}\pi,0\right)$ il punto di ascissa $x=\frac{\pi}{2}$ non è di minimo perché in tal punto la funzione non è definita. In questo estremo, applicando qualche piccolo artificio

$$\lim_{x\to\pi/2\pm} y'=0^{\pm}$$

$$y'=\frac{-2\cos x}{(\sin x-1)^2}exp\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right)=\frac{-2\cos x}{(\sin x-1)^2}\cdot\frac{(\sin x+1)^2}{(\sin x-1)^2}exp\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right)$$

$$y'=-2\frac{(\sin x+1)^2}{\cos^3 x}exp\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right)$$

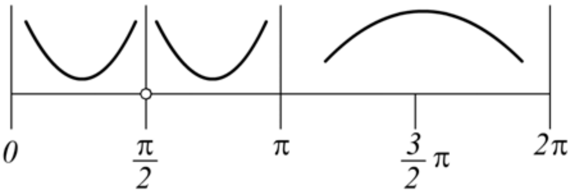
dato che $(\sin x+1)^2$ tende a 4, applicando più volte l'Hopital al termine rimanente:

$$\lim_{x\to\pi/2\pm} y' = 0^{\pm}$$

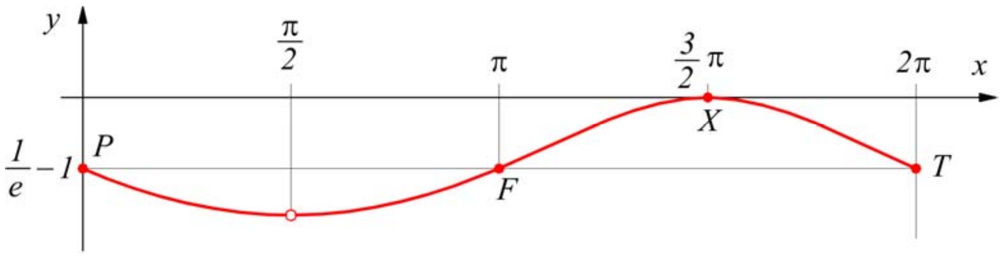
La curva ha tangente orizzontale in prossimità di $x=\frac{\pi}{2}$ mentre il suo valore tende ad y=-1.

Per la y'' si ha: $y''>0 \;\to\; \frac{-2\sin x(y+1)}{(\sin x-1)^3}(\sin x+3)>0$

dato che (y+1)>0 sempre e (sinx+3)>0 sempre mentre -(sinx-1)>0 sempre. La derivata seconda è positiva per π<x<0 (non è definita in x=π/2).



il punto x=π è di flesso e si ha $y(\pi)=\frac{1}{e}-1$



Esercizio no.10:soluzione

$$y = e^{\frac{2\sin x+1}{2\sin x-1}} - 1$$

Soluzione

Per il campo di esistenza deve essere $\sin x \neq \frac{1}{2} \rightarrow x \neq \frac{\pi}{6} \vee x \neq \frac{5}{6}\pi$

$C.E.:\left(-\infty \text{——} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{——} \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \text{——} +\infty\right)$ ovviamente dato che la funzione è periodica con periodo 2π basterà studiarla in tale intervallo con $x \neq \frac{\pi}{6}$ e .

Le eventuali intersezioni con gli assi si hanno per

$x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{e} - 1$ e questo si verifica anche per x=2π. Abbiamo i due punti:

$P\left(0, \frac{1}{e} - 1\right)$ e $T\left(2\pi, \frac{1}{e} - 1\right)$.

$y = 0 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7}{6}\pi$ e questo anche per $x = \frac{11}{6}\pi$

abbiamo i due punti $H\left(\frac{7}{6}\pi, 0\right)$ e $K\left(\frac{11}{6}\pi, 0\right)$.

Per il segno della funzione

$y > 0$ per $\sin x < -\frac{1}{2} \vee \sin x > \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \vee \frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

Per le condizioni agli estremi osserviamo che:

