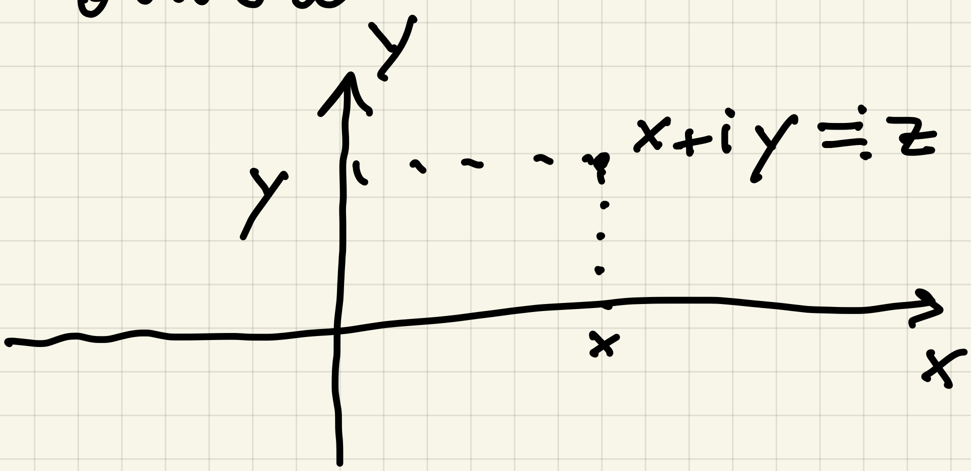
9 ottobre



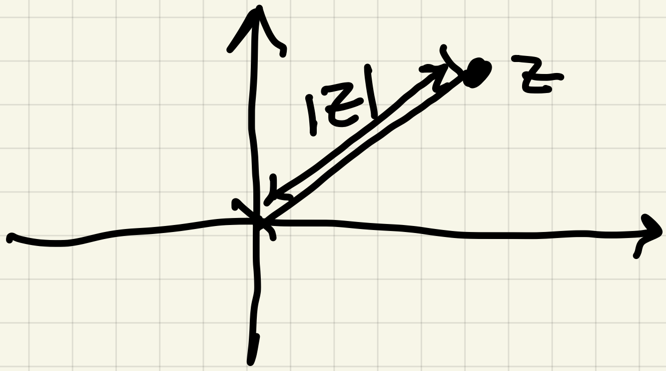
$$zw = (x+iy)(u+iv) =$$
$$= xu + xiv + iyu + iyiv$$
$$= xu + ixv + iyu + i^2 yv \qquad i^2 = -1$$
$$= \underbrace{(xu - yv)}_{} + i\,\underbrace{(xv + yu)}_{}$$

sono le coordinate del prodotto

$z = x + iy$

$x = \mathrm{Re}\, z$ è la "parte reale" di z.

$y = \mathrm{Im}\, z$ è la "parte immaginaria" di z.

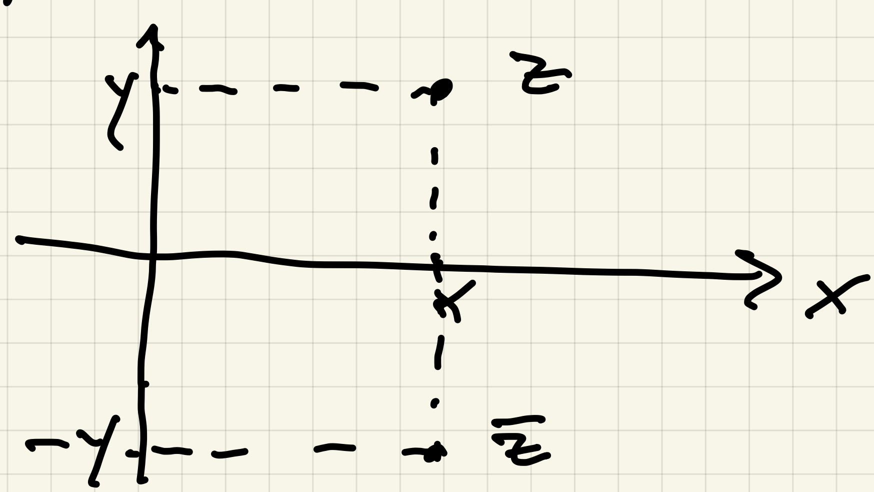


$|z|$ valore assoluto o modulo di z è la distanza di z dall'origine. Se $z = x+iy$ allora

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Dato $z = x+iy$, il numero

$\bar{z} = x - iy$ è il suo complesso coniugato.



