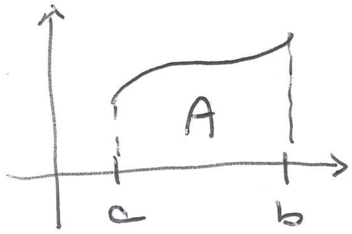
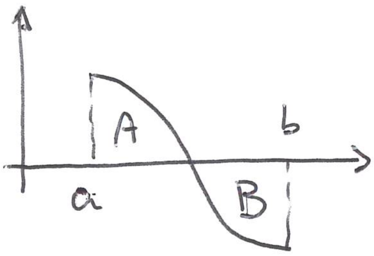
INTEGRAZIONE DEFINITA

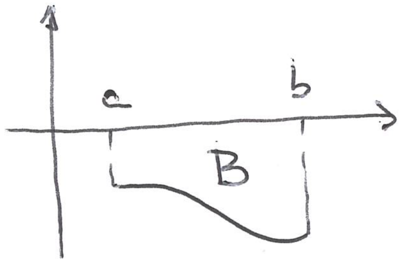
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Con il simbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ indicheremo l'area (orientata) della superficie sottesa dalla funzione f su $[a,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx = A$$



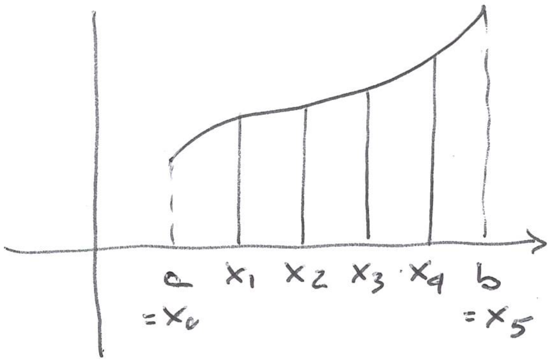
$$\int_a^b f(x)\,dx = A - B$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -B$$

Negli esempi grafici qui sopra le lettere A e B indicano l'area nel senso classico del termine, quindi un numero positivo che rappresenta la misura di una superficie.

<u>Definizioni</u> Supponiamo di suddividere l'intervallo $[a,b]$ in n sottointervalli di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$



esempio con $n = 5$

Definiamo in questo modo i punti

$$x_0 = a \,,\quad x_1 = a+h \,,\; x_2 = a+2h \,, \ldots, x_n = a+nh = b$$

Definiamo inoltre

$$\bar{f}_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\bar{\bar{f}}_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \qquad k = 1, \ldots, n$$

Avremo $\bar{f}_1 h + \ldots + \bar{f}_n h \leq A \leq \bar{\bar{f}}_1 h + \ldots + \bar{\bar{f}}_n h$

cioè $\frac{b-a}{n}(\bar{f}_1 + \ldots + \bar{f}_n) \leq A \leq \frac{b-a}{n}(\bar{\bar{f}}_1 + \ldots + \bar{\bar{f}}_n)$

Poiché la funzione è continua per ipotesi si dimostra che $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum \bar{f}_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum \bar{\bar{f}}_k$

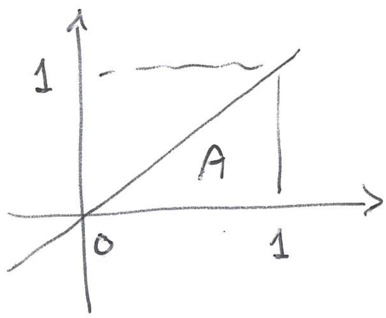
e quindi

$$A = \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum \overline{f}_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum \overline{\overline{f}}_k}$$

La definizione si estende (così continua a valere) nel caso in cui f sia negativa su tutto $[a,b]$ o su qualche sottointervallo di $[a,b]$, e da questo si capisce il motivo per cui

$\int_a^b f(x)\,dx$ può essere negativo.

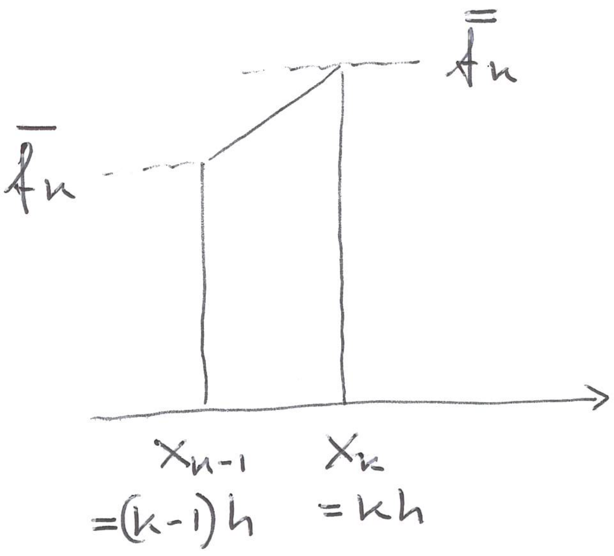
<u>Esempio</u> Consideriamo la funzione $f(x) = x$ in $[0,1]$. Sappiamo



che $A = \frac{1}{2}$. Usando la definizione vogliamo dimostrare che $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Dividendo l'intervallo $[0,1]$ in n sottointervalli di ampiezza $h = 1/n$ avremo

