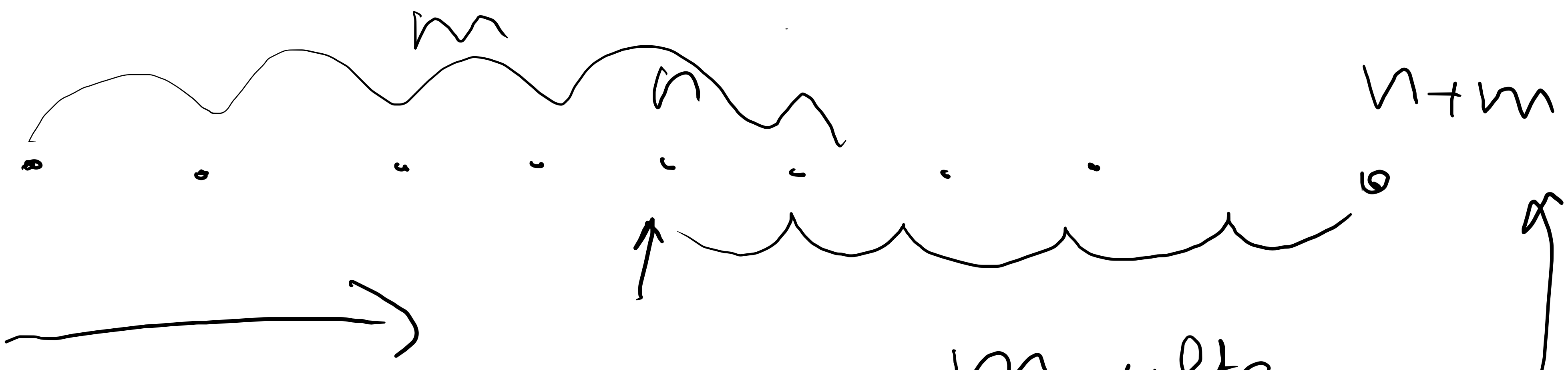
$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$$

$$\ldots\ 99,\ 100,\ 101, \ldots, \ldots, 110, \ldots$$

$\mathbb{N}$ è un insieme ordinato, cioè presi due elementi $n, m \in \mathbb{N}$ allora

o $n = m$ o n "segue" m o m "segue" n

è un successivo di



m-simo successore di n.

$$(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xmapsto{+} n+m \in \mathbb{N}$$

Proprietà di + (somma o addizione)

Con la convenzione che $n+0=n$

- $n+m = m+n \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$ (commutativa)
- $n+0 = 0+n = n$ 0 è detto elemento NEUTRO per +

$\forall\, n, m, l \in \mathbb{N}$

$$n + (m + l) = (n + m) + l$$

proprietà associativa $+$

precedenze nell'operazione di somma

Consideriamo $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo di considerare

$$\underbrace{n + n + \dots + n}_{k \text{ volte}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

è detto multiplo k-esimo di n ed è indicato con

$$n \cdot k$$

In particolare i numeri naturali multipli di 2 si dicono numeri PARI.

Se $\mathbb{P}$ è il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ i cui elementi sono i numeri pari con $D = \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ indichiamo l'insieme dei numeri DISPARI.

Se conveniamo che $n \cdot 0 = 0$, allora $0 \in \mathbb{P}$

Il generico numero pari è del tipo

$$2 \cdot k \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2 \cdot k, \dots\}$$

$$D = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2 \cdot k + 1, \}$$

Oss. $2 \cdot k + 2 \cdot k' = 2 \cdot (k + k')$ In generale $n \cdot k + n \cdot k' =$
$= n \cdot (k + k')$

I numeri naturali multipli di n si dicono anche divisibili per n.

Ad. es. I numeri pari sono divisibili per 2.

I numeri naturali che NON sono divisibili se non per se stessi (e per 1) si dicono PRIMI.

<u>Oss</u> I numeri pari diversi da 2 NON sono primi.

$\mathcal{P}$ insieme dei numeri primi

$$\mathcal{P} \subsetneq \mathbb{N}$$

$\mathcal{P}$ è un insieme infinito.

Supponiamo PER ASSURDO che $\mathcal{P}$ sia finito

$$\{1, 2, 3, 5, \ldots, p\}$$

$$p^* = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p + 1$$

NON è multiplo di $1, \ldots, p$

Quindi è PRIMO e $p^* > p$.

$$n \cdot k = \underbrace{n + \cdots + n}_{k}$$

moltiplicazione di numeri naturali

$$(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{\cdot}{\longmapsto} n \cdot k$$

Prop $n \cdot 0 = 0$

$n \cdot k = k \cdot n \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$ commutatività di "$\cdot$"

$(n \cdot k) \cdot k' = n \cdot (k \cdot k') \quad \forall n, k, k' \in \mathbb{N}$ associatività di "$\cdot$"

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1 è elemento neutro rispetto alla moltiplicazione "$\cdot$".

Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

$$n \cdot (k + k') = n \cdot k + n \cdot k'$$

Teorema

Ogni numero naturale si ottiene come prodotto di numeri primi.

Più precisamente ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ si può scrivere in unico modo (a meno dell'ordine di $\cdot$) come $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_s$ $\qquad p_1, \ldots, p_s \in \mathcal{P}$

primi.

Principio di Induzione

Supponiamo di voler stabilire la veridicità di ciascuna proposizione P_n che dipende da $n \in \mathbb{N}$. Anzitutto P_n deve essere vera per almeno un $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposto vero P_n, se dimostro che è vero P_{n+1}, allora P_n è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{n + \cdots + n}_{k} = n \cdot k$$

$$\boxed{n \cdot k + n \cdot k' = n \cdot (k + k')}$$

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k} = n^{k}$$

potenza di n alla k

base

esponente

$$\boxed{n^{k} \cdot n^{k'} = n^{(k+k')}}$$

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1+3 = 4 = 2^2 = 2\cdot 2$$

$$1+3+5 = 9 = 3^2 = 3\cdot 3$$

$$1+3+5+7 = 16 = 4^2 = 4\cdot 4$$

$$\dots$$

Ora, cosa succede se generalizzo questa proprietà?

$$\underbrace{1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n+1)}_{\text{somma dei primi } n+1 \text{ numeri dispari}} \overset{?}{=} (n+1)^2$$

I casi $n=0,1,2,3$ VERIFICATI

Usiamo il principio di INDUZIONE

Cioè supponiamo vera l'uguaglianza per n (ossia la proposizione P_n

$$1+ \dots + 2n+1 = (n+1)^2 \quad \checkmark$$

Vogliamo mostrare che necessariamente è vera la proposizione P_{n+1}

$$1+ \text{—} \text{—} + 2(n+1)+1 = (n+2)^2 = \left[(n+1)+1\right]^2$$

$$1 + \dots + 2(n+1) + 1 =$$

$$= \underbrace{1 + \dots + 2n+1}_{= (n+1)^2} + 2(n+1) + 1$$

Ipotesi induttiva

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 = [(n+1)+1]^2 = (n+2)^2$$