TEOREMA DI TAYLOR

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n+1$ volte in (a,b).
Assegnato un generico $x_0 \in (a,b)$ vale la formula

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove $P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

è detto <u>polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0</u>. Il p.to ξ è contenuto in (x_0,x) o (x,x_0)

Il polinomio di Taylor costituisce un'approssimazione della funzione f "vicino" a x_0. Infatti si osserva facilmente che vale $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$ $\dots$ $P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ e inoltre il resto contiene il fattore $(x-x_0)^{n+1}$ che sarà molto piccolo per $x \approx x_0$

Esempi • $\boxed{f(x) = e^x}$, $x_0 = 0$

Poiché $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots$ avremo

$$f^{(k)}(x_0) = e^0 = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

La funzione è derivabile infinite volte e quindi per qualunque $n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$e^x = \overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}^{P_n(x)} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\xi \in (0, x)$ oppure $\xi \in (x, 0)$ a seconda che x sia positiva o negativa.

Questa formula mi consente ad esempio di calcolare il valore del numero e con precisione arbitraria. Essendo infatti $e = e^1$ avremo

$$e = \overbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}}^{P_n(1)} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \qquad \xi \in (0,1)$$

L'errore commesso è dunque

$$|e - P_n(1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \leq \frac{e^1}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Fissata quindi una certa tolleranza per l'errore ε (per esempio 10^{-16}), risolvendo la disequazione

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq \varepsilon$$

trovo il più piccolo n tale che

$$|e - P_n(1)| \leq \varepsilon$$

- $\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$, $x_0 = 0$

Essendo $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$,
$f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x$, ...
valutando le derivate in $x_0 = 0$ trovo la sequenza di coefficienti

$$\underset{f(x_0)}{0}, \underset{f'(x_0)}{1}, \underset{f''(x_0)}{0}, \underset{f'''(x_0)}{-1}, \underset{f^{IV}(x_0)}{0}, \underset{f^{V}(x_0)}{1}, \ldots$$

e quindi

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Anche in questo la formula può essere usata per calcolare in modo approssimato il valore della funzione seno in un punto qualunque.

- $\boxed{f(x) = \tan x}$ $\quad x_0 = 0$

$$f(x_0) = \tan 0 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow f'(x_0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \rightarrow f''(x_0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\left(\frac{\cos^2 x + 3 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\right) \rightarrow f'''(x_0) = 2$$

Quindi

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

<u>Notazione</u> si usa la notazione $O(x^k)$ (o grande di x^k) per x che tende a 0, per esprimere il fatto che quando $x \to 0$ una certa funzione si comporta "confrontabilmente" con x^k, ovvero

$$f(x) = O(x^k) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = c$$

o anche $f(x) \sim c x^k$

Per esempio scriveremo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

in quanto sappiamo che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{e^\xi}{3!} x^3}_{\text{resto}}$$

e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^\xi}{3!} x^3}{x^3} = \frac{e^\xi}{3!} = C$$

In generale

$$f(x) = C_k x^k + C_{k+1} x^{k+1} + C_{k+2} x^{k+2} + \dots = O(x^k)$$

per $x \to 0$

poichè

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^k} = C_k$$