

4.3 Esperienza 10 __ Misura del campo magnetico locale sfruttando la legge di Faraday-Lenz

Il campo magnetico terrestre \vec{B}_T corrisponde approssimativamente a quello di un dipolo che forma un angolo di circa 15 gradi con l'asse di rotazione della Terra. L'asse magnetico incontra la superficie terrestre nel punto corrispondente a circa 75° di latitudine Nord e circa 291° di longitudine Est, a quasi 2000 km dal polo N geografico, e nel suo simmetrico (nell'anno 2005). L'orientazione del dipolo è da N a S.

Per descrivere \vec{B}_T si introducono una componente *tangenziale* B_ϑ ed una componente *radiale* B_r rispetto al meridiano locale.

Il valore medio di entrambi le componenti è, in prossimità della superficie terrestre, dell'ordine di qualche decimo di Gauss, ovvero di qualche unità per 10^{-5} Tesla (va tipicamente da circa 6.8×10^{-5} Tesla, in prossimità dei poli magnetici, a circa 2.4×10^{-5} Tesla nel Sud Atlantico).

Trascurando l'atmosfera (aria) si ha

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos\vartheta}{R_T^3} \quad ; \quad B_\vartheta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \sin\vartheta}{R_T^3} \quad (4.5)$$

dove:

R_T = raggio medio terrestre $\simeq 6.370 \times 10^6$ m;

m = modulo del momento magnetico del dipolo equivalente, sorgente del campo magnetico terrestre, detto anche *momento di dipolo geo-magnetico*;

μ_0 = permeabilità magnetica del vuoto $\simeq 1.26 \times 10^{-6}$ H/m;

ϑ = latitudine

Il campo magnetico locale \vec{B}_l in prossimità del suolo tiene ovviamente conto anche delle caratteristiche magnetiche peculiari dell'ambiente circostante il punto di misura, e soprattutto può essere rappresentato da un vettore non necessariamente parallelo al suolo, ovvero non ortogonale a \vec{g} .

Quindi \vec{B}_l può essere visto come la somma del contributo terrestre \vec{B}_T legato alla struttura dinamica macroscopica dei magmi in movimento nel mantello terrestre, e dei peculiari contributi locali, in prossimità del punto di misura. \vec{B}_T al suolo è tanto più ortogonale a \vec{g} quanto più ci si allontana dai poli magnetici e quanto più ci si avvicina all'equatore magnetico.

Se \vec{B}_l fosse effettivamente "orizzontale", utilizzando un ago magnetico se ne potrebbero determinare sia la direzione che il verso, e se l'ago fosse opportunamente tarato, anche il modulo, facendo oscillare l'ago attorno alla posizione di equilibrio. In alternativa si potrebbe studiare il cambiamento d'orientazione dell'ago magnetizzato quando lo si sottopone contemporaneamente anche ad un campo magnetico noto, creato ad esempio con due bobine di Helmholtz o con un solenoide lungo e di adeguato diametro, e da ciò dedurre l'intensità di \vec{B}_l .

Nella realtà una bussola mostra direzione e verso del vettore componente orizzontale di \vec{B}_l , che ovviamente è parallelo a \vec{B}_ϑ ; l'informazione fornita da

una bussola, quindi, risente sia dell'effetto di g che dell'effetto degli attriti sul perno di rotazione dell'ago, in caso di non esatta ortogonalità fra \vec{B}_l e \vec{g} . Le tecniche più raffinate di misura del campo geomagnetico fanno oggi uso

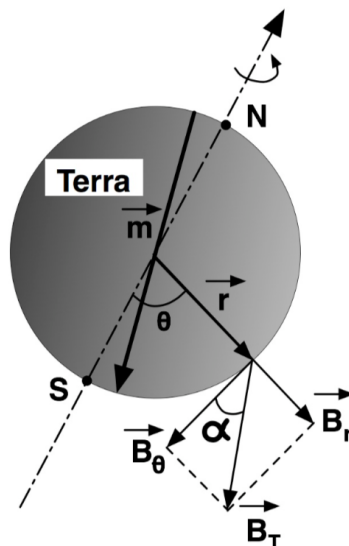


Figura 4.3: Campo magnetico terrestre.

di sensibili sonde Hall.

Vedremo ora un altro possibile modo per misurare il vettore campo magnetico locale \vec{B}_l .

Nel corso della lezione precedente abbiamo visto come si possa verificare la validità della legge di Ampère che descrive il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo percorso da una corrente elettrica.

Si è sfruttata in proposito una particolare configurazione geometrica facendo delle ragionevoli supposizioni sul campo magnetico locale \vec{B}_l nel laboratorio e usandolo quindi come riferimento da confrontarsi col campo magnetico prodotto dal filo percorso da corrente. Non conoscendo però l'esatto valore, e neppure l'orientazione e il verso di \vec{B}_l , la verifica descritta della legge di Ampère non può considerarsi del tutto completa. Per questo bisognerebbe essere anche in grado di stimare il valore della permeabilità magnetica μ dell'aria. Ciò richiede però di conoscere completamente il campo magnetico locale \vec{B}_l .

A tal proposito si supponga che \vec{B}_l sia costante nel tempo, entro il volume interessato, almeno durante il periodo d'effettuazione di tutte le misure necessarie, e che le strumentazioni utilizzate non lo perturbino in modo significativo.

Si sfrutta quindi la legge di Faraday-Lenz per la forza elettromotrice indotta. Supponendo di disporre di una bobina circolare di raggio r , che possa essere messa in rotazione con velocità angolare $\omega(t)$ nota, attorno ad un suo asse

diametricale, e conoscendo dunque anche l'orientazione di tale asse, si può scrivere la forza elettromotrice indotta nella bobina quando questa ruota in presenza di un campo magnetico \vec{B}_l costante, come

$$\mathcal{E}(t) = n \omega(t) \pi r^2 \left| \vec{B}_l \right| \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\omega t) \quad (4.6)$$

dove:

n = numero di spire della bobina;

$\omega(t)$ = velocità angolare della bobina;

r = raggio della bobina;

φ = angolo fra piani verticali contenenti asse-rotazione della bobina e \vec{B}_l ;

α = angolo fra \vec{B} e l'asse di rotazione della bobina quando questo è allineato al piano verticale contenente \vec{B} , coincidente con l'angolo di inclinazione della direzione di \vec{B} rispetto al piano orizzontale tangente al suolo nel punto di misura;

$\left| \vec{B}_l \right| \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha = B_{eff}$;

$\pi r^2 = A =$ area della bobina.

L'espressione per la forza elettromotrice indotta, se l'asse di rotazione della bobina è allineato al piano verticale contenente \vec{B} , diventa quindi

$$\mathcal{E}(t) = n \omega(t) A B_{eff} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (4.7)$$

In figura 4.4 sono mostrati la struttura della bobina con il sostegno ed il meccanismo per metterla in rotazione.

Il suo raggio è di circa 10.0 cm e la manovella con cui imprimere la rotazione è manovrata a mano e permette, tramite una demoltiplica 1 : 2, di ottenere una velocità angolare media di rotazione: $|\vec{\omega}_m| \simeq 6 \div 8 \text{ Hz} \times 2\pi$.

Chiaramente il valore massimo per \mathcal{E} si ottiene in corrispondenza al valore $\operatorname{sen}(\omega t) = 1 \Rightarrow (\omega t) = \pi/2 + 2k\pi$, con $k = 1, 2, 3, \dots$

Supponendo ora di monitorare la f.e.m. \mathcal{E} generata dalla rotazione della bobina, e detta R l'impedenza globale offerta dalla bobina e dai tratti di circuito che conducono il segnale prodotto agli strumenti di misura utilizzati, si può porre

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{n\omega AB_{eff}}{R} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (4.8)$$

per la corrente che circola nella bobina, con $i_{max} = (n\omega AB_{eff})/R$. Misurando quindi tale corrente si ottiene

$$B_{eff} = B \operatorname{sen} \varphi = \frac{i_{max} R}{n\omega A} \quad (4.9)$$

È però più agevole misurare direttamente \mathcal{E}_{max} utilizzando un oscilloscopio. Si può così visualizzare il segnale in funzione del tempo e correggere per eventuali variazioni di ω , è infatti difficile mantenere $\omega(t) = \text{cost.}$ con una rotazione manuale:

$$B_{eff} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{n\omega A} \quad (4.10)$$

Se $\omega(t) = \text{cost.}$ sullo schermo dell'oscilloscopio dovrebbe apparire una sinusoide, di periodo $T = 2\pi/\omega$, la cui ampiezza massima corrisponde ad \mathcal{E}_{max} e la cui ampiezza minima dovrebbe corrispondere a $-\mathcal{E}_{max}$.

Se quindi si sistema la struttura mostrata in figura 4.4 su un ripiano orizz-

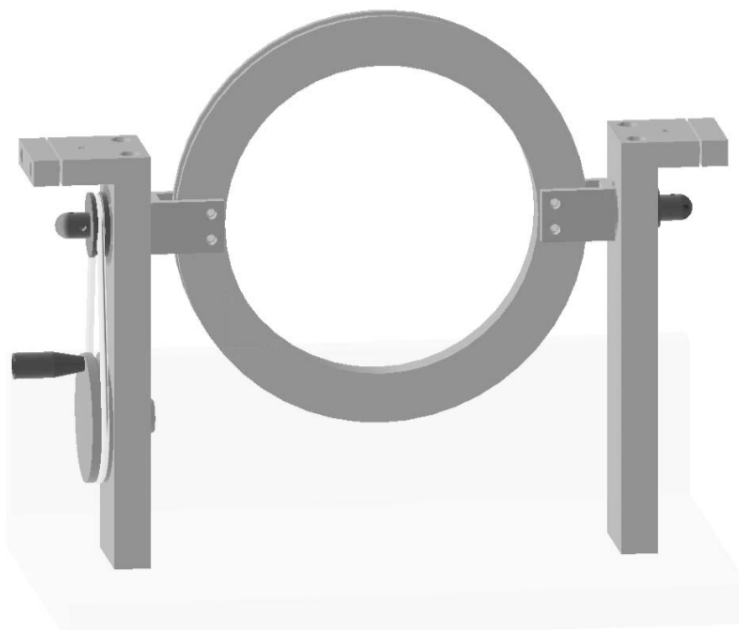


Figura 4.4: Struttura per la misura di \vec{B}_T .

zontale, avendo cura di eliminare per quanto possibile la presenza di elementi estemporanei che perturbino il campo magnetico locale, e si fa ruotare la bobina, la conseguente misura di \mathcal{E}_{max} permette di dedurre il valore di una componente di \vec{B}_l , in funzione dell'angolo fra l'asse orizzontale di rotazione della bobina e il piano verticale contenente \vec{B}_l stesso. Un modo per procedere oltre consiste nell'individuare l'orientazione dell'asse orizzontale di rotazione della bobina per cui il valore misurato di \mathcal{E}_{max} è nullo, o comunque minimo. Ciò garantisce che l'asse di rotazione della bobina sia in quel caso parallelo a un piano verticale contenente \vec{B}_l , ovvero all'asse N-S. Se si ruota quindi orizzontalmente di $\pi/2$ l'asse di rotazione rispetto all'orientazione che dá il minimo valore per \mathcal{E}_{max} (ponendolo quindi circa parallelo alla direzione O-E), e si ripete la misura, si otterrà il massimo valore possibile per \mathcal{E}_{max} , cui corrisponde il valore del modulo $|\vec{B}_l|$ del campo magnetico locale.

Per caratterizzare completamente \vec{B}_l bisogna però anche determinarne direzione e verso. Per il verso si può procedere badando a rilevare la polarità del segnale osservato sull'oscilloscopio all'inizio della rotazione: a seconda che sia positiva o negativa, noto il senso di rotazione della bobina, la legge di Lenz permette di dedurre univocamente il verso di \vec{B}_l .

Determinare la direzione di \vec{B}_l equivale a questo punto a determinarne l'inclinazione rispetto al suolo. Per farlo è sufficiente misurare la componente B_ϑ di \vec{B}_l parallela al suolo, ovvero ortogonale alla verticale del luogo. Ciò si attua ponendo la bobina di misura con l'asse di rotazione parallelo alla verticale del luogo e procedendo per la misura come descritto in precedenza. L'angolo α di inclinazione di \vec{B}_l rispetto al suolo sarà dunque espresso da

$$\cos \alpha = \frac{B_\vartheta}{|\vec{B}_l|} \quad (4.11)$$

Si è così completato lo studio di \vec{B}_l il cui modulo, si ricordi, dovrebbe essere dell'ordine di qualche decimo di Gauss, ovvero qualche unità per 10^{-5} T. Sulla base di quanto illustrato la misura di \vec{B}_l risulta concettualmente di facile attuazione, ma in pratica i bassi valori ottenibili per $\omega(t)$, anche con un cospicuo numero di spire per la bobina ($n \approx 100$), fanno sì che i valori della quantità \mathcal{E}_{max} misurata siano bassissimi (dell'ordine delle unità di mV), soprattutto se confrontati col "rumore elettrico" che tutto l'apparato inevitabilmente raccoglie.

Una prima cosa da fare è quella di schermare, fin dove possibile, i cavi che portano il segnale all'oscilloscopio. Ma la bobina non può essere schermata, e rappresenta d'altronde un'efficace antenna.

Si può dunque pensare di inserire nel circuito un apparato che filtri il segnale, eliminando le componenti di frequenza più alta, che hanno ampiezze confrontabili con quelle del segnale indotto che si vuole studiare, ed amplifichi infine di un fattore noto e costante il segnale d'interesse.

Si inserisce quindi nel circuito un elemento filtrante e amplificante di caratteristiche note; qui di seguito è riportato un possibile schema che sfrutta materiali e componenti facilmente reperibili in laboratorio. Dopo aver montato il circuito filtrante e amplificante e prima di utilizzarlo, bisogna naturalmente tararlo. Per farlo si sfruttano segnali in ingresso prodotti da un generatore con caratteristiche che simulino quelle dei segnali di interesse e di rumore che verranno prodotti e raccolti durante le misure di campo. Bisogna prestare attenzione a far sì che anche l'impedenza in ingresso al circuito amplificante durante la taratura sia la stessa che poi offrirà l'apparato con la bobina durante le misure.

Tale impedenza può essere ottenuta dalla conoscenza della resistenza offerta dalla bobina, compresi i contatti striscianti, e dal calcolo approssimato dell'induttanza e capacità della stessa, sulla base di quanto illustrato in precedenza (§ 2.8).

La risposta del circuito sarà quindi esplorata con segnali di frequenze prossime a quella di interesse (da pochi Hz sino a poche decine di Hz) e di ampiezze variabili da pochi mV sino a poche decine di mV, al fine di costruire le curve di risposta dell'amplificatore. Si verifichi anche l'effetto di taglio sulle frequenze più alte (si vedano i paragrafi 2.15.3, 2.15.4 e 2.10.5).

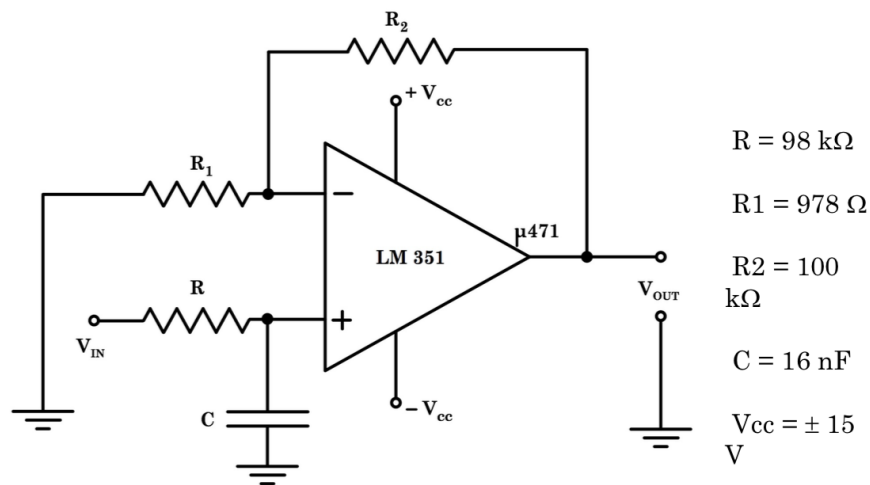


Figura 4.5: Amplificatore con filtro passa-basso.

Prima di procedere alle misure con il circuito amplificante inserito si tenti comunque qualche osservazione diretta, col segnale puro proveniente dalla bobina rotante, onde verificarne le caratteristiche rispetto al rumore.

È anche importante verificare se l'impedenza effettiva offerta da tutto l'insieme sia con buona approssimazione compatibile con la resistenza totale R del circuito, come assunto più sopra, onde testare il livello di validità di quanto affermato. In caso contrario bisognerebbe tenerne conto e discuterne le eventuali conseguenze.

Si ricordi ancora che il procedimento illustrato permette di misurare il campo magnetico locale \vec{B}_l che è la somma di \vec{B}_T con i contributi magnetici "locali".

4.4 Esperienza 11 __ Misura del campo magnetico locale tramite un Tubo di Braun

Aiutandosi con una bussola, si prenda un Tubo di Braun e mantenendone l'asse disposto orizzontalmente, ovvero ortogonale a \vec{g} , lo si orienti secondo la direzione N-S indicata dalla bussola. In tal modo l'asse del tubo giacerà sullo stesso piano verticale che contiene il vettore campo magnetico locale \vec{B}_l .

Acceso il tubo e focalizzato al meglio il fascio per un certo valore di tensione accelerante V_A , si modifichino i valori di quest'ultima e si osservino, prendendone nota, gli eventuali spostamenti del punto luminoso. Si cambi quindi l'alzo del Tubo di Braun in modo controllato, lasciando fissa la direzione N-S del piano su cui giace l'asse del Tubo di Braun stesso, e per ogni alzo si riesplori lo spostamento del punto luminoso al variare dei valori di V_A .

Si determini in tal modo l'alzo che minimizza lo spostamento della traccia luminosa a parità di V_A .

A questo punto si effettuino piccoli spostamenti angolari dell'asse del tubo rispetto all'asse N-S dato dalla bussola, sino a ridurre ancora, se possibile, l'entità degli spostamenti del punto luminoso in funzione di V_A .

Eventualmente si rifaccia ora una più fine esplorazione al variare dell'alzo. Questo procedimento iterato permette di individuare la direzione di \vec{B}_l come quella che se coincidente con l'asse del Tubo di Braun, fa sì che il punto luminoso non si sposti, indipendentemente dal variare di V_A dato che l'orientazione del tubo così raggiunta fa sì che la velocità \vec{v} di ogni elettrone del fascio e il campo magnetico locale \vec{B}_l siano paralleli.