Teor Per ogni $z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$ esiste un numero complesso, che denoto con $\frac{1}{z}$, che ha la proprietà che

$$\frac{1}{z} z = z \frac{1}{z} = 1 \quad (1)$$

$\frac{1}{z}$ è "l'inverso" di z, ed è l'unico numero complesso per il quale la (1) è soddisfatta

(se $w \in \mathbb{C}$ è t.c. $w z = 1 \Longrightarrow w = \frac{1}{z}$)

Prima di mostrarvi cos'è $\frac{1}{z}$ facciamo un calcolo preliminare

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

$$z \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2$$

$$= x^2 - i^2 y^2 = x^2 - (-1) y^2 = x^2 + y^2$$

$$= |z|^2$$

$$z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Risulta che $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$. Infatti

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z\bar{z} \frac{1}{|z|^2} = |z|^2 \frac{1}{|z|^2}$$

$$= 1$$

$$z = -100 \qquad \bar{z} = -100 \qquad |z|^2 = 100^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{-\cancel{100}}{100^{\cancel{2}\,1}} = \frac{-1}{100}$$

$z = 3 + i2$

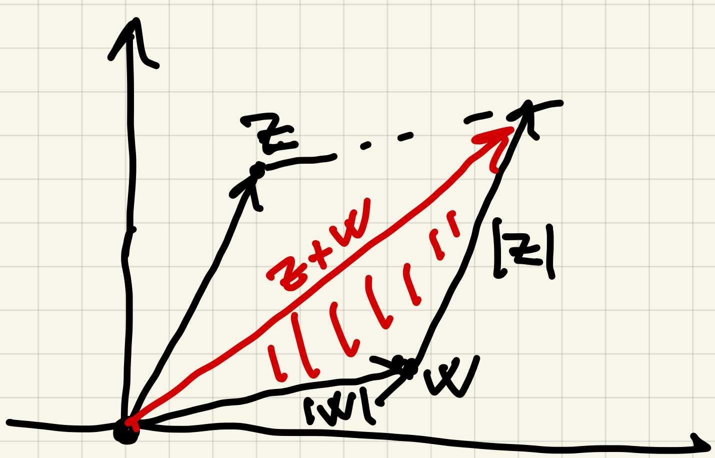
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13} i$$

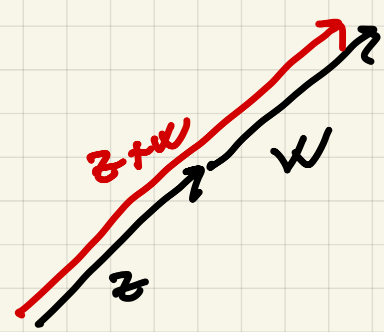
$\bar{z} = 3 - i2 = (3, -2)$

$|z|^2 = 3^2 + (-2)^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

a) $|zw| = |z|\,|w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

b) $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$





$z = x + iy \qquad w = u + iv$

Prodotto scalare tra vettori

$(x, y) \cdot (u, v) = xu + yv = Re(z\overline{w})$

Verificare per

esercizio

$$\left| \frac{z+1}{z+3i} \right| > 2$$

$$\left| (z+1) \frac{1}{z+3i} \right| = |z+1| \left| \frac{1}{z+3i} \right| =$$

$$= |z+1| \frac{1}{|z+3i|} > 2$$

$$\Updownarrow$$

$*$ $|z+1| > 2\,|z+3i| \qquad z = x+iy$

$$|x+iy+1| > 2\,|x+iy+3i|$$

$$|x+1+iy| > 2\,|x+i(y+3)|$$

$$|x+1+iy|^2 > 4\,|x+i(y+3)|^2$$

$$|x+1+iy|^2 > 4\,|x+i(y+3)|^2$$

$$(x+1)^2+y^2 > 4\left[x^2+(y+3)^2\right) =$$

$$(x+1)^2+y^2 > 4x^2+4(y+3)^2$$

$$\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2} > \overset{3}{\cancel{4}}x^2+\overset{3}{\cancel{4}}y^2+24y+\overset{35}{\cancel{36}}$$

$$3x^2-2x+3y^2+24y+35<0$$

$$\underbrace{x^2-\frac{2}{3}x}+y^2+\overset{2\cdot 4}{8}y+\frac{35}{3}<0$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r_0^2$$