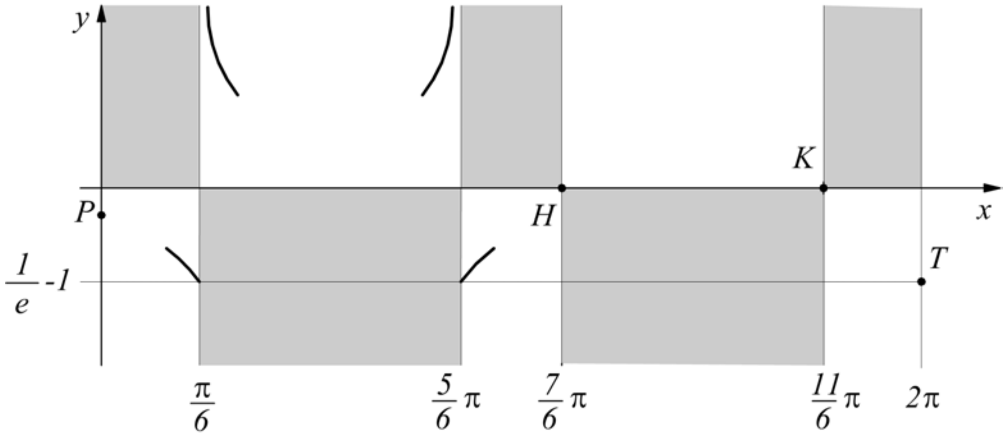
$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^-$ e $x \rightarrow \left(\frac{5}{6}\pi\right)^+$ si ha $\sin x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-$

$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+$ e $x \rightarrow \left(\frac{5}{6}\pi\right)^-$ si ha $\sin x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+$

basta dunque calcolare solo i seguenti limiti

$$\lim_{\sin x \rightarrow \frac{1}{2}^+} y = +\infty \qquad \lim_{\sin x \rightarrow \frac{1}{2}^-} y = -1$$

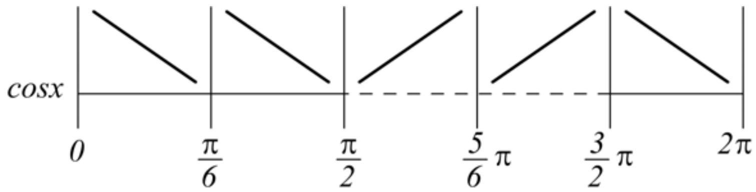
abbiamo modo di fare un grafico preliminare.



$$y' = -4 \cdot \left[exp\left(\frac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1} \right) \right] \cdot \frac{\cos x}{(2\sin x - 1)^2} = -4(y+1) \cdot \frac{\cos x}{(2\sin x - 1)^2}$$

$$y'' = -4 \frac{(y+1)}{(2\sin x - 1)^4} \cdot (4\sin^2 x + 4\sin x - 9)\sin x$$

Osservando y' notiamo che $exp\left(\frac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1} \right) > 0$ sempre, essendo una funzione esponenziale quindi concludiamo y'>0 per cosx<0



i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ sono rispettivamente di minimo e di massimo.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^3 - 1 \longrightarrow min\left(\frac{\pi}{2}, e^3 - 1\right)$$

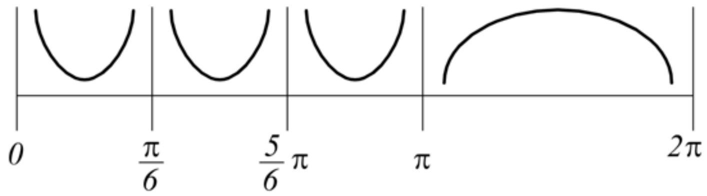
$$y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sqrt[3]{e} - 1 \longrightarrow max\left(\frac{3}{2}\pi, \sqrt[3]{e} - 1\right)$$

inoltre $y'(0) = y'(2\pi) = -\frac{4}{e}$

Per $x \to \frac{\pi}{6}^-$ e per $x \to \frac{5\pi}{6}^-$ si ha $\sin x \to \frac{1}{2}^-$ e $\sin x \to \frac{1}{2}^+$ mentre $\cos x \to \frac{\sqrt{3}}{2}^+$ e $\cos x \to -\frac{\sqrt{3}}{2}^-$ rispettivamente, poi notiamo che per $sin\,x \to \frac{1}{2}^{-}$ e $cos\,x \to \frac{\sqrt{3}}{2}^{+}$ $\lim y' = -\infty$

mentre per $sin\,x \to \frac{1}{2}^{+}$ e $cos\,x \to -\frac{\sqrt{3}}{2}^{-}$ $\lim y' = +\infty$.

Per la y’’>0 deve essere $sin\,x(4\,sin^2 x + 4\,sin\,x - 9) < 0$ in questa il trinomio è sempre negativo dato che $-1 \le sin\,x \le 1$. Quindi y’’>0 è verificata per 0<x<π.



il punto x=π è di flesso y(π)=1/e-1 mentre y’(π)=4/e.