Si discuta la precisione con cui questa tecnica permette la determinazione della direzione di \vec{B}_l .

Si posizioni quindi il Tubo di Braun in modo che il suo asse giaccia su un piano verticale, ortogonale a quello su cui giaceva precedentemente, che coincideva con quello di \vec{B}_l . Si abbia inoltre cura di fare in modo che il tutto resti sempre nella stessa zona di spazio, onde non rischiare di posizionarsi in concomitanza di un diverso valore di campo magnetico locale.

A questo punto si proceda alla rilevazione delle posizioni assunte dal punto luminoso sullo schermo per diversi valori di V_A , confrontandole con quella determinata quando asse del tubo e vettore \vec{B}_l avevano direzioni parallele.

Si ruoti quindi il Tubo di Braun di π radianti sul piano orizzontale (ciò equivale a ruotare il suo asse di π radianti relativamente alla sua precedente orientazione rispetto a \vec{B}_l , mantenendolo sempre ortogonale a \vec{B}_l e si verifichi che al variare di V_A si ottengono ora, per il punto luminoso, posizioni simmetriche rispetto a quelle occupate in precedenza, per uguali valori di V_A .

Si osservi altresì che tutti i punti luminosi devono giacere lungo la stessa

retta! Ciò garantisce la perpendicolarità fra asse del tubo, e quindi \vec{v} , e \vec{B}_l . Passiamo ora alla determinazione del modulo $|\vec{B}_l|$, sulla base della rilevazione dello scostamento d del punto luminoso sullo schermo, in funzione di V_A , dalla posizione assunta con asse del tubo parallelo a \vec{B}_l rispetto a quella con asse perpendicolare a \vec{B}_l .

Si faccia riferimento alla seguente figura 2.24, in cui l rappresenta la distanza tra foro d'uscita del fascetto di elettroni dal cannoncino elettronico e schermo, d lo si è già definito, r è il raggio della traiettoria circolare percorsa dagli elettroni del fascio sottoposti al campo magnetico \vec{B}_l , a è il segmento congiungente il foro d'uscita del fascetto di elettroni dal cannoncino elettronico con lo spot luminoso deviato sullo schermo dall'azione di \vec{B}_l , e ϑ è l'angolo limitato dai raggi della traiettoria circolare e sotteso all'arco di traiettoria che unisce i vertici del segmento a . Indicando, come nel paragrafo 2.2.1,

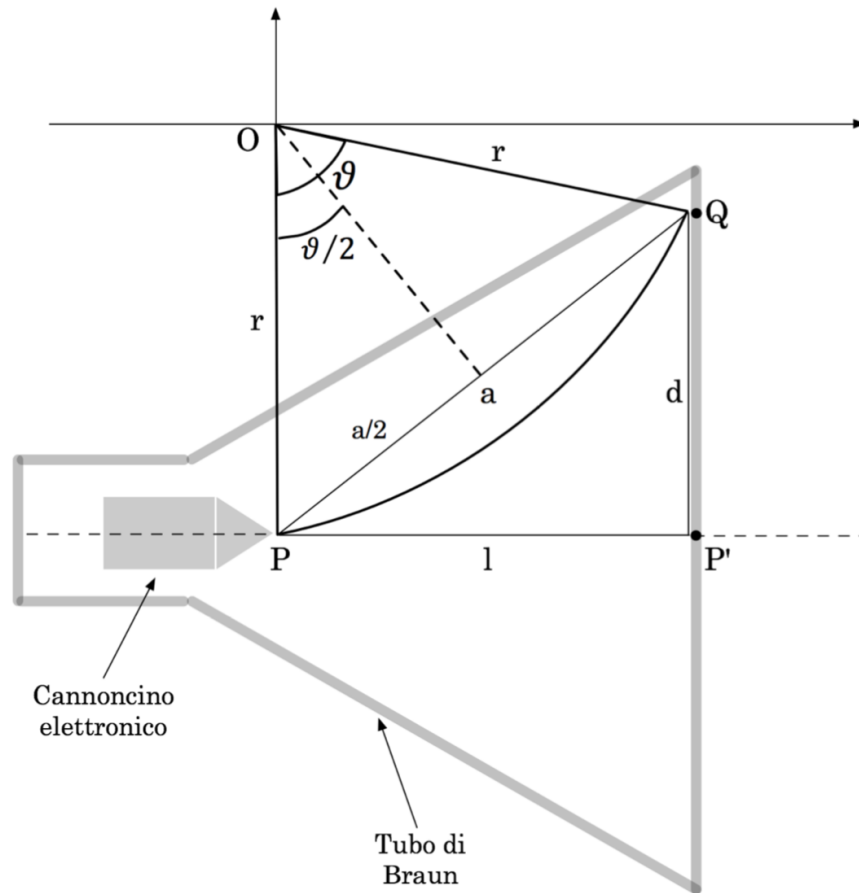


Figura 4.6: Misura di \vec{B} con tubo di Braun.

rispettivamente con e ed m_e la carica e la massa di ogni elettrone, e supponendo che il cannoncino elettronico del Tubo di Braun produca fasci molto

ben collimati, in cui è trascurabile la componente trasversa dell'impulso di ogni elettrone del fascio, dalla si deduce

$$v \simeq v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2eV_A}{m_e}}$$

Inoltre $l = r \cdot \text{sen}\vartheta$, da cui

$$\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{l}{r}\right) \quad ; \quad a = 2r \text{sen}\frac{\vartheta}{2} = 2r \left[\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{l}{r}\right) \right]$$

$$d = \sqrt{a^2 - l^2} = \sqrt{4r^2 \text{sen}^2 \left[\frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{l}{r}\right) \right] - l^2}$$

Per ottenere r si impone l'appartenenza del punto $Q(l, d-r)$ alla circonferenza centrata in O e tangente in P all'asse del Tubo di Braun, di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, se riferita ad un sistema cartesiano ortogonale con origine in O e asse delle ascisse parallelo all'asse del Tubo di Braun

$$l^2 + d^2 - 2rd = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{l^2 + d^2}{2d}$$

Uguagliando a questo punto la forza di Lorentz con la forza centripeta sentita da ogni elettrone lungo la propria traiettoria, si ottiene

$$evB_T = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad B_T = \left| \vec{B}_T \right| = \frac{m_e v}{e r} = \frac{d}{l^2 + d^2} \sqrt{\frac{8m_e V_A}{e}}$$

Tenendo poi conto dell'orientazione della velocità v degli elettroni e della regola del prodotto vettoriale, si può dedurre anche l'orientazione di \vec{B}_l .
Le quantità l , d e V_A , sono misurabili.

Si osservi che se l'asse del Tubo di Braun non è né parallelo né ortogonale al vettore \vec{B}_l , allora l'orbita percorsa dagli elettroni è elicoidale, con asse dell'elica ortogonale all'asse del tubo. Uguale effetto si ha se, pur essendo l'asse parallelo a \vec{B}_l , la velocità degli elettroni ha anche componenti non nulle ortogonali all'asse del tubo.

Per valutare l'entità dell'effetto ottenibile, ovvero il possibile valore di d , si considerino realisticamente un Tubo di Braun con $l = 15$ cm, una tensione accelerante $V_A = 300$ V e un'intensità pari a 5×10^{-5} Tesla per B_l ; in tal caso si otterrebbe un valore prossimo a 1 cm per d .

4.5 Effetto Hall e sonde Hall

L'effetto Hall è una diretta conseguenza della natura della corrente elettrica in un conduttore in presenza di un campo magnetico \vec{B} .

In tal caso i portatori di carica che concorrono alla corrente elettrica presente sentono su di sé l'effetto della forza di Lorentz.

In assenza di campi magnetici si può ragionevolmente supporre che il tragitto percorso da ogni portatore di carica che contribuisce alla corrente sia sostanzialmente rettilineo, fra un urto ed il successivo con le impurezze presenti nel conduttore. In presenza del campo magnetico tale tragitto risulta incurvato per effetto della forza di Lorentz e ciò conduce a una distribuzione non più omogenea dei portatori di carica che concorrono alla corrente entro il conduttore.

Si tratta qui il fenomeno nel caso, semplice, di un conduttore omogeneo e isotropo, a temperatura costante, di forma parallelepipedica regolare, di larghezza D , spessore S , e lunghezza L , supponendo che i portatori di carica presenti siano esclusivamente elettroni. Si supponga che nel conduttore

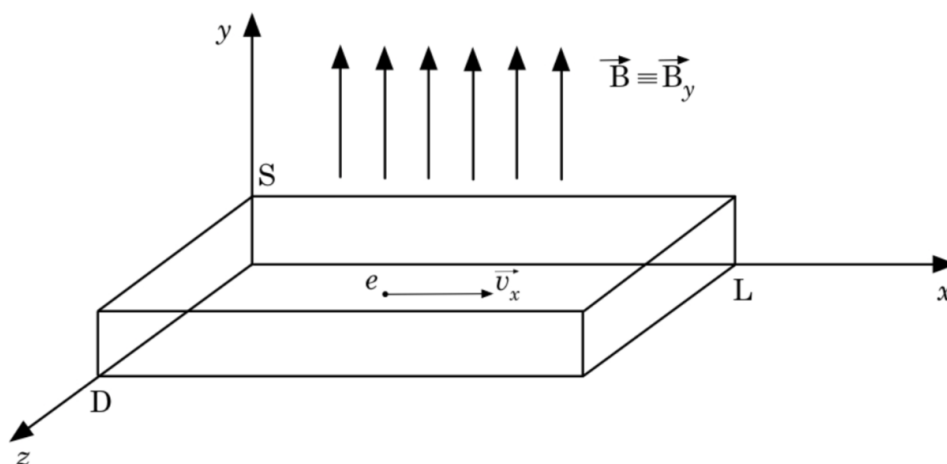


Figura 4.7: Configurazione per la verifica dell'effetto Hall.

fluisca una corrente

$$I_x = nDS(-v_x)(-e) \quad (4.12)$$

dove n è la densità dei portatori di carica, v_x è il modulo della loro velocità di deriva lungo la direzione x , $-e$ la loro carica elettrica. Si supponga inoltre che sia presente un campo magnetico omogeneo e costante $\vec{B} \equiv \vec{B}_y$ come in figura 4.7.

Dato il segno negativo della carica elettronica, ciò porterà gli elettroni di conduzione, che fluiscono nel conduttore con velocità di deriva \vec{v}_x , ad addensarsi verso la parete del conduttore adiacente al piano $(x; y)$. Questo effetto determinerà parimenti un impoverimento della presenza di elettroni

di conduzione in corrispondenza della parete opposta, alla coordinata $z \equiv D$. Ovviamente, data la conservazione della carica e supponendo che nessuna carica di conduzione possa sfuggire o entrare nel conduttore dalle pareti parallele al piano $(x; y)$, questa redistribuzione spaziale delle cariche di conduzione determinerà l'insorgere, entro il conduttore, di un campo elettrico $-\vec{E}_z$ che tenderà ad opporsi all'ulteriore aumento di concentrazione di cariche di conduzione nel modo descritto. È ragionevole che la situazione evolva verso l'equilibrio in funzione di I_x , \vec{B}_y ed \vec{E}_z . Ciò significa che all'equilibrio la forza totale su ogni portatore di carica che concorre alla corrente I_x , che coincide con la forza di Lorentz, dovrà essere nulla

$$0 = e\vec{E}_z - e\vec{v}_x \times \vec{B}_y \quad \Rightarrow \quad E_z = v_x B_y \quad (4.13)$$

Ma supponendo una condizione di buona geometria, per la distribuzione delle cariche di conduzione presso le pareti del conduttore parallele al piano $(x; y)$, si ha

$$E_z = \frac{V_H}{D} \quad (4.14)$$

dove V_H è detta *tensione di Hall*.

Quindi

$$V_H = v_x B_y D \quad (4.15)$$

Ricordando ora l'espressione per I_x , si ha che $v_x = I_x/nDSe$, da cui

$$V_H = \frac{I_x B_y}{n S e} \quad (4.16)$$

Misurando quindi sia I_x che V_H e conoscendo B_y , S ed e , si può dedurre n , ovvero la densità dei portatori di carica nel materiale del conduttore utilizzato.

Viceversa, misurando sia I_x che V_H e conoscendo n , S ed e , si può dedurre B_y , ovvero l'intensità del campo magnetico in cui è immerso il conduttore. Ovviamente, nella pratica, l'efficacia di queste misure e le loro precisione e accuratezza, dipendono da quanto bene sono rispettate le condizioni di geometria, omogeneità e struttura dei materiali, oltrechè stabilità termica, presupposte nel modello teorico.

Soprattutto, nel caso di misure di campo magnetico mediante sonde Hall, bisogna garantire il rispetto migliore possibile delle condizioni di ortogonalità fra \vec{B}_y e il piano $(x; y)$ del conduttore. In caso contrario si rischia di introdurre un errore sistematico che sottostima il valore di $|\vec{B}_y|$ in funzione del coseno dell'angolo fra \vec{B}_y stesso e la normale alla superficie $(L; D)$ del conduttore.

Si tenga inoltre presente che la misura di V_H implica l'utilizzo di un voltmetro che se basato su un microamperometro abbinato ad una resistenza tarata, anche se il valore di quest'ultima è grande rispetto alla resistenza fra

le due facce parallele al piano $(x; y)$ del conduttore analizzato, comunque preleva una certa quantità di corrente determinando un'azione sistematica sia su I_x che su V_H ; ovviamente l'entità di tale azione può essere stimata e dipendendo dal rapporto fra le resistenze del voltmetro e del conduttore analizzato, può essere resa piccola quanto serve.

Detto $x = V/L$ il campo elettrico longitudinale fra gli estremi del conduttore lungo la direzione di percorrenza della corrente, e ricordando le definizioni di angolo di Hall ϑ_H , e di mobilità μ dei portatori di carica, si ha anche

$$\mu = \frac{|\operatorname{tg} \vartheta_H|}{B} = \left| \frac{E_z}{E_x} \right| \frac{1}{B} = \frac{L}{D} \left| \frac{V_H}{V} \right| \frac{1}{B} \quad (4.17)$$

V può essere direttamente misurata con un voltmetro o dedotta dalla corrente, nota la resistenza del conduttore, tramite la legge di Ohm. L'effetto Hall ora descritto interessa ovviamente qualunque tipo di conduttore immerso in un campo magnetico, e nel caso di semiconduttori bisogna tener presente che i portatori di carica presenti sono di due tipi, elettroni e lacune. Non si analizza qui il caso specifico ma si segnala comunque che nel caso si voglia utilizzare l'effetto Hall per la misura dell'intensità di campi magnetici, sono più indicati i materiali semiconduttori, quali sonde.

Bisogna ovviamente far sempre attenzione all'orientazione con cui la sonda è inserita nel campo magnetico da misurare, per poter poi dedurre l'entità di quest'ultimo dalla rilevazione della tensione di Hall corrispondentemente generata nella sonda. È naturale che l'orientazione vada scelta, entro il volume di spazio in cui si effettua la misura, come quella che massimizza, a parità di altri fattori, l'entità del valore assoluto della tensione misurata. Il segno della tensione darà informazione sul verso del campo magnetico.

La mappatura di campi magnetici statici può essere agevolmente effettuata tramite opportune sonde Hall. A seconda dei modelli, per risalire ai valori di campo misurati, può essere necessario utilizzare dei fattori di conversione per cui moltiplicare i valori di tensione rilevati. Si faccia sempre riferimento alle caratteristiche specifiche di ogni sonda utilizzata, e al rispetto delle prescrizioni di utilizzo indicate.

È naturalmente importante, per poter mappare opportunamente un campo magnetico in una certa zona di spazio, disporre di un sistema che permetta il posizionamento controllato e ripetibile della sonda utilizzata, secondo tre coordinate ortogonali.

Un modo per controllare la taratura di una sonda può essere quello di misurare il campo all'interno di un solenoide cilindrico, di lunghezza abbastanza superiore al diametro, quando è percorso da una corrente di intensità nota, assumendo di conoscere la permeabilità magnetica associata e tenendo conto del contributo del campo magnetico ambientale.

Un buon esercizio può essere quello di mappare il campo esternamente a una bobina cilindrica, o nella zona compresa fra due bobine identiche in

configurazione di Helmholtz, e confrontare poi il risultato con quanto atteso in base alla teoria.

4.6 Fenomeni magnetici nella materia

Materiali diversi immersi in un campo magnetico reagiscono in modo diverso; si conviene quindi di classificarli, sulla base del loro comportamento e della loro struttura, nel modo seguente:

- *materiali diamagnetici*, sono materiali che presentano un momento di dipolo magnetico indotto da un campo esterno; il momento di dipolo è opposto al campo che lo produce (il diamagnetismo è un effetto puramente quantistico, anche se da un punto di vista classico lo si può vedere come una manifestazione della legge di Lenz). I materiali diamagnetici vengono respinti dalle regioni dove il campo magnetico è più intenso;
- *materiali paramagnetici*, molti materiali possiedono un momento magnetico permanente, ma normalmente non mostrano caratteristiche magnetiche perchè a causa dell'agitazione termica, tutti i dipoli magnetici sono mutuamente disallineati e il valore medio è nullo. In presenza di un campo magnetico esterno i dipoli hanno la tendenza ad allinearsi opposti ad esso e il materiale mostra deboli caratteristiche magnetiche, risultando attratto da regioni dove il campo magnetico è più intenso;
- *materiali ferromagnetici*, nei materiali ferromagnetici è presente un momento di dipolo magnetico permanente, come nel caso dei materiali paramagnetici, ma in questo caso i dipoli interagiscono fortemente tra loro e hanno una elevata tendenza ad allinearsi mutuamente anche in presenza di campi esterni deboli;
- *materiali ferrimagnetici*, nei materiali ferrimagnetici c'è una forte interazione tra dipoli magnetici del materiale: i dipoli sono di almeno due tipi e tendono a disporsi in modo alterno, il risultato è quindi che questi materiali assomigliano ai materiali ferromagnetici e il momento di dipolo totale è dato dalla somma algebrica dei momenti di dipolo delle diverse specie;
- *materiali antiferromagnetici*, si tratta di un caso estremo di materiali ferrimagnetici, in cui i dipoli in una direzione compensano esattamente quelli nell'altra direzione, con il risultato che il materiale non ha una magnetizzazione totale apprezzabile, anche se sono presenti altri fenomeni legati al magnetismo.

Le caratteristiche magnetiche dei materiali dipendono dalla temperatura, in alcuni casi anche molto fortemente.