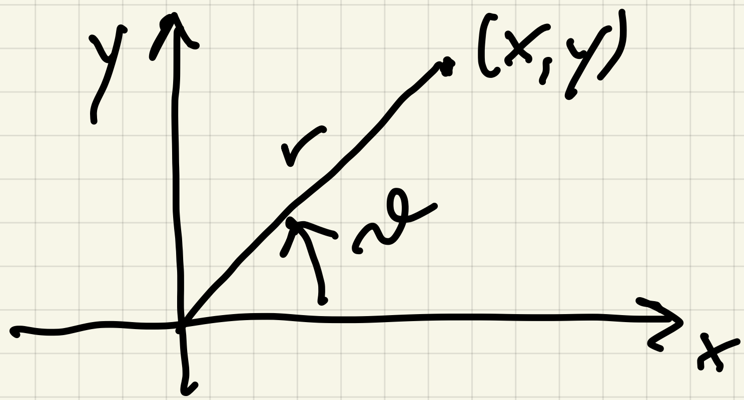
$$(x-x_0)^2=\underbrace{x^2-2x_0x}\dots$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}+(y+4)^2-16+\frac{35}{3}<0$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+(y+4)^2<16+\frac{1}{9}-\frac{35}{3}=r_0^2$$

Disco di centro $\left(\frac{1}{3},-4\right)$ e raggio r_0

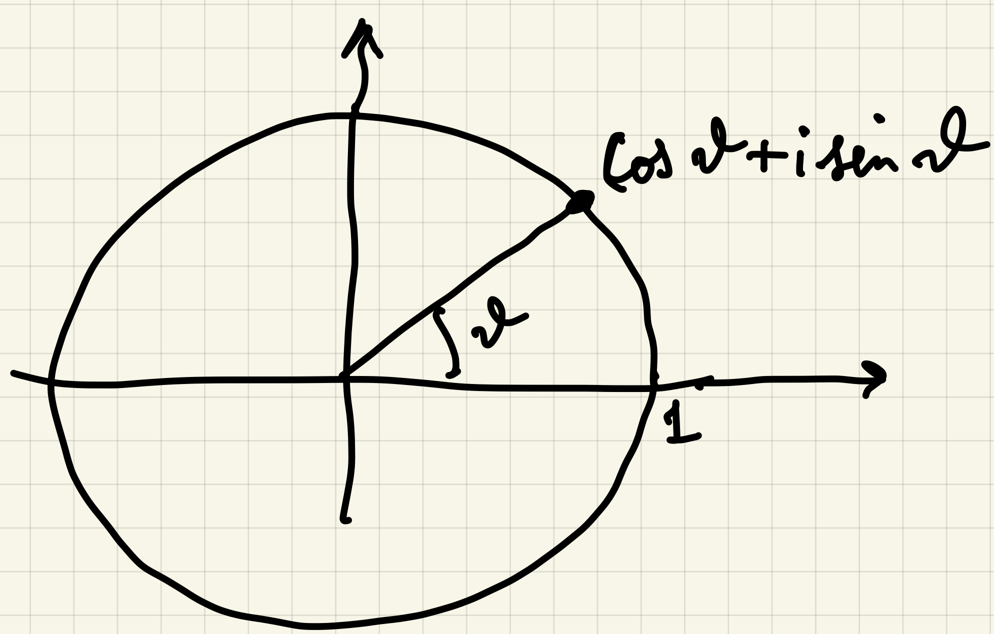
Coordinate polari (r, ϑ)



$$x = r\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\vartheta$$

$$z = x + iy = r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta =$$
$$= r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

dove $r = |z|$



Formule di De Moivre

Dato $z = x + iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

e dato $n \in \mathbb{N}$ allora

$$z^n = r^n \left(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta) \right)$$