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \; x_2 = 2h, \; \ldots, \; x_n = nh = b$$



Nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ avremo dunque ($f(x)=x$)

$$\bar{f}_k = x_{k-1} = (k-1)h$$

$$\bar{\bar{f}}_k = x_k = kh$$

Quindi $\frac{b-a}{n} \sum \bar{f}_k$

$$= \frac{b-a}{n}\left(0 + h + \dots + (n-1)h\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \frac{n(n-1)}{2} h = \boxed{\frac{n-1}{2n}}$$

$\to \frac{1}{2}$ per $n \to \infty$

mentre $\frac{b-a}{n} \sum \bar{\bar{f}}_k$

$$= \frac{b-a}{n}\left(h + 2h + \dots + nh\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \frac{n(n+1)}{2} h = \boxed{\frac{n+1}{2n}}$$

$\to \frac{1}{2}$ per $n \to \infty$

Quindi

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

L'integrale definito $\int_a^b f(x)\,dx$

rappresenta in sostanza una somma di aree (orientate) di rettangoli, di base aventi ~~lunghezza~~ <u>infinitesimale</u>.

Facendo tendere $n \to \infty$ rendo infinitesima la base, e infinito il numero di rettangoli da considerare nella somma.

<u>Funzione primitiva o integrale</u>

Sia F una funzione derivabile e tale che

$$F'(x) = f(x)$$

Allora F si definisce primitiva di f o integrale di f e scriveremo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Osserviamo che se F è primitiva di f allora anche $F(x) + c$ lo è, perché la derivata di una costante è 0

$\Rightarrow$ ho infinite primitive per f.

6

Teorema fondamentale f continua, F primitiva. Allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Notazione $\quad F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Esempio $\quad f(x) = x \quad$ in $[a,b] = [0,1]$

$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + c \quad$ è l'insieme delle primitive

$$\int_0^1 x\,dx = F(1) - F(0) = F(x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{x^2}{2} + c\,\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + c - (0 + c)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Il problema del calcolo di aree si traduce quindi nel trovare la primitiva e valutarla agli estremi

<u>Proprietà importanti</u> Dalla definizione di $\int_a^b f(x)\,dx$ come limite di una somma di aree derivano in modo naturale le seguenti proprietà

1. $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b (c f)(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$

3. Se $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$ allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

4. Sia $c \in (a,b)$. Allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Si osserva che le proprietà 1. 2. 4.
si possono dimostrare facilmente usando
la relazione

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

con F primitiva di f. Per quanto
riguarda la 1., supponiamo G
primitiva di g. Essendo

$$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

otteniamo

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La 2. si dimostra in modo analogo
partendo da

$$(cF)'(x) = cF'(x) = cf(x) = (cf)(x)$$

Per quanto riguarda la 4. abbiamo che

$$\underbrace{\int_a^c f(x)\,dx} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx} =$$

$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Valgono inoltre

5. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

6. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Quest'ultima si verifica facilmente poiché

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right]$$

$$= -\int_b^a f(x)\,dx$$

Integrali immediati

Ricordando le regole di derivazione si dimostra facilmente che

- $f(x) = x^a \quad \rightarrow \quad F(x) = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$

  per $a \neq -1$

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \rightarrow \quad F(x) = \ln|x|$

- $f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad F(x) = e^x$

- $f(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad F(x) = \operatorname{sen} x$

- $f(x) = \operatorname{sen} x \quad \rightarrow \quad F(x) = -\cos x$

Esempio $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x = -\cos x \Big|_0^{\pi}$

$$= (-1) \cos x \Big|_0^{\pi} = (-1)(\cos\pi - \cos 0)$$

$$= (-1)(-1-1) = 2$$

Tecniche di integrazione

In generale la scrittura

$$\int f(x)\,dx$$

indica l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$. Supponendo di conoscerne una, che chiamiamo $F(x)$, allora possiamo scrivere

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Proprietà

1. essendo $F'(x) = f(x)$ vale

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x)$$

2. $\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

3. $\int f(\alpha x + \beta)\,dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$

4. $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

in quanto f è primitiva di f'

5. <u>Integrazione per parti</u> Sappiamo

che $\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$

Usando la 4. e la 2. otteniamo

$$f(x)g(x) + c = \int f(x)g'(x) + \int f'(x)g(x)$$

$$\rightarrow \boxed{\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)}$$

(la costante c è omessa perchè abbiamo l' integrale a dx e a sx)

<u>Osservazione</u> queste proprietà permettono di calcolare una primitiva e quindi poi di calcolare l' integrale definito

$$\int_a^b \ldots$$