Vale infatti la cosiddetta legge di Curie-Weiss che permette di esprimere il

grado di polarizzazione magnetica di un materiale sottoposto ad un campo magnetico esterno, tramite la suscettività magnetica χ_m

$$\chi_m = \frac{M}{H} \simeq \frac{C \rho}{T - T_C} \quad (4.18)$$

dove H è il modulo del campo magnetico esterno, M il modulo della magnetizzazione del materiale conseguente ad H , ρ è la densità del materiale, C è detta costante di Curie e T_C è detta temperatura critica o temperatura di Curie.

Si riportano in tabella i valori di T_C per alcuni materiali ferromagnetici.

Materiale	T_C
Cobalto	1400 K
Nichel	630 K
Ferro	1040 K

La presenza di un valore critico per la temperatura evidenzia la presenza di una transizione fra due diverse fasi in un materiale, per quanto concerne le sue caratteristiche magnetiche in funzione della temperatura stessa. In effetti la magnetizzazione media è nulla al di sopra di T_C , mentre non lo è al di sotto di T_C .

4.6.1 Trasformatori

Il trasformatore è uno strumento elettrico di uso molto comune. Esso è costituito da due bobine isolate elettricamente ma montate in modo che il flusso di campo magnetico di una di esse si concateni efficacemente con le spire dell'altra. Variando la corrente in una delle bobine si ottiene una corrispondente f.e.m. indotta ai capi dell'altra bobina. È facile analizzare il caso di un trasformatore costituito da due solenoidi ideali avvolti uno sull'altro come in figura 4.8.

Se un solenoide cilindrico regolare ha n spire per unità di lunghezza ed I è la corrente che lo percorre, allora il campo magnetico dentro il solenoide è longitudinale, parallelo all'asse del solenoide e vale

$$B = \mu n I \quad (4.19)$$

con $\mu = \mu_0 \mu_r$ e μ_r rispettivamente, permeabilità magnetica e permeabilità magnetica relativa del materiale che riempie il volume entro il solenoide, e μ_0 permeabilità magnetica del vuoto.

Partendo da una corrente del tipo $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, si ha per la tensione V autoindotta ai capi del solenoide

$$V = -nl \frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \mu n^2 l \frac{dI}{dt} = \pi r^2 \mu n^2 l \omega I_0 \sin(\omega t) \quad (4.20)$$

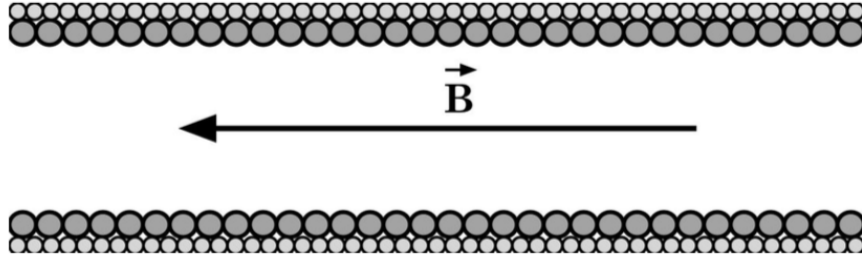


Figura 4.8: Sezione longitudinale di due solenoidi avvolti uno sull'altro, costituiti da filo di diverso diametro.

dove r è il raggio del solenoide, l la sua lunghezza e quindi $N = nl$ è il numero totale di spire. Se ci sono quindi due solenoidi come in figura 4.8, rispettivamente con n_1 ed n_2 spire per unità di lunghezza, la differenza di potenziale autoindotta ai capi del primo solenoide vale

$$V_1 = -n_1 l_1 \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \mu n_1^2 l_1 \omega I_0 \sin(\omega t) \quad (4.21)$$

mentre la differenza di potenziale indotta ai capi del secondo solenoide vale

$$V_2 = -n_2 l_2 \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \mu n_1 n_2 l_2 \omega I_0 \sin(\omega t) \quad (4.22)$$

da cui si ottiene la nota relazione

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1 l_1}{n_2 l_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.23)$$

dove $N_i (i = 1, 2, \dots)$ indica il numero totale di spire di ciascun solenoide. Il tipo di trasformatore descritto non è però quello più comune: spesso le spire sono avvolte su un supporto di materiale ferromagnetico, detto nucleo del trasformatore, che possiede una permeabilità magnetica $\mu \gg \mu_0$, dipendente oltretutto dal campo magnetico prodotto dalla corrente che scorre nella bobina, come si vedrà più oltre.

In questo caso

$$B = \mu n I = \mu_0 \mu_r n I \quad (4.24)$$

Se quindi si suppone che \vec{B} dipenda linearmente dal campo \vec{H} e dalla magnetizzazione \vec{M} , ovvero

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (4.25)$$

si ha

$$\begin{aligned} \mu_r &= (1 + \chi_m) \quad , \quad H = n I \\ B &= \mu_0 (1 + \chi_m) n I = \mu_0 \left(1 + \frac{C \rho}{T - T_C} \right) n I \end{aligned} \quad (4.26)$$

per cui la tensione V_2 all'uscita del trasformatore con un nucleo di materiale ferromagnetico, in corrente alternata è approssimativamente data da

$$V_2 = \pi r^2 \mu_0 \left(1 + \frac{C \rho}{T - T_C} \right) n_1 n_2 l_2 \omega I_0 \sin(\omega t) \quad \text{per } T < T_C \quad (4.27)$$

La tensione in uscita dal trasformatore presenta quindi un massimo in corrispondenza alla temperatura critica.

4.6.2 Ciclo di isteresi del nucleo di un trasformatore

4.7 Circuito raddrizzatore/rettificatore

In questo paragrafo analizzeremo una particolare configurazione di circuito raddrizzatore e rettificatore, tipicamente utilizzato nei dispositivi di alimentazione in corrente continua, a partire da correnti alternate.

Definiamo intanto con precisione cosa si intenda per *circuito raddrizzatore* e per *circuito rettificatore*.

Un circuito raddrizzatore ideale sostanzialmente accetta in ingresso un segnale di corrente $I(t)$ e restituisce $|I(t)|$, ovvero il valore assoluto del segnale in ingresso. Dato il legame fra $I(t)$ e $V(t)$ determinato dalla legge di Ohm, ciò significa che lo stesso circuito agisce anche sulla tensione in ingresso $V(t)$, restituendo $|V(t)|$.

Un circuito rettificatore è invece un circuito che in linea di principio, accetta in ingresso una corrente $I(t)$, ovvero una tensione $V(t)$, e restituisce idealmente una corrente $\alpha\langle I(t) \rangle$, ovvero una tensione $\beta\langle V(t) \rangle$, dove α e β sono due coefficienti minori dell'unità e $\langle \rangle$ rappresenta il valor medio di quanto in esso contenuto.

Se quindi si immagina di far percorrere ad un generico segnale $I(t)$ prima un circuito raddrizzatore, quindi uno rettificatore, si otterrà come risultato una corrente $I_{eff} = \langle |I(t)| \rangle$, costante nel tempo. Lo stesso vale ovviamente per $V(t)$.

L'utilità di un tale dispositivo è enorme e si sono trovate molte soluzioni possibili.

Il problema della rettificazione può essere affrontato utilizzando diodi a vuoto (valvole termoioniche), celle elettrochimiche, dispositivi al mercurio e ignitron (quando è richiesta grande potenza), sistemi accoppiati "ossido di rame-selenio", diodi a galena, diodi a semiconduttore, attualmente quelli usati in modo prevalente. La caratteristica comune a tutti questi dispositivi è di permettere, o favorire, il passaggio di corrente elettrica se polarizzati in una direzione, e di inibirlo se polarizzati invece nella direzione opposta.

Si studierà ora il problema più specifico di realizzare in pratica un circuito raddrizzatore/rettificatore mediante diodi a semiconduttore, sviluppando un modello descrittivo approssimato del suo funzionamento sulla base di una trattazione ideale al prim'ordine dei suoi elementi circuitali.

A questo proposito si esemplifica il diodo a semiconduttore con un elemento circuitale la cui curva caratteristica è costituita da una semiretta giacente sull'asse delle ascisse, per valori di tensione di polarizzazione minori di un certo valore positivo V_s , e con una semiretta partente dal punto a corrente nulla e tensione V_s , con pendenza positiva a che rappresenta l'inverso di una sorta di resistenza interna efficace del diodo, per valori di tensione di polarizzazione maggiori o uguali a V_s , come illustrato in figura [4.9](#). Il comportamento reale di tale circuito risente peraltro delle caratteristiche effettive dei suoi componenti per cui si introducono dei parametri che per-

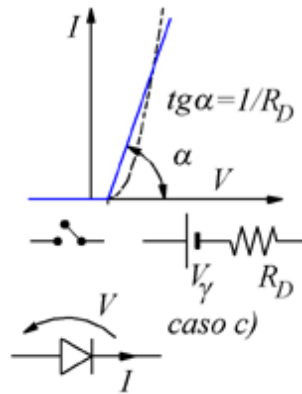


Figura 4.9:

mettano di valutare la reale efficacia e resa del circuito raddrizzatore. Si supponga di avere un segnale in ingresso $V_{in} = V_0 \cos(\omega t)$, di periodo T , e fargli percorrere un ramo di circuito con un diodo caratterizzato da $V_s = 0$: questo dispositivo ideale dà in uscita, dopo il diodo, un segnale V_{out} a valor medio non nullo, mentre è la tensione in ingresso che ha valor medio nullo (figura 4.9)

$$\langle V_{in} \rangle = V_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) dt = 0 \quad (4.28)$$

$$\langle V_{out} \rangle = \begin{cases} \beta V_0 \cos(\omega t) \rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq (\omega t) \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0 \rightarrow \text{altrove} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\langle V_{out} \rangle = \beta V_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega t') dt' = \frac{\beta}{\pi} V_0 \quad (4.30)$$

Il valor medio $\langle V_{out} \rangle$ del segnale di tensione in uscita è pari al 30% circa della tensione in entrata V_{in} . Il dispositivo ideale illustrato non è quindi molto efficace. Si può fare di meglio recuperando, anziché "sprecando", la parte di segnale relativa ai lobi a polarità negativa del segnale in ingresso. Un modo per farlo è di utilizzare la configurazione circuitale cosiddetta a ponte di diodi illustrata in figura 4.10.

Qualunque sia il verso della corrente in ingresso essa percorre la resistenza di carico R sempre nel medesimo verso, dunque la tensione V_{out} è direttamente proporzionale al modulo della tensione in ingresso (figura 4.11)

$$V_{out} \propto |V_{in}| \quad (4.31)$$

Si ha inoltre: $\langle V_{out} \rangle = 2\beta' V_0 / \pi$, ovvero circa il doppio di quanto fornito dal dispositivo raddrizzatore ad un solo diodo. A rigori $\beta > \beta'$, a parità di elementi circuitali, in quanto la configurazione a ponte determina una perdita ohmica maggiore rispetto a quella ad un solo diodo.

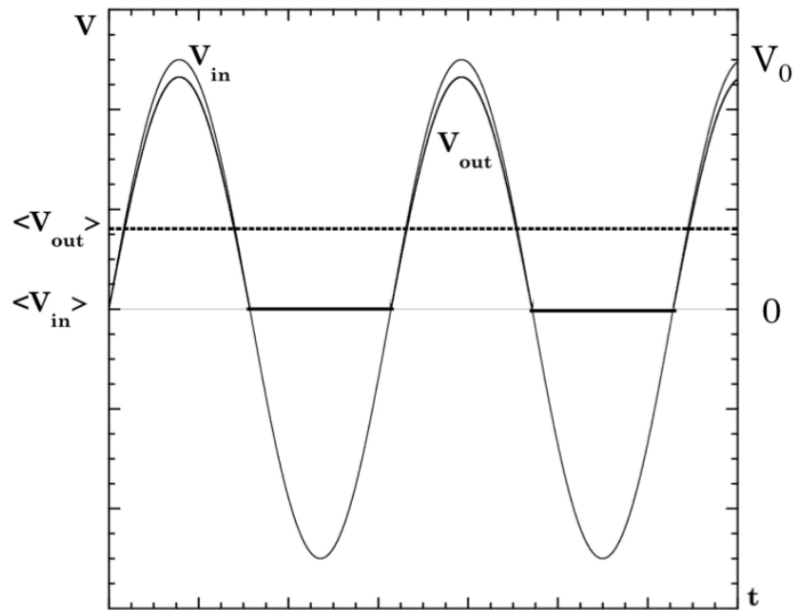


Figura 4.10:

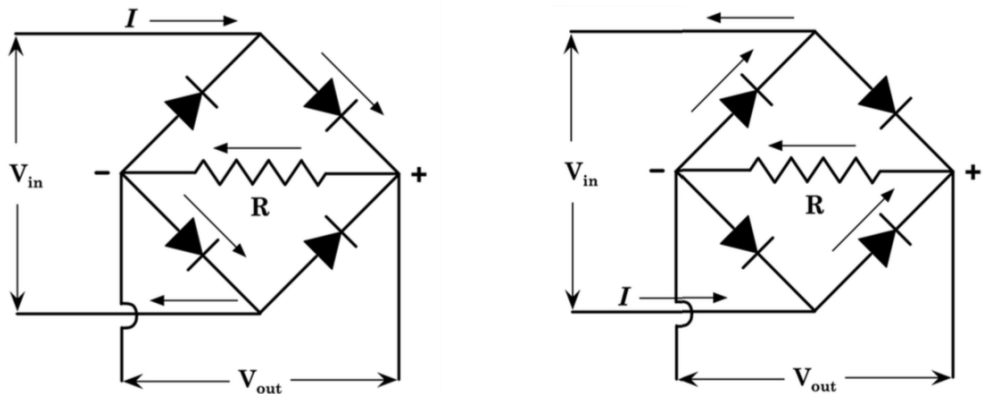


Figura 4.11: Percorsi della corrente nel raddrizzatore in configurazione a ponte.

Non si dispone però ancora di una corrente continua, che è effettivamente il risultato cercato. Per conseguire tale scopo si cominci col ricordare che un condensatore è un dispositivo in grado di accumulare carica e di riceverla, in funzione della differenza di potenziale ai capi del circuito in cui è inserito. Il tempo di accumulo e cessione della carica è poi funzione anche della resistenza che il circuito presenta e può infatti essere misurato in unità caratteristiche di prodotto $R \cdot C = \tau$.

Come visto dalla (2.38), la scarica di un condensatore ideale dipende dal

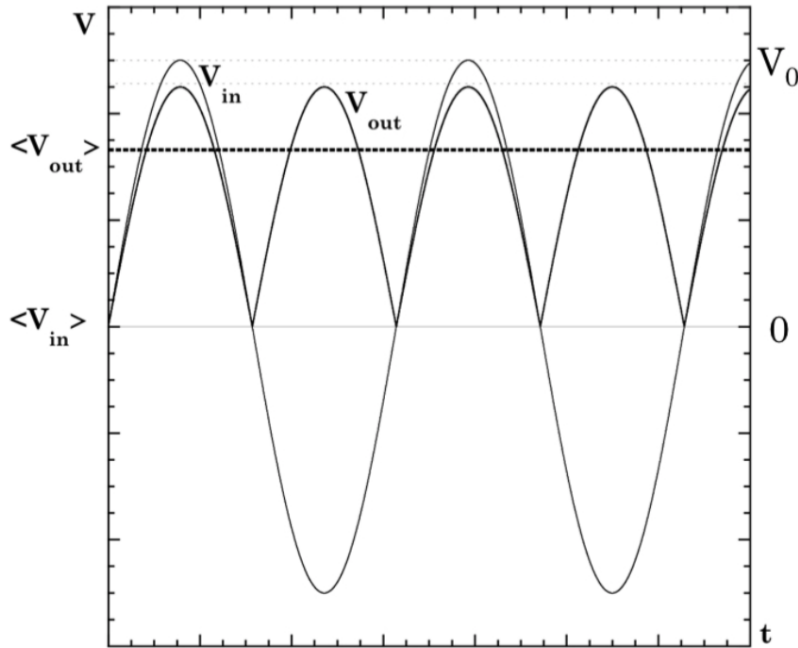


Figura 4.12:

tempo in funzione esponenziale secondo la: $e^{-t/RC} = e^{-t/\tau}$. Sviluppando in serie

$$e^{-t/\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t/\tau)^n}{n!} = 1 - \frac{t}{\tau} + O\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right] \quad (4.32)$$

si osserva che per tempi $t \ll \tau$ la tensione ai capi del condensatore si mantiene costante in approssimazione zero ed è descritta dall'andamento di una retta con pendenza $-t/\tau$ in prima approssimazione.

Se quindi si pone un condensatore in parallelo al carico R tale che $RC = \tau$ sia molto maggiore del semiperiodo $T/2$ di pulsazione della tensione in ingresso V_{in} , la tensione in uscita, ai capi del carico R tende a venir mantenuta costante dalla carica accumulata sul condensatore che vi rifluisce non appena la tensione erogata dal generatore ridiscende al di sotto del valore che era stato raggiunto ai capi del condensatore. Ciò varrà ovviamente finché l'intervallo temporale fra due massimi consecutivi di V_{in} è confrontabile con l'intervallo temporale per cui continua ad aver senso l'approssimazione della funzione di scarica del condensatore con un valore costante o con una retta di pendenza $-t/\tau$. Dovrà quindi valere:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \ll \tau = RC \quad (4.33)$$

Si vedrà nel corso della prossima esperienza come sfruttare questo fatto allo

scopo di ottenere in pratica un circuito raddrizzatore-rettificatore funzionante.

4.8 Esperienza 12: Circuito raddrizzatore/rettificatore con ponte a diodi di Graetz

Si veda ora uno specifico caso concreto. Si consideri come sorgente di V_{in} la normale tensione di rete che in Europa occidentale ha come parametri caratteristici:

$$V_{eff} = 220 \text{ V (si veda § per le definizioni di valori efficaci)}$$

$$V_{max} = V_{eff} \sqrt{2} \simeq 310 \text{ V}$$

$$V_{in}(t) = V_{max} \cos(\omega t)$$

$$\nu = 50 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot \nu = 100 \pi$$

$$T = 2\pi/\omega = 1/\nu = 0.02 \text{ s}$$

Ci si propone di realizzare un raddrizzatore/rettificatore con configurazione a ponte di diodi, ottimizzarne il funzionamento e caratterizzarlo in base a parametri oggettivi.

