ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 1

Trieste, 11 ottobre 2020

1. Determinare quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono soddisfatte dalle seguenti relazioni. Nel caso in cui la relazione sia di equivalenza, individuare le classi di equivalenza e l'insieme quoziente.
   1. Nell'insieme delle rette del piano euclideo reale: $r \; \rho \; r_0$ se e solo se r è perpendicolare a r_0;
   2. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi: $x \; \rho \; x_0$ se e solo se $\mid x \mid = \mid x_0 \mid$;
   3. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi: $x \; \rho \; x_0$ se e solo se $xx_0 > 0$;
   4. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi: $x \; \rho \; x_0$ se e solo se $xx_0 \geq 0$;
   5. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali: $x \; \rho \; x_0$ se e solo se x ha un numero di cifre maggiore o uguale a quelle di x_0;
   6. Nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali: $x \; \rho \; x_0$ se e solo se $x - x_0 \in \mathbb{Z}$.

2. Cosa c'è di errato nella seguente dimostrazione che se una relazione ρ gode della proprietà simmetrica e transitiva allora gode anche della proprietà riflessiva.

   " Sia x qualsiasi. Se $x\rho y$ allora per la proprietà simmetrica $y\rho x$ e per la proprietà transitiva $x\rho x$."

3. (i) In $\mathbb{Z}_7$ si calcoli per ogni elemento non nullo l'inverso rispetto al prodotto.

   (ii) In $\mathbb{Z}_8$ e in $\mathbb{Z}_{12}$ si individuino gli inversi di tutti gli elementi che hanno inverso rispetto al prodotto.

4. Sia $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ il campo dei numeri razionali. Si definisca un'ulteriore operazione in $\mathbb{Q}$ ponendo $x \star y = \frac{3}{4}(x \cdot y)$. Si dimostri che $(\mathbb{Q}, +, \star)$ è un campo.