— Materiale occorrente

- Trasformatore di tensione
- Diodi 1N4001
- Resistenze (da 100 Ω fino a 1 M Ω , tolleranza 5%)
- Bread-board
- Oscilloscopio
- Condensatori elettrolitici (da 0.33 μF fino a 1 mF, tolleranza 20%)

— Descrizione ed esecuzione dell'esperienza

La rilevazione dei segnali verrà, come al solito, effettuata tramite un oscilloscopio posto in parallelo al carico resistivo R . Si ponga attenzione ad evitare che oscilloscopio e sorgente di $V_{in}(t)$ abbiano la massa in comune, il che costituirebbe un corto-circuito e sostanzialmente ridurrebbe l'effetto del circuito a ponte di diodi a quello con un singolo diodo. A tale scopo e anche per ridurre la tensione massima rispetto ai valori forniti dalla rete di distribuzione, si utilizza un trasformatore di tensione che oltre a disaccoppiare le masse, riduce la tensione a valori inferiori ai 20 V, anche per motivi di sicurezza.

Siano (αV_{eff}) e (αV_{max}) i parametri che caratterizzano la tensione in uscita dal trasformatore, dove α è il rapporto tra il numero di spire della bobina

d'uscita e quello della bobina d'ingresso del trasformatore.

Per la scelta del condensatore da utilizzare si ricorre alla disequazione introdotta precedentemente e caratterizzante il dispositivo, ricordando che nel presente caso $\omega = 100 \pi$:

$$\frac{\pi}{\omega} = 0.01 \ll (RC) \quad \Rightarrow \quad C \gg \frac{0.01}{R}$$

Supponendo di voler utilizzare il dispositivo raddrizzatore/rettificatore con resistenze di carico dell'ordine di $R = 100 \Omega$, o maggiori, si sceglie ad esempio

$$C = 1 \text{ mF} = 0.001 \text{ F}$$

Siccome per quanto visto precedentemente, la corrente attraverserà la resistenza di carico R in parallelo al condensatore sempre nello stesso verso, si può scegliere di utilizzare un condensatore elettrolitico. Si tenga sempre

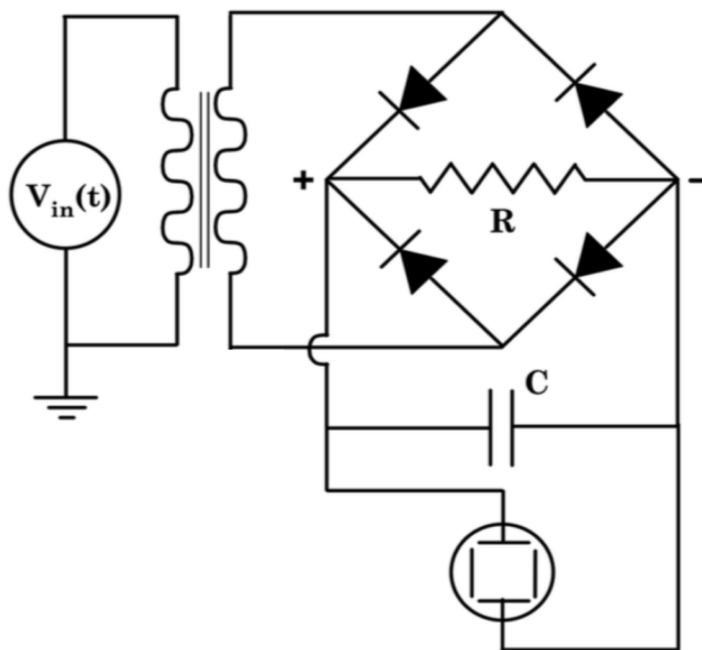


Figura 4.13: Schema del circuito raddrizzatore-rettificatore a ponte di Graetz.

presente il valore massimo di potenza assorbibile dal carico R in condizioni di sicurezza.

Supposto di scegliere proprio il valore $R = 100 \Omega$, si può pensare di trascurare, in prima istanza, l'entità delle resistenze in serie di cavi e contatti, e considerare come praticamente "infinito" il valore della resistenza in parallelo al carico R e dovuta all'oscilloscopio.

Non sono invece trascurabili le resistenze dei diodi 1N4001 utilizzati, quando

sono polarizzati direttamente e per tensioni inferiori a valori che a temperatura ambiente, sono pari o inferiori a ≈ 800 mV, ovvero in zone della curva caratteristica del diodo che precedono il ginocchio e la successiva salita esponenziale verso alte correnti.

Nelle considerazioni che seguono si considerano invece in buona approssimazione "infinite" le resistenze dei diodi polarizzati inversamente.

Prima di proseguire si misurino, in polarizzazione diretta, le curve caratteristiche I/V dei quattro diodi utilizzati, in condizioni di temperatura di operatività per il circuito raddrizzatore-rettificatore finale. Ciò permette anche di apprezzare i valori delle resistenze di cui sopra.

Si consideri ora il circuito a meno del condensatore; in questo caso la corrente attraversa in serie i due diodi polarizzati direttamente e la resistenza di carico. Note la tensione V_{in} , la caduta di potenziale ΔV_c ai capi del cari-

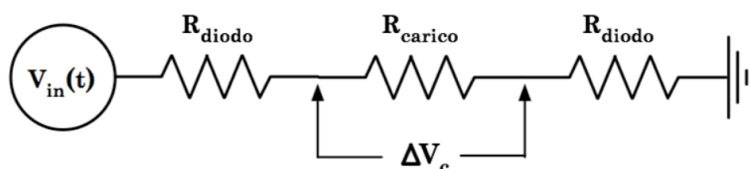


Figura 4.14:

co R_c e il valore di quest'ultimo (solo per semplicità nel seguito si omette il termine α , restando inteso che i risultati ottenuti andranno opportunamente riscalati per esso), si può misurare, in funzione di R_c , la resistenza R_{d_tot} dei due diodi in serie, polarizzati direttamente, che se i diodi sono perfettamente equivalenti coincide con $2R_d$. Si noti però che R_d non è costante e assume valori rilevanti soltanto per tensioni inferiori a quelle corrispondenti al ginocchio della curva caratteristica del diodo, mentre è tipicamente trascurabile rispetto ai valori della resistenza di carico, per tensioni superiori. Si ricordi che $V_{in}(t) = V_{max} |\cos(\omega t)|$, con V_{max} mantenuto costante dalla Centrale Elettrica.

Tramite l'oscilloscopio si può misurare $\Delta V_c(t)$ e considerarne il valore di picco ΔV_{max_c} .

La corrente che attraversa il circuito è

$$i(t) = \frac{V_{in}(t)}{R_c + 2R_d} \quad , \quad \text{con valore di picco pari a: } i_{max} = \frac{V_{max}}{R_c + 2R_d} \quad (4.34)$$

Quindi

$$\Delta V_{max_c} = \frac{V_{max}}{R_c + 2R_d} R_c \quad , \quad \text{da cui: } R_d = R_c \frac{1}{2} \left(\frac{V_{max}}{\Delta V_{max_c}} - 1 \right) \quad (4.35)$$

Analizzando ora cosa succede in fase di scarica del condensatore, ci si accorge che l'effetto è quello che si avrebbe se un generatore di tensione fosse collegato in serie ad R_c e alla resistenza R_d di un diodo polarizzato direttamente.

In base alle ipotesi precedenti si può considerare con buona approssimazione

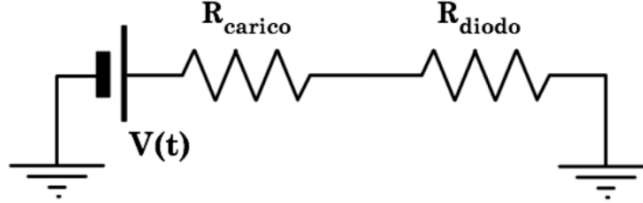


Figura 4.15:

$V(t) = \text{cost.}$ In modo analogo a quanto fatto per la fase di carica si ottiene

$$R_d = R_c \left(\frac{\Delta V_{\text{condens.}}}{\Delta V_c} - 1 \right) \quad (4.36)$$

dove non compare più il termine $1/2$ in quanto si ha un solo diodo in serie. Il rapporto così misurato fra resistenze dei diodi e carico esterno potrà suggerire se e in quale misura si possa trascurare la resistenza interna dei diodi nel valutare il tempo caratteristico τ di scarica del condensatore

$$\tau = (R_c + R_d) \cdot C \quad (4.37)$$

Conoscendo τ si può valutare, nell'approssimazione lineare fatta, l'entità della variazione residua $\Delta V_{rip} = (\Delta V_{\text{mac}_c} - \Delta V_{\text{min}_c})$ di tensione ai capi del carico R_c , detta *tensione di ripple*, nell'intervallo di tempo durante il quale si vuole compensare con il condensatore la diminuzione di corrente in uscita dal generatore.

Ovviamente, dato un carico R_c , il circuito raddrizzatore/rettificatore sarà tanto migliore quanto minore sarà ΔV_{rip} .

In figura 4.15 è illustrato quanto sinora descritto; si osservi l'importanza del fatto che in fase di carica del condensatore la corrente che lo raggiunge vede efficacemente soltanto la resistenza dei cavi e di un singolo diodo, mentre quando il condensatore, dopo il superamento della tensione massima da parte del segnale principale, inizia a scaricarsi, la corrente che fluisce da esso percorre una resistenza totale maggiorata, rispetto alla precedente, del contributo del carico R_c .

Per studiare le caratteristiche del circuito raddrizzatore/rettificatore descritto si possono introdurre alcuni parametri adimensionali correlati con le quantità introdotte e quindi analizzarne l'andamento. Una possibile scelta è ad esempio quella di considerare il rapporto

$$r = \frac{\text{rms}[\Delta V_{rip}]}{\Delta V_{\text{medio}}}, \text{ con: } \Delta V_{\text{medio}} \simeq \frac{(\Delta V_{\text{max}_c} + \Delta V_{\text{min}_c})}{2} \quad (4.38)$$

detto fattore di ripple, con ΔV_{max_c} e ΔV_{min_c} valori massimo e minimo di tensione ai capi del carico durante ogni ciclo di $V_{in}(t)$. L'ottimizzazione

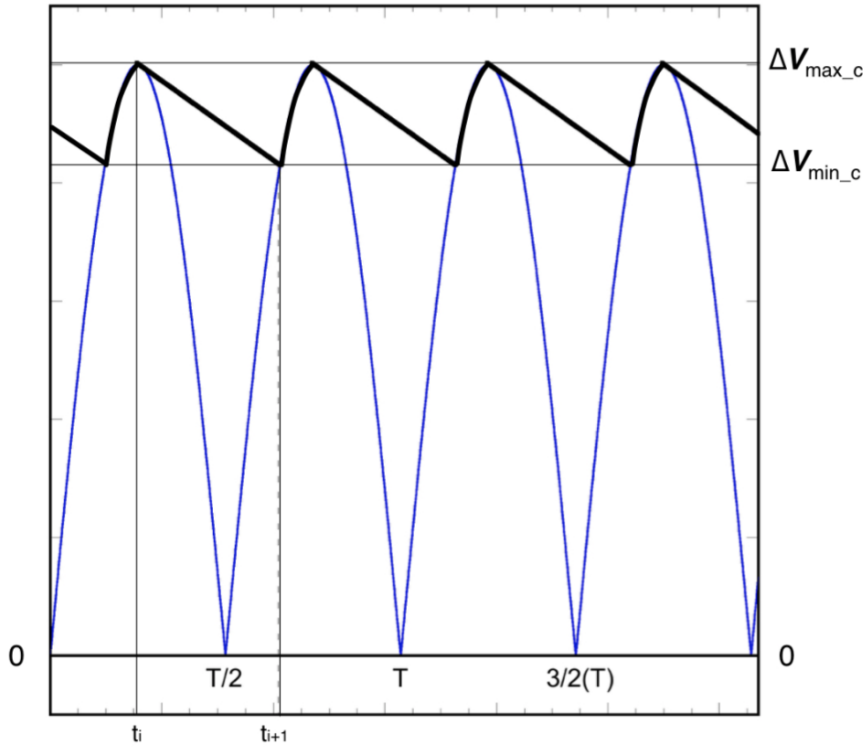


Figura 4.16: In blu il segnale in tensione raddrizzato; in nero spesso il segnale raddrizzato e rettificato con un valore $\tau = (R_c + R_d) C \simeq 2T$, cioè pari circa al doppio del periodo T del segnale originale $V(t)$.

del circuito richiede ovviamente, una volta deciso il valore ΔV_{medio} che si vuole agisca sul carico, di ridurre quanto più possibile $\Delta V_{rip}/\Delta V_{medio}$ e nel contempo massimizzare il rapporto $\Delta V_{medio}/\alpha V_{max}$.

Si può verificare sperimentalmente una dipendenza del tipo $r \propto RC^{-\gamma}$.

Un'altra possibile scelta è quella di considerare il parametro

$$J_{sp} = \Delta V_{min_c}/\Delta V_{max_c} \quad (4.39)$$

In questo caso il dispositivo realizzato sarà tanto migliore quanto più J_{sp} tende all'unità, ovviamente sempre nell'ipotesi di massimizzare contemporaneamente il rapporto $\Delta V_{medio}/\alpha V_{max}$.

Questa scelta permette, non appena si ponga $J_{th} = e^{-T/\tau}$, dove T rappresenta il semiperiodo della tensione in ingresso $V_{in}(t)$, di definire un parametro $K = J_{th}/J_{sp}$, che permette di testare la validità e i limiti del modello e delle approssimazioni assunte per la descrizione del circuito.

Un valore $K > 1$ indica una sovrastima di J_{th} rispetto a J_{sp} , e quindi una sottostima di τ , e viceversa.

Con i valori scelti in questo caso si evidenziano all'oscilloscopio scostamenti

significativi di K dall'unità quando i valori delle resistenze di carico R_c scendono a poche centinaia di Ohm. È quindi evidente che in tal caso la curva

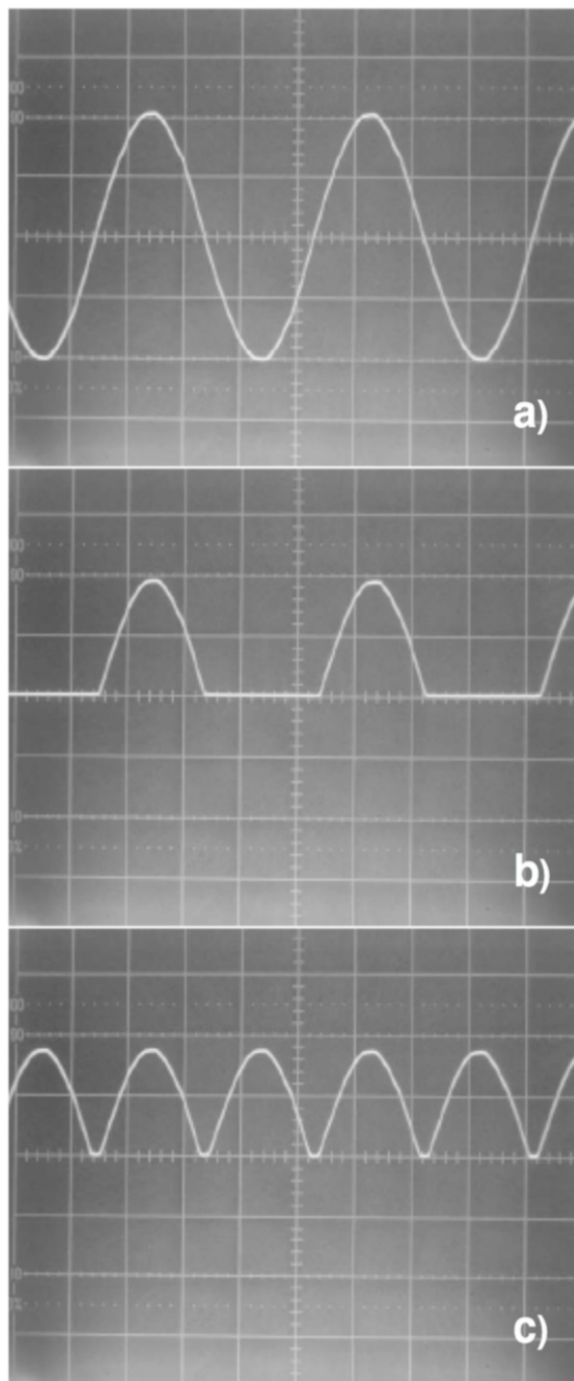


Figura 4.17: a) $V_{in}(t)$; b) effetto su $V_{in}(t)$ del raddrizzamento a semionda (un solo diodo); c) effetto su $V_{in}(t)$ del raddrizzamento a onda intera (ponte a quattro diodi). Sono visivamente apprezzabili le riduzioni dell'ampiezza del segnale dovute alle impedenze presenti nei casi b) e c). In c) è chiaramente visibile anche la forma del segnale in corrispondenza della tensione nulla. Non è una cuspide e ciò dipende dalla marcata non-linearità della curva I/V di un diodo in corrispondenza ai più piccoli valori di corrente e tensione.

di scarica del condensatore non può più essere efficacemente approssimata al prim'ordine.

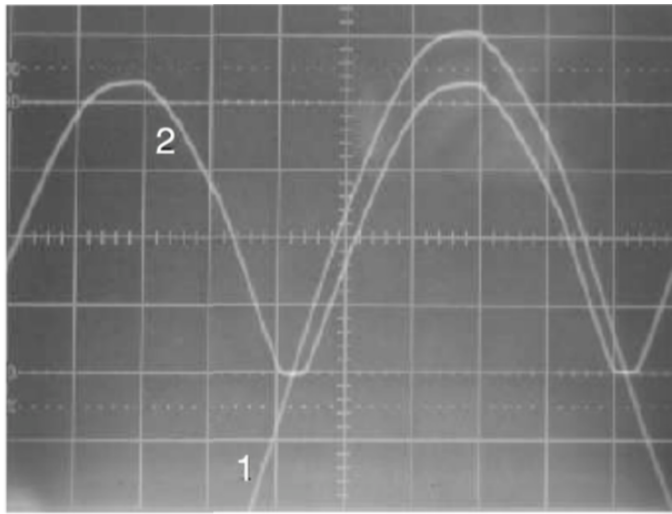


Figura 4.18: L'immagine mette in risalto i particolari sopra indicati, ovvero la diminuzione d'ampiezza del segnale e la sua forma in corrispondenza del punto a valore nullo della tensione.

Quando inoltre R_c comincia ad essere dell'ordine delle altre resistenze (cavi, connessioni, ecc.) del circuito che in prima istanza si erano trascurate, non è più legittimo continuare a trascurarle.

Nelle figure 4.18 e 4.19 è illustrato quanto si può vedere all'oscilloscopio durante le fasi di montaggio e prova dei circuiti, sia per quello a singolo diodo che per quello a ponte di diodi, man mano che a resistenza di carico fissata, aumenta il valore della capacità inserita in parallelo, o man mano che fissata la capacità, ad aumentare è la resistenza di carico: in ordinate sono mostrate le tensioni e in ascisse i tempi.

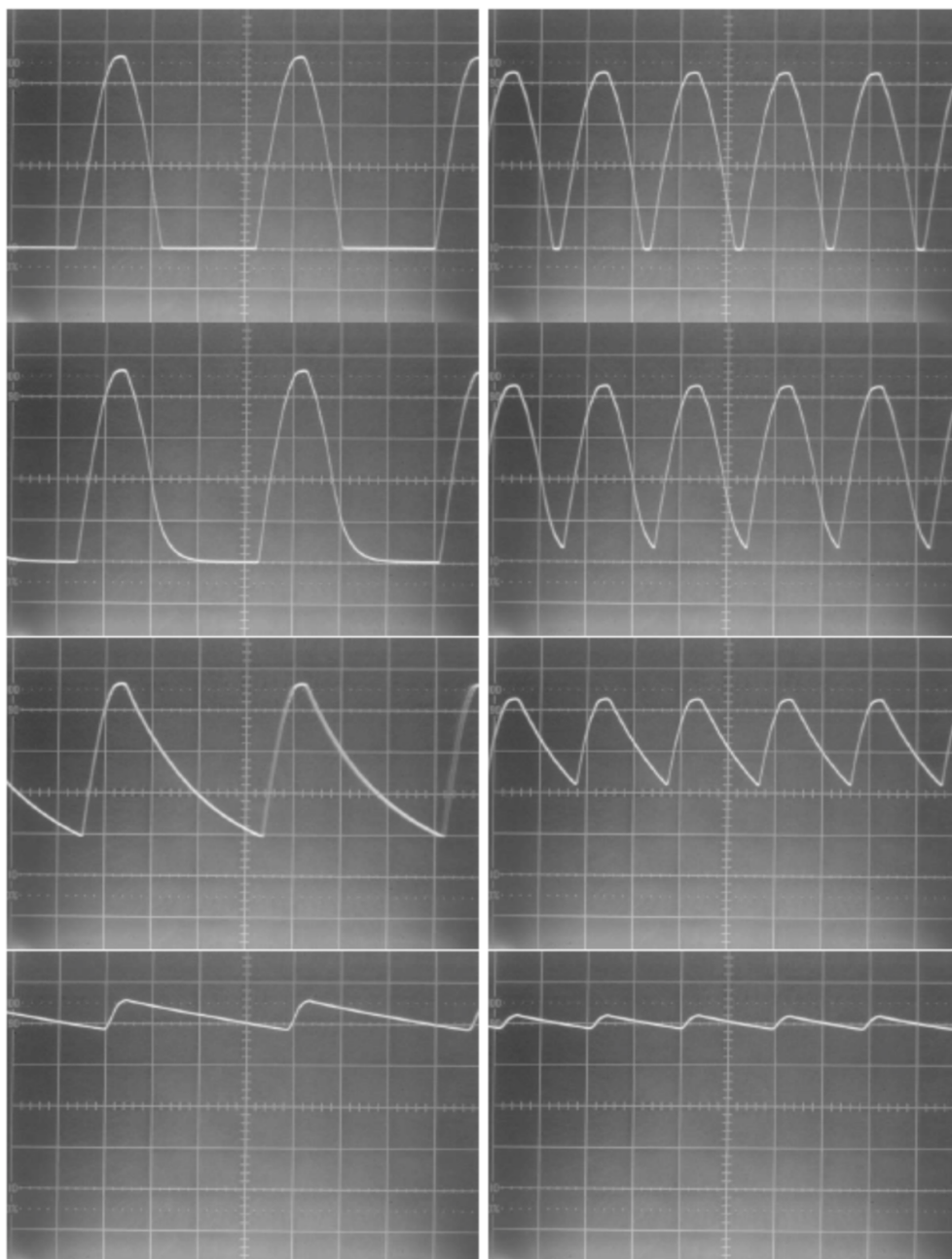


Figura 4.19: Procedendo dall'alto in basso l'effetto dei condensatori, per una stessa tensione d'ingresso, su un dispositivo a semionda, a sinistra, e a onda intera, sulla destra. Dalla seconda riga capacità via via crescenti di un ordine di grandezza alla volta. Si apprezza la maggior efficacia del dispositivo a onda intera (ponte di quattro diodi) caratterizzato però da una minore tensione di picco.

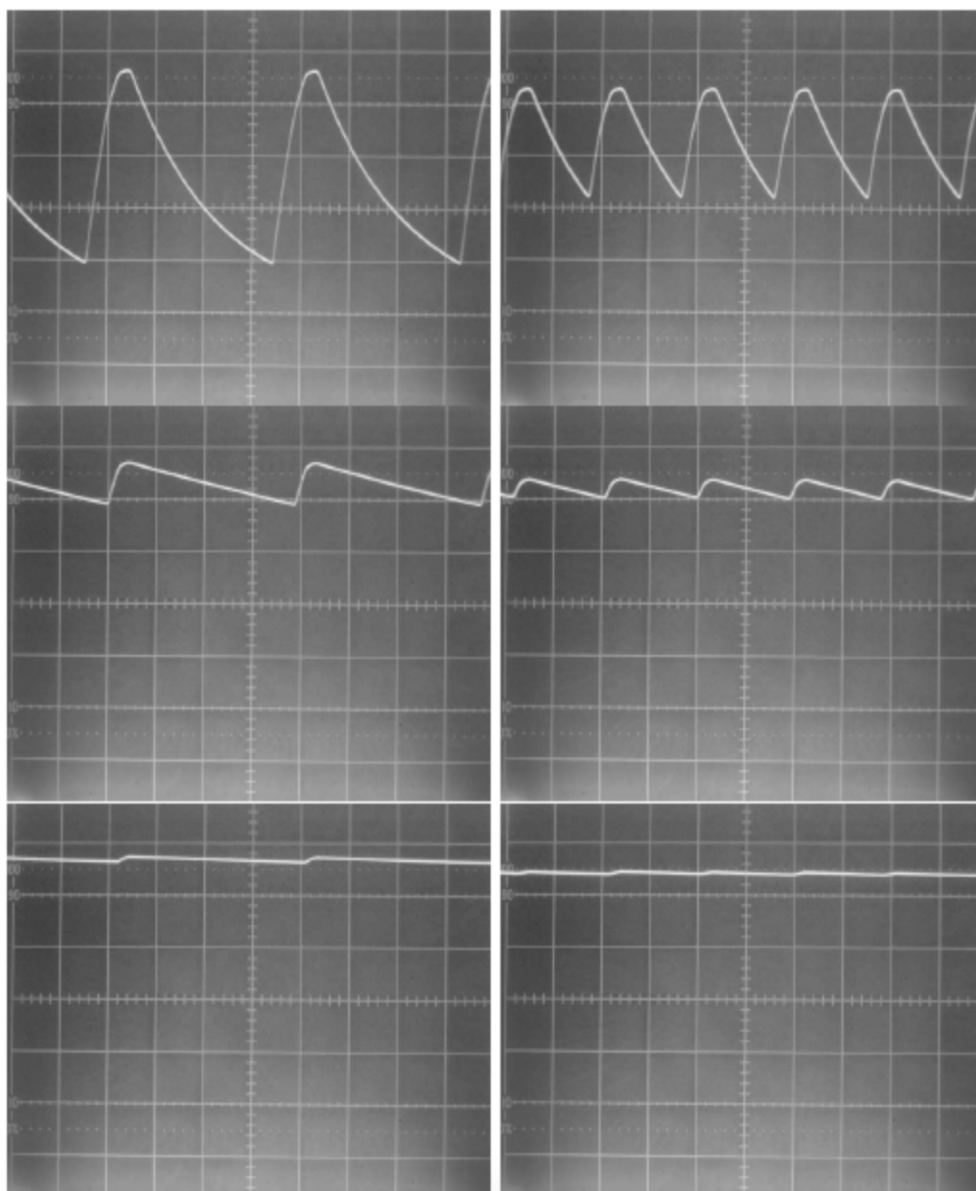


Figura 4.20: Tensione ai capi della resistenza di carico R_c per un dispositivo a semionda, a sinistra, e ad onda intera, a destra, per una medesima tensione d'ingresso. Dall'alto in basso, sempre nella stessa scala, il risultato ottenuto su tre carichi diversi, ognuno un ordine di grandezza superiore rispetto al precedente.

Capitolo 5

Cavi e linee di trasmissione

Capitolo 6

Onde elettromagnetiche

6.1 Introduzione

6.2 Il radar

6.3 La radio

Capitolo 7

Misura del rapporto e/m_e per l'elettrone

Si presentano ora due fra i possibili modi per misurare il rapporto carica/massa dell'elettrone, che si basano su strumentazioni sostanzialmente equivalenti a quelle originariamente utilizzate tra la fine del 19° secolo e i primi del '900.

Si tratta della misura di e/m secondo il metodo di Thomson, sfruttando un tubo a fascio elettronico filiforme ed un campo magnetico uniforme, e della misura di e/m con un tubo di Braun, che è sostanzialmente un tubo catodico con una coppia di placchette per la deflessione elettrostatica, assieme ad un opportuno campo magnetico uniforme che sia in grado di bilanciare l'effetto del campo elettrostatico.

Si comincia col descrivere il primo.

7.1 Misura di e/m_e con l'uso di un tubo a fascio filiforme

Nell'immagine di figura 7.1 è riportata, dal libretto delle caratteristiche fornito dal costruttore, la fotografia di uno dei modelli di tubo a fascio filiforme di cui si dispone nel laboratorio didattico.

Esso consta sostanzialmente, nelle sue caratteristiche generali, in una ampolla di vetro di forma sferica, del diametro di circa 16 cm, che termina in un raccordo cilindrico che ospita le connessioni elettriche verso lo zoccolo esterno di alimentazione e sostegno meccanico. All'interno dell'ampolla, in fase costruttiva, è stato dapprima aspirato ogni possibile residuo di aria e altri gas presenti, poi è stata reimpressa una piccola percentuale di gas Neon, con una pressione dell'ordine di poche unità per 10^{-5} bar. Nella parte bassa dell'ampolla è posizionato un cannone elettronico che una volta alimentato, può produrre fasci collimati di elettroni, di energie note dell'ordine delle poche centinaia di eV, che vengono emessi orizzontalmente.

Per quanto concerne il funzionamento di un cannoncino elettronico si veda quanto detto nel paragrafo 2.2.1, in cui è descritto il tubo catodico di un oscilloscopio analogico. Grazie alla presenza della debole atmosfera di

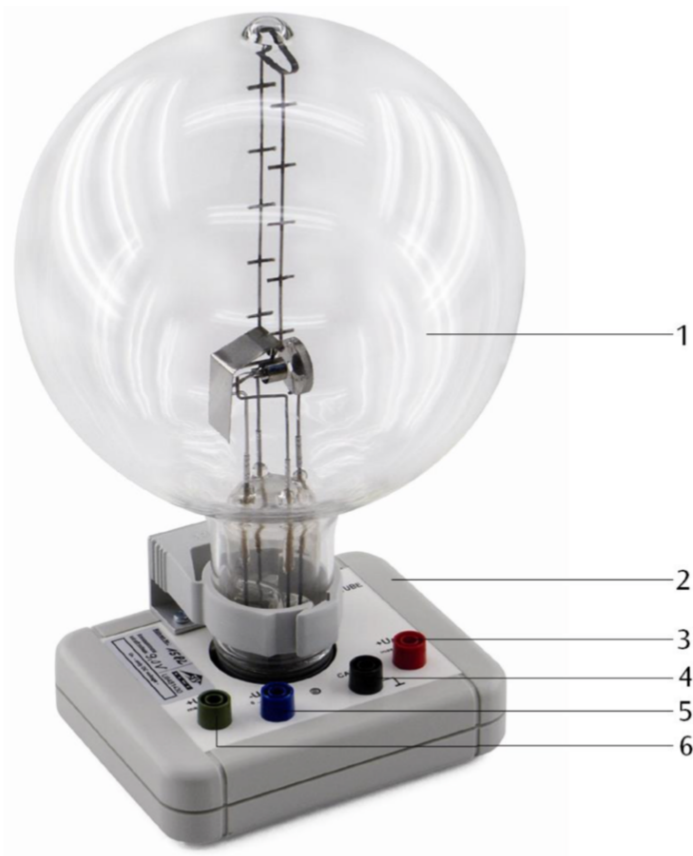


Figura 7.1: Tubo a fascio filiforme; 2: zoccolo di collegamento; 3: connettore di collegamento per l'anodo; 4: connettore di collegamento per il catodo; 5: connettore di collegamento per il cilindro di Wehnelt; 6: connettore di collegamento per la resistenza di riscaldamento.

Neon, quando il cannoncino è alimentato si rende visibile, con una luminosità giallo-arancio, una scia che in qualche modo approssima le traiettorie degli elettroni del fascio prodotto. Ciò è dovuto al fatto che ogni elettrone emesso dal cannoncino, nel suo tragitto, interagisce con gli atomi di Neon che incontra lungo il proprio percorso nell'ampolla eccitandoli con il trasferimento di parte della propria energia cinetica. Questi atomi, alcune frazioni di microsecondo dopo essere stati eccitati, si diseccitano emettendo fotoni con frequenze nella zona giallo-arancio dello spettro visibile. Quello che lo sperimentatore vede quindi è l'insieme dei fotoni emessi in ogni direzione dagli atomi di Ne eccitati poco prima dall'interazione con un elettrone del

fascio. Chiaramente la posizione in cui l'atomo si trova quando emette il fotone di diseccitazione non coincide con quella in cui ha subito l'urto, anche a causa del rinculo dovuto a quest'ultimo, e ciò costituisce una delle cause dell'incertezza con cui si riesce ad assegnare un insieme di coordinate ai "punti" della traiettoria del fascio "osservato".

Può essere interessante valutare la densità di atomi di Neon nell'ampolla, per apprezzare la quantità d'urti che ogni singolo elettrone può in media subire con essi durante ogni cm di percorso.

Considerato che ad una pressione di 1.013 bar, e una temperatura di 273,15 °K, un numero di Avogadro ($N \simeq 6.022 \times 10^{23}$) di molecole di gas occupa circa 22.4×10^3 cm³, si deduce che a 1.5×10^{-5} bar, alla temperatura di 293,15 °K, vi saranno circa 3.6×10^{14} molecole di gas, quindi di Neon, in ogni cm³ all'interno dell'ampolla. Ciò conduce alla probabilità di effettuare qualche urto con atomi di Neon per ogni cm percorso da ogni elettrone del fascio nell'ampolla.

Ovviamente questi urti degradano energia e impulso di ogni elettrone e di ciò bisognerebbe tener conto, per un'analisi completa e corretta del moto degli elettroni del fascio nell'ampolla. Nel seguito però si farà, in prima approssimazione, l'ipotesi che il "degrado" in energia cinetica e in quantità di moto (che si ricordi è un vettore) degli elettroni del fascio sia trascurabile. Se quindi si monta e alimenta il tubo, si vedrà una scia luminescente, correlata al fascio di elettroni prodotto dal cannoncino, uscire da quest'ultimo con direzione orizzontale.

Tale fascio è ovviamente sensibile ai campi elettrico \vec{E} e magnetico \vec{B} presenti e l'azione su ogni elettrone può essere calcolata tramite la Forza di Lorentz \vec{F}_L

$$\vec{F}_L = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.1)$$

con e = carica dell'elettrone; v = velocità dell'elettrone; \vec{E} e \vec{B} campi elettrico e magnetico sentiti dall'elettrone.

Il campo magnetico ambientale locale, sempre presente, può essere di disturbo per gli scopi della misura quindi, onde ridurne l'effetto, conviene posizionare, con l'ausilio di una bussola, il tubo in modo che il fascio elettronico venga emesso con direzione parallela al vettore componente orizzontale del campo magnetico locale.

Se a questo punto si pongono due bobine di Helmholtz di diametro opportuno, parallele al fascio ai lati opposti dell'ampolla, come in figura 7.2, si può creare un campo magnetico \vec{B} , altamente omogeneo e costante, orientato orizzontalmente e ortogonale alla velocità \vec{v} di ogni elettrone del fascio.

Supponendo non vi sia alcun altro campo, né magnetico né elettrico, interagente con gli elettroni del fascio una volta usciti dal cannoncino, essendo la forza di Lorentz in questo caso puramente centrale ($\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}$), supponendo che \vec{v} resti sempre costante in modulo, il che significa trascurare la degradazione delle caratteristiche energetiche e in impulso del fascio per la

sua interazione con le molecole di Ne presenti, si ha che ogni elettrone viene costretto ad una traiettoria circolare, a velocità angolare e quindi anche periferica, costante, subendo una forza centripeta corrispondente proprio alla forza di Lorentz. Quindi si può porre



Figura 7.2: Tubo a fascio filiforme disposto fra due bobine di Helmholtz.

$$e\vec{v} \times \vec{B} = -m_e \frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (7.2)$$

essendo m_e la massa dell'elettrone, r il raggio della traiettoria circolare, \hat{r} il versore del raggio vettore che unisce il centro della traiettoria con l'elettrone che la percorre.

D'altronde, data l'ortogonalità fra \vec{v} e \vec{B} , si ha anche

$$e v B = m_e \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{m_e} = \frac{v}{r B} \quad (7.3)$$

Ricordando quanto visto per l'energia cinetica di un elettrone prodotto da un cannoncino elettronico con un potenziale elettrico accelerante V_a

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e V_a \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{e}{m_e} 2V_a \quad (7.4)$$

Elevando a quadrato la formula precedente e sostituendo v^2 si ottiene

$$\frac{e^2}{m_e^2} = \frac{e}{m_e} \frac{2V_a}{r^2 B^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{m_e} = \frac{2V_a}{r^2 B^2} \quad (7.5)$$

che è quanto cercato, ovvero il rapporto e/m_e espresso in funzione di quantità misurabili nel corso dell'esperienza.

V_a sarà infatti misurata con un voltmetro in parallelo all'alimentatore connesso al cannoncino; B può essere calcolato conoscendo geometria, struttura (numero di spire, permeabilità magnetica), senso di percorrenza e intensità della corrente che scorre nelle bobine di Helmholtz, e contemporaneamente misurato tramite opportune sonde Hall; infine r può essere misurato per confronto con traguardi presenti nell'ampolla o rilevandolo con un'opportuna immagine fotografica della traccia luminescente, una volta fatta una taratura che permetta di raccordare l'unità di misura delle lunghezze spaziali nell'immagine fotografica con le unità di misura delle lunghezze reali nell'apparato sperimentale. Bisogna naturalmente, qualunque strategia si

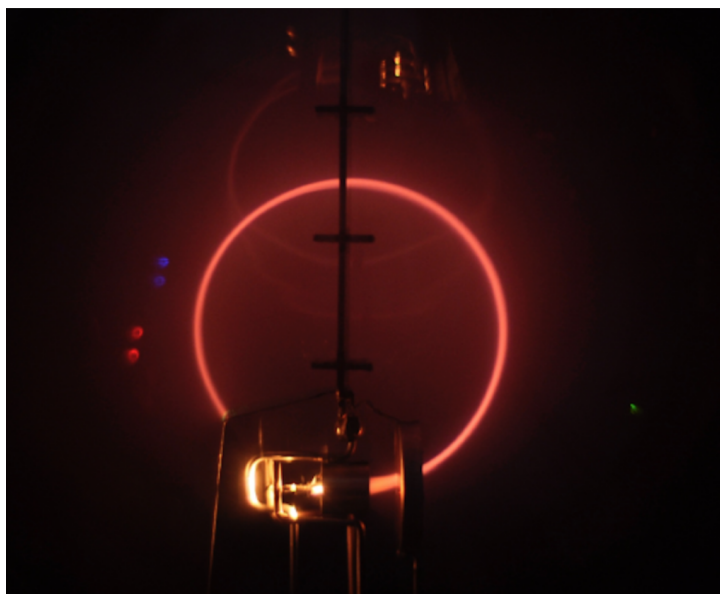


Figura 7.3: Fotografia della traccia luminescente prodotta dagli elettroni del fascetto in presenza del campo magnetico prodotto dalle bobine di Helmholtz in un tubo a fascio filiforme.

adotti per la misura di r , prestare attenzione ad evitare effetti di distorsione ottica, ovvero parallasse; nel caso di fotografie sarà opportuno anche evitare erronee messe a fuoco o eccessive sovraesposizioni delle immagini ... Per quanto concerne le misurazioni dei valori di campo magnetico con sonde Hall si faccia riferimento a quanto detto in proposito nel paragrafo 4.2. Si osservi che i valori rilevati devono permettere di mappare al meglio il campo nella zona di spazio in cui si svilupperanno le traiettorie degli elettroni dei fasci prodotti.

Naturalmente un buon set di dati che permetta quindi una buona stima del rapporto e/m_e , richiede di acquisire informazioni con svariate configurazioni

per diversi valori di velocità, quindi di tensione accelerante V_a , e conseguentemente diversi valori di campo magnetico, quindi di corrente che alimenti le bobine di Helmholtz.

7.2 Misura di e/m_e con l'uso di un tubo di Braun

Si veda ora un secondo metodo per la misura del rapporto e/m_e . È un metodo concettualmente più elegante del precedente che dovrebbe, in linea di principio, condurre ad un risultato meno affetto da errori sistematici. È sostanzialmente una *misura di zero*.

Date le difficoltà tecniche e la criticità del rispetto delle condizioni sperimentali ideali per la sua buona riuscita, non bisogna però meravigliarsi se i risultati che si ottengono in questo caso possono essere meno precisi e accurati di quelli ottenibili col metodo di Thomson e l'uso del tubo a fascio filiforme. Il principio base consiste nel cercare le condizioni per le quali,



Figura 7.4: Tubo di Braun.

applicando contemporaneamente un campo elettrico e uno magnetico agli elettroni di un fascio monocinetico prodotto in un tubo catodico, gli effetti dei due campi sul moto degli elettroni si bilanciano esattamente e la traiettoria degli elettroni del fascio ne risulta invariata, rispetto all'assenza degli

stessi campi. In pratica si utilizza un tubo catodico in configurazione di Braun, come quello mostrato in figura 7.4, e il cui schema di funzionamento è già stato illustrato nel paragrafo 2.2.1, parlando del tubo catodico di un oscilloscopio.

Tenendo presente la formula della forza di Lorentz,

$$\vec{F}_L = e \vec{E} + e \vec{v} \times \vec{B}$$

si nota che scegliendo opportunamente i campi \vec{E} e \vec{B} si può ottenere

$$0 = e \vec{E} + e \vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}$$

Se \vec{v} rappresenta quindi la velocità di ogni elettrone di un fascio prodotto entro un tubo di Braun, ed $|\vec{E}| = V_d/D$, con D = distanza fra le placche deflettrici, e V_d = potenziale elettrico fra le stesse placche, ciò significa che generando un opportuno campo magnetico \vec{B} nel volume fra le placche contemporaneamente interessato dalla presenza di \vec{E} , con \vec{B} ortogonale sia ad \vec{E} che a \vec{v} , e quindi parallelo ai piani delle placche, si può rendere nulla la forza risultante su ogni elettrone del fascio che attraversa il volume compreso fra le placche stesse. Ciò si risolve nel far sì che lo spot luminoso del fascetto

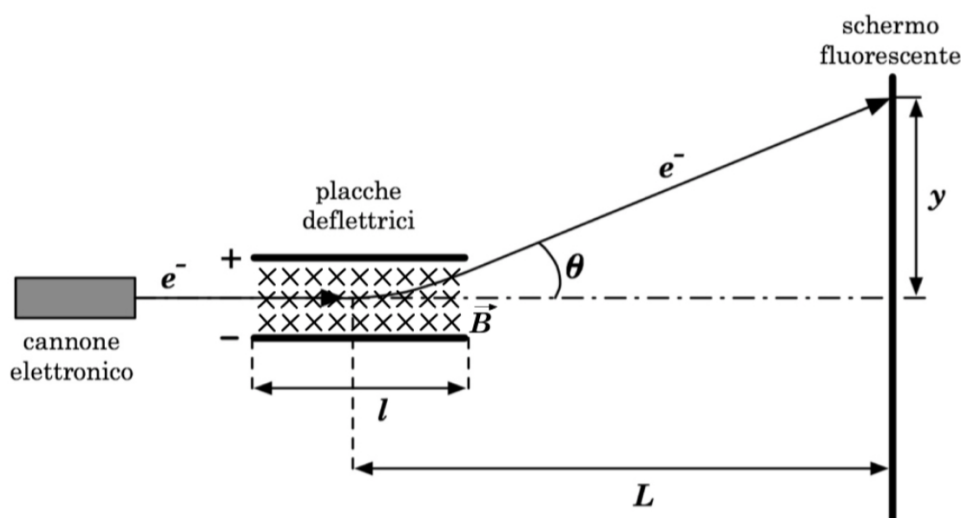


Figura 7.5: Scegliendo opportunamente il campo \vec{B} si può ricondurre a zero lo spostamento y prodotto sullo spot del fascio elettronico sullo schermo fluorescente, dal campo elettrico fra le placche deflettrici.

elettronico sullo schermo non subisca, in questo caso, spostamenti dalla sua posizione originale in assenza sia di campi elettrici che magnetici.

Si tenga subito presente che quanto detto presuppone di trascurare l'effetto del campo magnetico ambientale, di cui si è detto nell'Esperienza 11.

Supponendo di riuscire a prescindere da questo, o comunque a ridurne e/o tener conto dell'effetto da esso prodotto, per una buona riuscita della misura bisogna essere sicuri di poter ragionevolmente trascurare gli effetti di bordo del campo \vec{E} , e garantire la presenza efficace del campo \vec{B} esclusivamente nel volume entro le due placche deflettrici.

Il rispetto di questa condizione è dunque cruciale per la buona riuscita della misura.

Impostando quindi la misura in condizione di buona geometria, e considerando \vec{v} perpendicolare sia ad \vec{E} che a \vec{B} , si può scrivere in forma scalare

$$\frac{V_d}{D} = -v B$$

Ricordando poi che in un tubo di Braun, detta V_a la tensione di accelerazione degli elettroni nel cannoncino, si ha

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV_a \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2eV_a}{m_e}$$

quadrando e sostituendo si ottiene

$$\frac{V_d^2}{D^2} = \frac{2eV_a}{m_e} B^2$$

da cui infine

$$\frac{e}{m_e} = \frac{V_d^2}{2D^2 V_a B^2}$$

Si è così espresso il rapporto e/m_e in funzione di quantità direttamente misurabili o note. D dovrebbe essere infatti riportato nel foglio di accompagnamento del tubo di Braun. Per quanto concerne B , può essere sia misurato, tramite una sonda Hall che calcolato, note le caratteristiche dell'elettromagnete utilizzato.

Come si può immaginare, una delle cose più complesse da realizzare, nel corso dell'effettuazione di questa misura, è garantire le richieste di omogeneità e confinamento spaziale del campo \vec{B} entro il volume fra le placche deflettrici. Una causa sostanziale di errori sistematici è infatti da ascrivere alla presenza di valori di entità non trascurabili del campo magnetico \vec{B} generato dal magnete utilizzato, in zone di spazio non comprese entro le placche deflettrici ma comunque interessate dal percorso degli elettroni del fascio.

Disponendo di un campo magnetico \vec{B} omogeneo e di estensione spaziale opportunamente grande da coinvolgere l'intero volume del tubo di Braun a partire dal cannoncino elettronico fino allo schermo, si può poi procedere alla misura del rapporto e/m_e in un terzo modo, sfruttando quanto già esposto nell'esperienza 11 sulla "Misura del campo magnetico locale tramite un Tubo di Braun", dal rilevamento dell'entità y di spostamento dello spot luminoso sullo schermo fluorescente rispetto alla condizione di nullità del campo \vec{B} .

Capitolo 8

Esperimento di Millikan

Si è studiato in capitoli precedenti il tipo di esperimento che ha permesso a Faraday di misurare la costante $F = eN$, assieme ad una panoramica di possibili modi di misurare il rapporto e/m_e della carica sulla massa dell'elettrone. In tal modo si può, conoscendo per una via indipendente il valore del numero N di Avogadro, stimare e , e di conseguenza m_e . Ovviamente è molto più appetibile la possibilità di poter procedere ad una misura diretta e come vedremo ciò è possibile per e , ma non per m_e .

Oggi si sa inoltre che in valore assoluto la carica dell'elettrone è uguale a quella del protone entro una parte su 10^{10} .

L'esperimento che per primo ha permesso di dimostrare direttamente il carattere discreto delle cariche elettriche e di effettuare al tempo stesso una misura assoluta di e , è stato pensato e realizzato da Millikan nel 1911 ^[1]. Egli immaginò che riuscendo a caricare elettricamente una gocciolina d'olio e studiandone quindi il moto in presenza di forze di forma "analiticamente" nota (gravitazionale, Archimede, attrito viscoso, elettrostatica), sarebbe riuscito a ricavare la carica elettrica posseduta da quella gocciolina. Effettuando molte misure su diverse goccioline si riesce a disporre di una quantità di dati tale che correlandoli opportunamente, dovrebbero permettere di evidenziare se vi sia una carica "massimo comun divisore" di tutte quelle misurate. Tale carica dovrebbe quindi corrispondere alla carica elementare, con tutto quanto ne consegue (quantizzazione della carica, ...).

Si analizzi ora più nel dettaglio l'approccio sperimentale di Millikan. Utilizzando uno spruzzatore (Tubo di Venturi) si producono delle goccioline d'olio (aerosol) che si possono caricare elettricamente per attrito contro l'aria al momento in cui vengono emesse, oppure per stimolo radioattivo.

Si appronti poi un condensatore a lastre piane parallele disposto al di sotto della zona in cui vengono prodotte le goccioline, con le piastre ortogonali al campo gravitazionale locale \vec{g} e con un piccolo forellino nel centro della piastra superiore, così da permettere l'ingresso delle goccioline d'olio in ca-

¹R.A.Millikan, Phys. Rev. 22 (1923) 1

duta. Siano: ρ_0 = densità di massa dell'olio usato, ρ_A = densità di massa

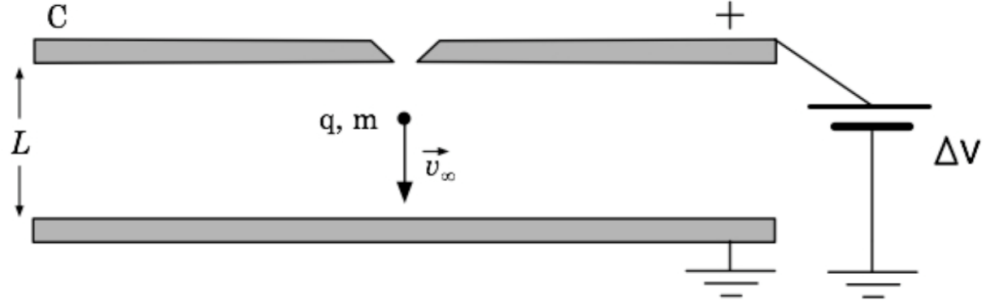


Figura 8.1: Schema della configurazione sperimentale per la misura di Millikan.

dell'aria, r = raggio della gocciolina d'olio, supposta rigidamente sferica, per cui $V = 4\pi r^3/3$ è il suo volume, ed $m = \rho_0 V = 4\pi r^3 \rho_0/3$ è quindi la sua massa.

La forza totale agente sulla gocciolina d'olio, in assenza di campo elettrico fra le piastre del condensatore e assumendo come positivo il verso opposto a quello di \vec{g} , è

$$\begin{aligned} F_{Tot} &= F_{peso} + F_{Archimede} + F_{attrito} = \\ &= -mg + m_{aria}g + 6\pi\eta r v = \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_A - \rho_0) g + 6\pi\eta r v \end{aligned} \quad (8.1)$$

dove $m_{aria} = 4\pi\rho_A r^3/3$, $\eta \simeq (1.84 \pm 0.05) \times 10^{-5}$ kg/ m·s, e si è assunta valida l'approssimazione di Stokes.

In regime asintotico che come si può verificare per goccioline delle dimensioni in questione è raggiunto, in aria a circa una atmosfera, dopo poche frazioni di mm di tragitto, la velocità di caduta diviene praticamente costante: $v = v_{\infty,g}$, e si può dunque dire, per la prima legge della dinamica, che $\vec{F}_{Tot} = 0$. Quindi

$$6\pi\eta r v_{\infty,g} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_A) g \quad (8.2)$$

da cui

$$v_{\infty,g} = \frac{2r^2 (\rho_0 - \rho_A)}{9\eta} g \quad (8.3)$$

Quindi, noti ρ_0 , ρ_A , g , ed η , dalla misura di $v_{\infty,g}$, si risale al valore di r .

$$r = 3 \left[\frac{\eta v_{\infty,g}}{2(\rho_0 - \rho_A) g} \right]^{1/2} \quad (8.4)$$

Si ricordi che ρ_A dipende dalla composizione dell'aria e dai valori di pressione e temperatura della stessa: a 0°C e 1 Atmosfera di pressione, una mole d'aria

occupa 22.41 litri; alle temperature alle quali si lavora l'aria si comporta come un gas quasi perfetto; la composizione standard dell'aria è:

$N_2 = 78.08\%$, $O_2 = 20.94\%$, $Ar = 0.93\%$, CO_2 , Ne , He , Kr , Xe , CH_4 , H_2 , in percentuali progressivamente decrescenti.

Si indichi ora con Q la carica elettrica acquisita dalla gocciolina d'olio.

Se mentre sta cadendo a regime di velocità asintotica $v_{\infty,g}$ essa entra nel condensatore C entro il quale vi è il campo elettrico uniforme $|\vec{E}| = \Delta V/L$, parallelo a \vec{g} e a $v_{\infty,g}$, allora a seconda del segno di Q e della polarità di ΔV , il moto della gocciolina cambierà accelerando o decelerando. Si supponga di decelerarla sino ad arrestarne la caduta e mantenerla quindi ferma, sospesa ad una quota fissa tramite l'azione di ΔV . In tal caso, nella condizione di equilibrio raggiunta sarà

$$F_{Tot} = -mg + m_{aria}g + Q|\vec{E}| = 0$$

$$\text{da cui: } \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_A - \rho_0)g + \frac{Q\Delta V}{L} = 0$$

e ancora

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{L(\rho_0 - \rho_A)}{\Delta V} g = 9\pi\sqrt{2} \left[\frac{\eta^3 v_{\infty,g}^3}{(\rho_0 - \rho_A)g} \right]^{1/2} \frac{L}{\Delta V} \quad (8.5)$$

La carica elettrica della gocciolina è quindi espressa in termini di quantità tutte note o misurabili.

Effettuando misure successive su diverse gocce si possono trovare diversi valori Q_i della carica elettrica totale di ogni gocciolina e da un opportuno confronto tra questi valori si può desumere se tutti sono multipli di uno stesso valore ed eventualmente, a meno di casi sfortunati in cui tutti i valori ottenuti per Q_i non siano a loro volta tutti multipli di un multiplo pari di ordine minimo della carica elementare, si dovrebbe essere in grado di estrapolare anche il valore di quest'ultima.

Può essere opportuno correlare i valori di ΔV_i con quelli dedotti per Q_i , dove ΔV_i sono i valori di d.d.p. tra le piastre del condensatore C in corrispondenza ai quali si fermano le goccioline d'olio studiate.

Riuscire ad arrestare una gocciolina esattamente e mantenerla poi ferma è però molto più difficile di quanto non si pensi.

È invece più facile, tramite opportune scelte di ΔV , farle cambiare senso di marcia e farla risalire, quindi nuovamente ricadere e poi risalire, eventualmente anche per diversi valori di ΔV , e quindi di velocità di risalita. Si osservi che anche la velocità di risalita, dopo l'inversione del senso di marcia raggiunge, in poche frazioni di millimetro, un valore asintotico $v_{\infty,i}$, dipendente dalla differenza di potenziale utilizzata ΔV_i .

In quelle condizioni e in virtù del primo principio della dinamica, si ha che

la forza totale agente sulla gocciolina è nulla. Quindi:

$$F_{Tot} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_A - \rho_0) g - 6\pi\eta r v_{\infty,i} + Q \frac{\Delta v_i}{L} = 0 \quad (8.6)$$

Ma esprimendo ora "6πηr" sia a partire dalla (8.6) che dalla (8.2), si ha

$$\begin{aligned} 6\pi\eta r &= \left[\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_A - \rho_0) g + \frac{Q\Delta V_i}{L} \right] \frac{1}{v_{\infty,i}} = \\ &= \left[\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_A) g \right] \frac{1}{v_{\infty,g}} \end{aligned} \quad (8.7)$$

da cui

$$-\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_A) g v_{\infty,g} + \frac{Q\Delta V_i}{L} v_{\infty,g} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_A) g v_{\infty,i} \quad (8.8)$$

e infine, sostituendo per r quanto dato dall'espressione (8.4)

$$Q = 9\pi\sqrt{2} \left[\frac{\eta^3 v_{\infty,g}}{(\rho_0 - \rho_A) g} \right]^{1/2} \frac{L}{\Delta V_i} (v_{\infty,i} + v_{\infty,g}) \quad (8.9)$$

Effettuando, per una stessa gocciolina, misure con diversi valori ΔV_i e rilevando di conseguenza i corrispondenti valori di v_i , si può dedurre il valore Q della carica elettrica della gocciolina con maggior significatività statistica.

Tra una risalita e l'altra conviene far ricadere la gocciolina con $|\Delta V| = 0$ (solo gravità) e rimisurarne $v_{\infty,g}$ (il che permette oltretutto di dedurre nuovamente r per quella gocciolina).

I valori di Q così ottenuti per diverse goccioline possono quindi essere correlati tra loro per cercarne uno che risulti massimo comun divisore; questo, per quanto visto precedentemente, potrebbe coincidere col valore della carica elementare.

Si osservi che una gocciolina può a volte, in modo apparentemente inspiegabile, mutare il proprio stato di moto senza che lo sperimentatore abbia effettuato alcuna manovra a questo scopo. Ciò può dipendere dal fatto che la gocciolina potrà in quel momento aver acquisito una carica ulteriore a causa di fenomeni quali raggi cosmici, radioattività ambientale, inglobamento di qualche molecola di gas ionizzata, Questo fatto è stato sfruttato di proposito da Millikan, procedendo come segue.

Si supponga che il segno e l'entità della carica aggiuntiva acquisita dalla gocciolina non siano tali da cambiare il segno della carica totale della gocciolina stessa e si mantenga sempre inalterato il valore $|\Delta V|$ del potenziale elettrico. Detti $Q^{(1)}$ e $Q^{(2)}$, $v_{\infty}^{(1)}$ e $v_{\infty}^{(2)}$ i corrispondenti valori di carica elettrica e velocità asintotica di risalita per quella gocciolina, si avrà

$$\Delta Q = Q^{(1)} - Q^{(2)} = 9\pi\sqrt{2} \left[\frac{\eta^3 v_{\infty,g}}{(\rho_0 - \rho_A) g} \right]^{1/2} \frac{L}{\Delta V} [v_{\infty}^{(1)} + v_{\infty}^{(2)}] \quad (8.10)$$

Modificando più volte la carica della stessa gocciolina si possono quindi effettuare svariate misure. Si tenga sempre presente però che col trascorrere del tempo l'olio della gocciolina evapora, da cui l'utilità di dedurne più volte il raggio, rilevando i parametri cinematici della sua caduta libera fra una risalita e l'altra.

Entriamo ora più direttamente nel merito dell'effettuazione della misura descrivendo la procedura seguita da Millikan e facendo riferimento alla struttura sperimentale da lui utilizzata e riportata in figura 8.2.

La gocciolina d'olio che sia riuscita ad imboccare il forellino O nella piastra superiore del condensatore, viene osservata tramite un microscopio attraverso la finestrella F_3 . A tal proposito, dalla finestrella F_1 , posta a 90° rispetto ad F_3 , viene immesso un fascio di luce collimato che colpendo la gocciolina si diffonde dalla sua superficie rendendola visibile come un punto luminoso secondo la tecnica cosiddetta dell'ultramicroscopio. Onde evitare che entro

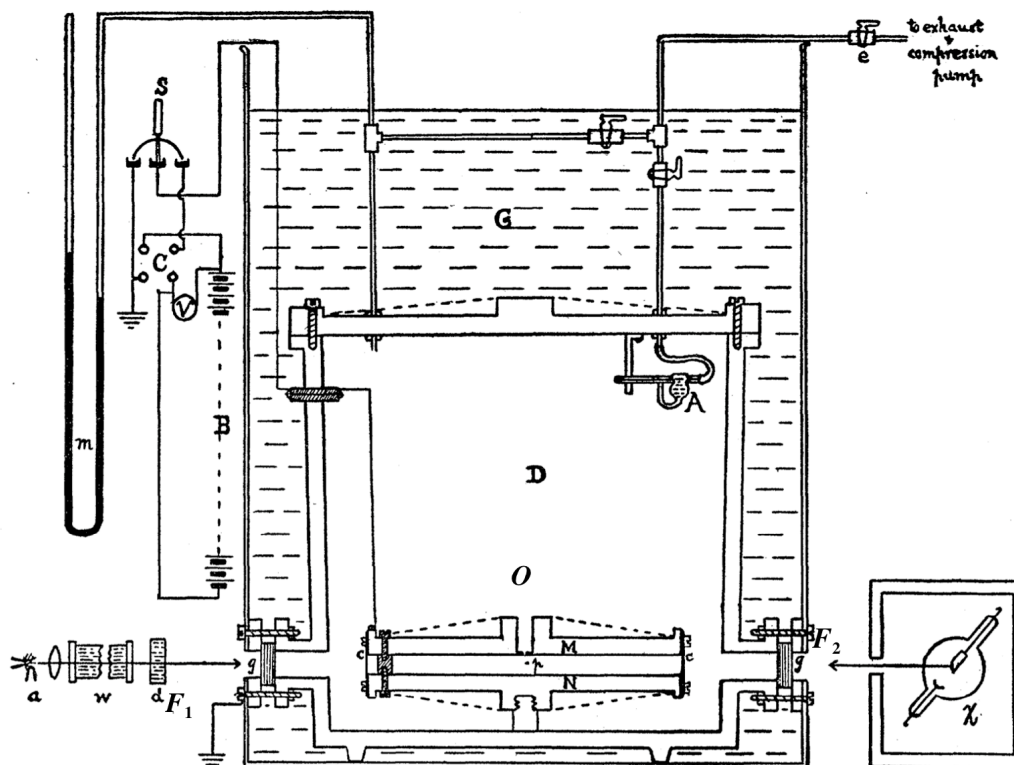


Figura 8.2: Schema della configurazione sperimentale originale di Millikan.

il volume del condensatore si instaurino gradienti termici che produrrebbero correnti convettive che potrebbero poi interferire col moto della gocciolina, si dispone un filtro assorbitore per l'infrarosso all'ingresso di F_1 e si estrae il fascio luminoso attraverso la finestrella F_2 , posta frontalmente ad F_1 .

Le velocità di caduta e risalita di ogni gocciolina sono state misurate da Millikan determinando gli intervalli temporali necessari affinché la gocciolina transitasse attraverso due tacche parallele di riferimento presenti su un reticolo posto nel piano focale del microscopio e considerando, quali misure delle velocità, gli inversi di questi tempi.

Per la preventiva messa a fuoco del microscopio si può agire traguardando un sottile filo introdotto nel condensatore attraverso il forellino O . Se è noto il diametro di tale filo si può eventualmente utilizzare tale informazione anche per tarare la distanza fra le due tacche di riferimento (ma ciò non è necessario, se ci si vuol limitare soltanto a verificare la quantizzazione della carica, senza volerne dedurre l'esatto valore, procedendo come fatto da Millikan). Si tenga presente che l'immagine vista attraverso un microscopio è invertita, per cui la caduta di una gocciolina apparirà come una salita e viceversa.

Per evitare errori sistematici è necessario che le piastre del condensatore siano parallele l'una all'altra ed entrambi perpendicolari al vettore accelerazione di gravità \vec{g} , e bisogna inoltre che anche le tacche di riferimento sul reticolo siano fra loro parallele (non è a rigore necessario invece che le tacche siano anch'esse perpendicolari a \vec{g} , purchè non gli siano parallele, se ci si limita a voler verificare la quantizzazione della carica). La non ortogonalità fra le tacche e \vec{g} si configura ovviamente come una causa d'errore sistematico che tende a sottostimare $|\vec{v}_\infty|$ e quindi Q .

Dalla (8.8) si ha che $\Delta Q \propto [v^{(1)} - v^{(2)}]$ e se quindi la differenza fra le due velocità è un multiplo intero di una stessa grandezza se ne può dedurre la quantizzazione della carica elettrica.

In tabella è riportato un campione di dati ottenuti da Millikan per una stessa goccia, per la quale il valore medio del tempo di caduta libera fra le due tacche di riferimento era $\overline{\Delta t_g} = 11.880$ s.

Δt_r (s)	$\frac{1}{\Delta t_r}$ (s) ⁻¹	$\frac{1}{\Delta t_r^{(2)}} - \frac{1}{\Delta t_r^{(1)}} = \delta_r$	n'	$\frac{1}{n'} \delta_r$	$\frac{1}{\Delta t_g} + \frac{1}{\Delta t_r} = \delta_g$	$n \pm n'$	$\frac{1}{n} \delta_g$
80.708	0.01236				0.09655	18	0.005366
		0.03234	6	0.005390		+6	
22.375	0.04470				0.12887	24	0.005371
		0.03751	7	0.005358		-7	
140.565	0.00719				0.09138	17	0.005375
		0.05348	1	0.005348		+1	
79.600	0.01254				0.09673	18	0.005374
		0.01616	3	0.005387		+3	
34.785	0.02870				0.11289	21	0.005376

Qui Δt_r è il tempo di risalita per diversi stati di carica della medesima goccia; $1/\Delta t_r$ è il suo inverso; $(1/\Delta t_r^{(2)} - 1/\Delta t_r^{(1)}) = \delta_r$ è la differenza fra i tempi di risalita dopo il cambio di stato di carica; n' , detto unità di ricarica, è il rapporto fra ognuno dei valori della colonna 3 e il più piccolo fra essi, approssimato all'unità; δ_r/n' è il valore relativo dell'unità di ricarica; $(1/\Delta t_g + 1/\Delta t_r) = \delta_g$ è la somma degli inversi dei tempi di caduta e di risalita; n , detto unità di carica, è il rapporto, approssimato all'unità, fra ogni valore della colonna 6 e la più piccola differenza in valore assoluto ottenibile sottraendoli l'uno dall'altro in ogni modo possibile, mentre n' rappresenta quanto bisogna sommare, muovendosi dall'alto in basso nella colonna 7, per ottenere da ogni valore di n il successivo; δ_g/n è il valore relativo dell'unità di carica.

I dati delle colonne 4 e 5 evidenziano che effettivamente i valori di ricarica della gocciolina differiscono per multipli interi della stessa quantità, a meno di qualche unità sulla 5^a cifra decimale.

Dalla formula (8.7) si ha inoltre che per la carica Q di ogni gocciolina: $Q \propto (v_{\infty,i} + v_{\infty,g}) \propto (1/\Delta t_r + \Delta t_g)$. Se quindi i valori della 6^a colonna risultano multipli di una stessa grandezza, si può affermare che la carica di ogni gocciolina è composta da unità discrete, e ciò è evidenziato da quanto riportato nelle colonne 7 e 8.

Confrontando infine i dati delle colonne 5 ed 8 si nota che unità di ricarica e unità di carica coincidono entro la quinta cifra decimale.

Ciò conduce ad affermare la positiva verifica sperimentale della natura discreta della carica elettrica.

Una precisa determinazione del valore assoluto della carica elementare richiede però l'applicazione di correzioni anche importanti ai valori ottenibili nei modi descritti.

A tal proposito si può procedere alla deduzione della carica elementare effettuando misure simili alle precedenti, ma ripetute in condizioni caratterizzate da valori differenti per la pressione dell'aria in cui si muove la gocciolina.

Si osservi in proposito che la formula di Stokes utilizzata vale solo in prima approssimazione e le sue predizioni sono tanto più discoste dalla realtà quanto minori sono le dimensioni delle goccioline.

Una forma meglio approssimata della formula di Stokes è la seguente

$$F_{Stokes} = - \frac{6\pi \eta r v}{1 + \alpha \frac{\lambda}{r}} \quad (8.11)$$

dove " λ " è il cammino libero medio delle molecole nel fluido ed " α " è una costante da determinare.

Si ricordi che la legge di Stokes è dedotta nell'ipotesi che il corpo in moto abbia forma sferica e che il mezzo in cui avviene il moto sia continuo e isotropo. Queste ultime ipotesi non si attuano appieno quando le dimensioni r della goccia sono così piccole da essere comparabili o inferiori al cammino

libero medio λ delle molecole nel fluido.

In questi casi, utilizzando le formule precedenti per la determinazione della carica elementare, si trova la condizione assurda che questa sembra dipendere dalle dimensioni r della goccia!

Se invece si utilizza la formula di Stokes corretta (8.11), con pochi passaggi si trova

$$Q_b = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_A) g (v_i + v_\infty) L}{v_\infty \Delta V_i \left(1 + \alpha \frac{\lambda}{r}\right)^{3/2}} \quad (8.12)$$

Seguendo Millikan si veda dunque com'è possibile prescindere dalla conoscenza di "a":

$$\text{si consideri } \frac{Q_b}{Q} = \frac{1}{\left(1 + \alpha \frac{\lambda}{r}\right)^{3/2}} \quad \Rightarrow \quad Q_b^{2/3} \left(1 + \alpha \frac{\lambda}{r}\right) = Q^{2/3}$$

Sapendo però che il cammino libero medio λ è inversamente proporzionale alla pressione p del gas, si ha

$$Q_b^{2/3} \left(1 + \frac{B}{pr}\right) = Q^{2/3} \quad (8.13)$$

con $B = \text{costante}$.

Se quindi si ha anche a disposizione una misura della pressione p del gas in cui si muove la gocciolina, segue che nell'approssimazione espressa dalla (8.11), $Q^{2/3}$ dipende linearmente da $1/(p \cdot r)$.

Siccome poi, per quanto misurato dallo stesso Millikan, $B/(p \cdot r)$ è effettivamente una piccola correzione alla formula classica di Stokes, è lecito considerare per r il valore calcolato secondo la formula NON corretta di Stokes. Si noterà allora che il valore dell'intercetta sull'asse di $Q^{2/3}$ della retta rappresentata dalla

$$Q^{2/3} = \left(\frac{B}{p \cdot r}\right) Q_b^{2/3} + Q_b^{2/3} \quad (8.14)$$

corrisponde a quanto cercato, non appena elevato alla $3/2$.

È quindi sufficiente effettuare con la stessa gocciolina (di ugual raggio r) più misure a diversi valori della pressione per ottenere quanto mostrato in figura (8.3).

Volendo ottenere risultati ancora migliori si potrebbero acquisire dati cambiando altri parametri, quali ad esempio ρ_0 , cioè la densità delle goccioline, usando sostanze diverse dall'olio, oppure ρ_A , sostituendo anche altri gas all'aria, In tal caso, com'è facile capire, si determinano, secondo il procedimento illustrato, gruppi di dati compatibili con regressioni lineari di diverse pendenze, che dovrebbero però convergere tutte verso uno stesso

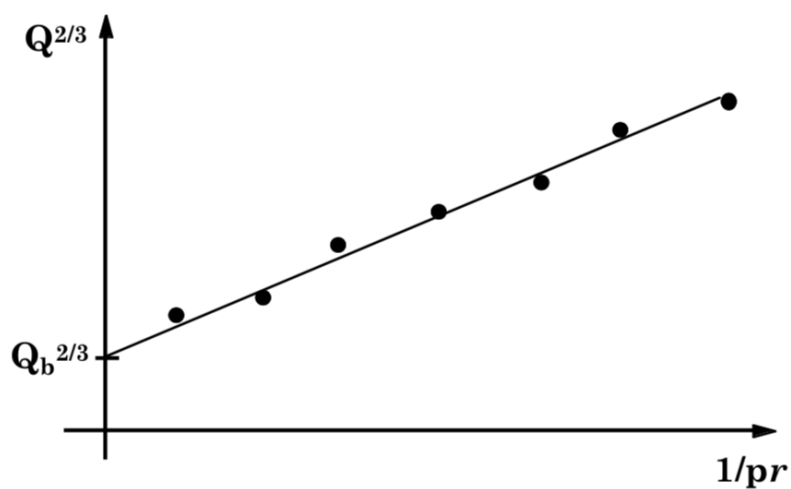


Figura 8.3:

punto comune $Q_b^{2/3}$, sull'asse $Q^{2/3}$, coincidente con quanto cercato, come si vede in figura (8.4).

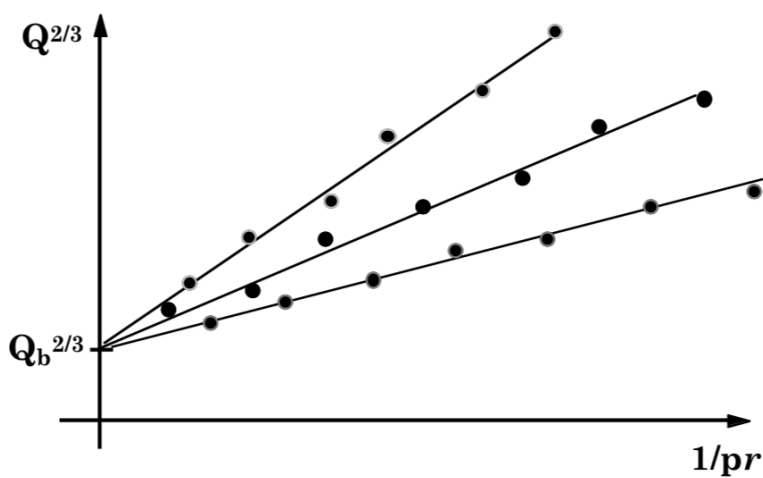


Figura 8.4:

Chiaramente questa tecnica è molto sensibile alle modificazioni strutturali che la gocciolina può subire nel tempo durante l'esecuzione delle varie misure, ed è per questo che le misure con questa tecnica sono state effettuate utilizzando ad esempio goccioline di mercurio, o grani di licopodio al posto delle goccioline.

Appendice A

Unità di misura

L'utilizzo delle corrette unità di misura è sempre essenziale per poter produrre risultati universalmente comprensibili ed efficientemente confrontabili. Un'interessante rassegna sul "Sistema Internazionale di Unità di Misura" può essere trovata presso il sito:

<http://www.science.unitn.it/labdid/sisint/si.html>

del Dipartimento di Fisica dell'Università di Trento ed è curato da Paolo Fornasini.

Un riferimento ufficiale è ovviamente quello del BIPM, ovvero "Bureau International des Poids et Mesures" di Parigi:

<http://www.bipm.fr/en/si/>

nel quale si può trovare una brochure in Inglese e Francese, completa di ogni aggiornata informazione sull'argomento.

È inoltre interessante riferirsi alla legge 11 agosto 1991, n. 273, emanata dal Presidente della Repubblica Italiana e che fa riferimento all'istituzione del Sistema Nazionale di Taratura sovrinteso dal Servizio di Taratura Italiano (SIT).

Appendice B

Convertitore Analogico-Digitale

Un ADC è uno strumento che permette di convertire l'informazione contenuta in un segnale analogico in un'equivalente forma digitale. Esso costituisce praticamente la connessione fondamentale fra elettronica analogica e digitale. Come esempio del suo funzionamento supponiamo che l'ADC accetti in ingresso segnali in un intervallo compreso fra 0 V e 10 V e sia capace di produrre in uscita numeri in forma digitale compresi fra 0 e 1000.

Per maggior semplicità sviluppiamo l'esempio in numerazione decimale anche se in realtà l'elettronica digitale utilizza per lo più la numerazione binaria.

Supponendo una risposta lineare dello strumento, un segnale in ingresso di 2.5 V sarà convertito nel numero 250, e così via. La risoluzione dell'ADC dipende dall'intervallo di digitalizzazione. Se anziché fra 0 e 1000 fossero generati numeri fra 0 e 10000, la risoluzione dello strumento sarebbe un ordine di grandezza migliore.

Gli ADC possono essere di due tipi: peak-sensing o charge sensitive. Il primo caso corrisponde all'esempio che abbiamo trattato più sopra e concerne la digitalizzazione del valore massimo di un segnale in tensione. Il secondo invece riguarda la digitalizzazione dell'integrale temporale di un segnale in corrente (ovvero della carica trasportata dal segnale); un esempio può essere il segnale prodotto da un fototubo per la rivelazione di segnali veloci, che cioè si sviluppano completamente nell'arco di poche frazioni ($\sim 10^{-7}$ o inferiore) di secondo.

Il tempo d'integrazione o il periodo temporale durante il quale l'ADC esplora il segnale alla ricerca del suo valore di tensione massima, è usualmente determinato dalla durata temporale di un opportuno segnale detto di gate. Vi sono oggi molteplici metodi elettronici di uso corrente per effettuare la conversione analogico-digitale di un segnale.

Una delle prime tecniche adottate, e al tempo stesso fra le più semplici, è la

cosiddetta rampa o tecnica di Wilkinson, adatta ad analizzare soprattutto il contenuto in carica di un segnale.

Il primo passo di tale tecnica consiste nel caricare un condensatore col segnale in ingresso che si vuole analizzare. Il condensatore viene quindi "runned down", ovvero scaricato uniformemente a velocità costante. All'inizio del processo di scarica si attiva una scala di conteggio nella quale si immettono impulsi prodotti da un generatore a frequenza costante. La scala di conteggio viene fermata quando il condensatore risulta completamente scaricato. Il contenuto della scala risulta quindi essere un numero intero, proporzionale alla carica originariamente posseduta dal condensatore, ed è quindi proporzionale al segnale con cui il condensatore è stato caricato. La tecnica di Wilkinson ora descritta è anche schematicamente illustrata nel seguente diagramma di figura A2.1.

Un'altra tecnica spesso utilizzata, adatta ad analizzare l'ampiezza massima di impulsi, è quella delle approssimazioni successive. In tal caso l'impulso

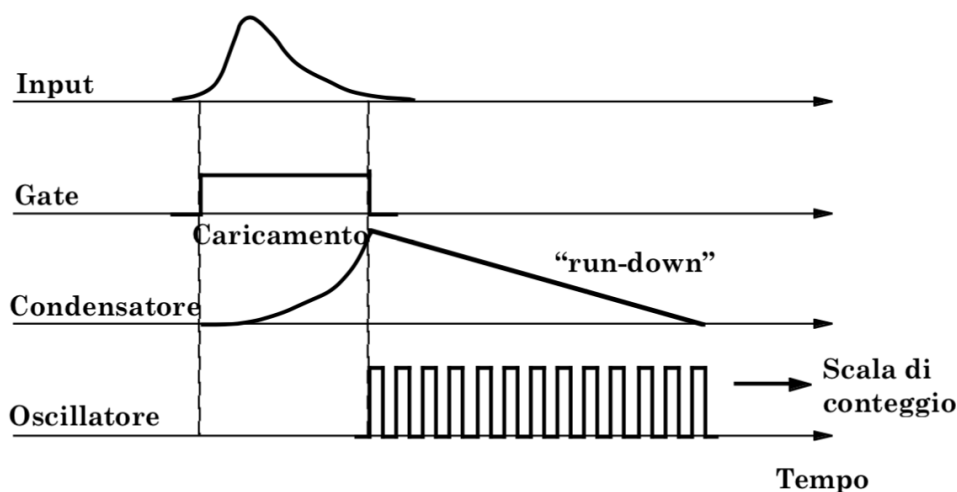


Figura B.1:

entrante è confrontato con una serie di tensioni di riferimento per determinarne l'altezza. Si supponga ad esempio che l'ADC accetti segnali sino ad un valore massimo V_{Max} e che il segnale in ingresso sia pari a $V_0 = 0.8 \cdot V_{Max}$. In tal caso l'ADC confronterà dapprima V_0 con $0.5 \cdot V_{Max}$, e trovandolo maggiore porrà pari ad uno il primo bit del numero digitale. Quindi il confronto procederà con un nuovo riferimento ottenuto aggiungendo al precedente, $0.5 \cdot V_{Max}$, la sua metà: $0.25 \cdot V_{Max}$. Anche in tal caso il segnale in ingresso risulta maggiore e quindi anche il secondo bit del numero digitale viene posto uguale ad uno. Il confronto prosegue quindi con un nuovo riferimento ottenuto dal precedente aggiungendogli la metà di quanto aggiunto nell'ultimo caso, ovvero $0.125 \cdot V_{Max}$. In tal caso V_0 risulta però inferiore al nuovo

riferimento ottenuto, pari a $0.875 \cdot V_{Max}$, quindi il corrispondente bit del numero digitale viene posto uguale a zero. Il passo successivo consiste nel determinare un nuovo riferimento di confronto, sottraendo al precedente la metà di quanto aggiunto precedentemente, e così via sino a quando non si ottiene un numero digitale con la quantità preordinata di bit.

Il tempo richiesto dal processo di digitalizzazione è detto tempo di conversione e per la maggior parte degli ADC è dell'ordine di alcune decine di microsecondi o più, in funzione del numero di bit richiesti. Gli ADC sono quindi dei moduli piuttosto lenti, specie se confrontati con altri quali discriminatori, circuiti di coincidenza, ...

Nel sistema ADC di Wilkinson il tempo di conversione è determinato dalla frequenza del generatore d'impulsi, che unitamente alla derivata della rampa lineare di scarica del condensatore, determina ovviamente anche la risoluzione dello strumento. La sensibilità dei circuiti di clock alle variazioni termiche fa sì che un ADC di Wilkinson, per funzionare al meglio, debba essere tarato ad una certa temperatura e mantenuto, durante l'utilizzo, in un ristretto intervallo termico attorno al valore della temperatura alla quale è avvenuta la taratura.

Il metodo delle approssimazioni successive è generalmente più veloce, anche se le sue qualità di linearità di risposta sono inferiori.

Appendice C

Schema amplificatore fotodiodo

Schema circuitale dell'amplificatore per il fotodiodo utilizzato nello studio della curva I-V di una lampadina a incandescenza.

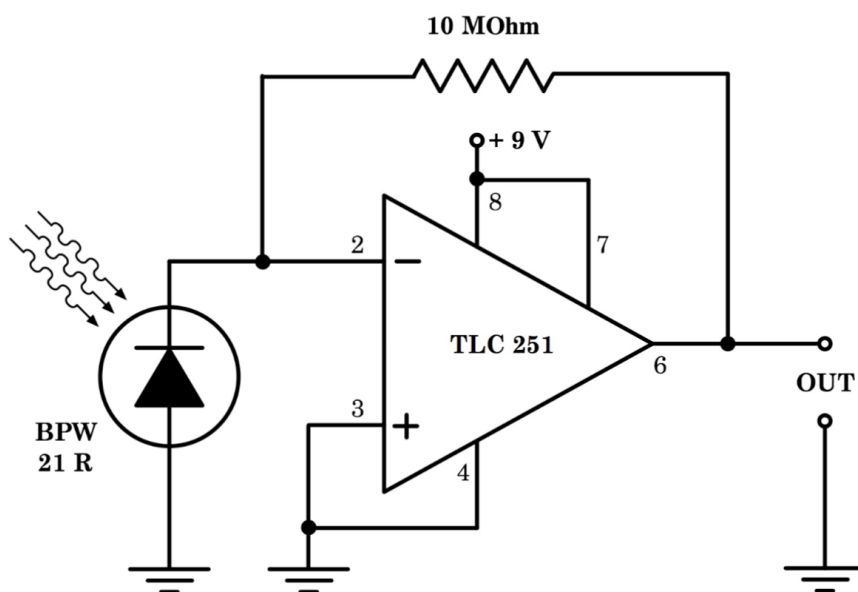


Figura C.1:

Appendice D

Elettrometri a campo ausiliario

Un esempio di elettrometro a campo ausiliario, presente nel piccolo museo del nostro Dipartimento di Fisica, è l'Elettrometro a quadranti di Dolezalek realizzato dalle Officine Galileo nel 1963. L'elettrometro a quadranti è



Figura D.1:

stato lo strumento più diffuso per misure di potenziale elettrico, tra la fine

dell'Ottocento e gli anni Trenta del ventesimo secolo.

Il primo prototipo fu realizzato intorno al 1889 da W. Thomson (lord Kelvin) su suggerimento di Maxwell, e rappresenta una brillante modifica della bilancia di Coulomb: il bilanciante con la sferetta mobile di quest'ultimo è sostituito da una lamina metallica, per lo più a forma di otto, e la sferetta fissa da un sistema di quattro conduttori fissi, detti quadranti, elettricamente connessi a due a due in geometria contrapposta. Per il funzionamento si procede ponendo a terra una coppia di quadranti, e ad un potenziale noto, ad esempio tramite una pila, l'altra coppia di quadranti. Grazie alla particolare geometria degli elettrodi, quando la lamina mobile viene caricata elettricamente ponendola a contatto con il conduttore a potenziale elettrico incognito, il suo spostamento angolare nel campo ausiliario prodotto dai quattro quadranti risulta proporzionale al potenziale da misurare. La lettura dell'angolo di rotazione della lamina è eseguita con il metodo della leva ottica. La taratura dello strumento si effettua attraverso la misurazione di d.d.p. note. Al contrario di quanto avviene negli elettrometri senza campo

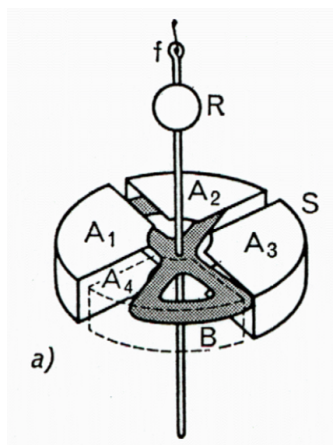


Figura D.2:

ausiliario, nell'elettrometro di Dolezalek la deviazione angolare della bobina cambia senso al cambiare della polarità del potenziale applicato. Ciò rende questo tipo di elettrometri non adatto a misurare tensioni alternate.

Nei primi modelli le oscillazioni dell'equipaggio mobile venivano rapidamente smorzate sospendendo al di sotto dell'equipaggio stesso una goccia di vetro immersa in un piccolo recipiente contenente acido solforico, viscoso e igroscopico. Nelle versioni più moderne lo stesso effetto è ottenuto tramite uno smorzatore elettromagnetico che sfrutta l'insorgenza di correnti parassite ed è costituito da un cilindro di alluminio posto tra i poli di un magnete permanente.

La sensibilità massima di un elettrometro di Dolezalek è dell'ordine di alcune unità di Volt.

Appendice E

Diode a valvola termoionica

La fisica dei tubi elettronici coinvolge più argomenti: emissione e assorbimento di elettroni dalle superfici di solidi; urti fra elettroni e atomi o ioni in gas; traiettorie di elettroni e ioni in campi elettromagnetici.

Qui si accennerà a come questi concorrono alla descrizione del funzionamento di un semplice dispositivo a tubo elettronico quale un diodo ad elettrodi piani.

Si consideri l'emissione di elettroni da un metallo dovuta all'effetto termoionico, ricordando che le energie in un metallo allo zero assoluto sono distribuite tra il valore nullo e il valore massimo E_F , detto energia di Fermi, inferiore all'energia minima E_B necessaria ad estrarre un elettrone dal metallo. Supponendo che il metallo venga riscaldato avviene che la sua struttura reticolare cristallina cede energia termica agli elettroni modificando la loro distribuzione d'energia come qualitativamente mostrato in figura [E.1](#). Questo popola quindi la zona dello spettro energetico degli elettroni

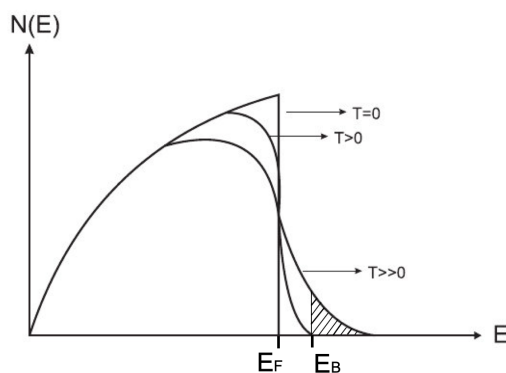


Figura E.1: Distribuzione degli elettroni in un metallo in funzione della temperatura dello stesso.

nel metallo anche nelle zone relative ad energie maggiori di E_B , per cui vi sono in tal caso elettroni in grado di sfuggire dal metallo.

Dushman e Richardson hanno trovato che l'intensità in ampère della corrente termoionica emessa dal metallo è data da

$$I_{th} = SA_0T^2e^{-E_W/kT} \quad (\text{E.1})$$

con S la superficie in m^2 del metallo emettitore, A_0 un'opportuna costante, T la temperatura assoluta del metallo emettitore, k la costante di Boltzmann in $\text{eV}/^\circ\text{K}$, ed E_W il lavoro d'estrazione d'un elettrone in eV.

Si immagini ora una struttura come illustrato in figura E.2, dove si suppone che il tutto sia contenuto in un'ampolla dalla quale sono stati preventivamente estratti al meglio tutti i gas residui. Per raccogliere gli elettroni emessi

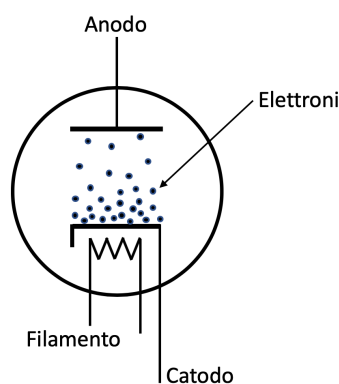


Figura E.2: Struttura schematica di un diodo a valvola termoionica.

dal catodo riscaldato dal filamento viene posizionato un elettrodo con funzione di anodo, e applicando una tensione accelerante fra catodo e anodo si nota che l'intensità della corrente d'elettroni cresce col crescere della tensione fino a raggiungere il valore massimo pari a I_{th} e quindi saturare senza ulteriori crescite anche aumentando ulteriormente la tensione. Si trova che

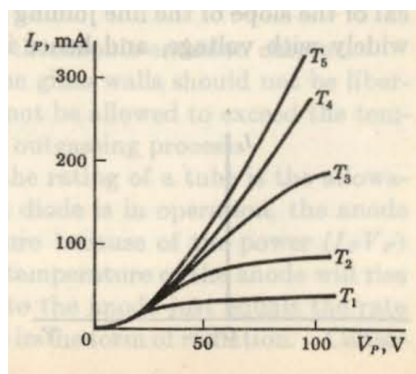


Figura E.3: Curve caratteristiche di un diodo a valvola termoionica per temperature crescenti T_i . La tensione di saturazione cresce con T_i .

un fattore limitativo dell'intensità di corrente raccogliabile all'anodo di un diodo a un certo voltaggio è dovuto alla cosiddetta densità di carica spaziale degli elettroni emessi dal catodo.

I catodi sono solitamente realizzati in tungsteno, eventualmente mescolato con torio e ricoperto di opportuni ossidi, al fine di ottimizzare i flussi di elettroni emittibili.

Per capire il ruolo della densità di carica spaziale si consideri una configurazione con catodo e anodo planari e affacciati parallelamente a una distanza x_0 e si indichi con x l'asse ortogonale alle facce degli elettrodi con origine sulla superficie del catodo e diretto verso l'anodo.

Nell'ipotesi che la velocità del generico elettrone emesso dal catodo sia nulla, ovvero che il lavoro d'estrazione coincida con l'accrescimento d'energia dovuto all'effetto termico, si ha che per qualsiasi temperatura l'intensità massima di corrente raccogliabile all'anodo con una certa tensione accelerante corrisponde al valore nullo di tensione V del catodo, per cui le condizioni ottimali richiedono

$$E = -\frac{dV}{dx} = 0 \quad , \quad \text{per} \quad x = 0 \quad (\text{E.2})$$

Quest'ipotesi è ragionevole tenendo conto delle tensioni V tipicamente applicate e dei bassi valori delle velocità degli elettroni emessi per processi termoionici.

Si cerca ora una relazione fra corrente e tensione applicata. Sia

$$J = \rho v \quad (\text{E.3})$$

l'intensità della corrente fra catodo e anodo, con ρ la densità volumetrica degli elettroni e v la loro velocità di deriva, entrambi funzioni della posizione x fra catodo e anodo ma tali che il loro prodotto sia sempre costante se si suppone che non vi siano perdite o acquisizioni di elettroni nel tragitto fra catodo e anodo, come discende dal principio di conservazione della carica elettrica. Pertanto le velocità saranno molto basse in prossimità del catodo, con densità di carica corrispondentemente alte, e viceversa in in prossimità dell'anodo. Nell'ipotesi quindi che gli elettroni siano emessi con velocità nulla dal catodo si ha

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eV \quad , \quad \text{con l'equazione di Poisson} \quad , \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{E.4})$$

Sostituendo si ha dunque

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{J}{v\epsilon_0} = \frac{J}{[2(e/m)]^{1/2}\epsilon_0} V^{-1/2} = KV^{-1/2} \quad (\text{E.5})$$

con K costante e indipendente da x .

La [E.5](#) si risolve per separazione delle variabili dopo aver posto $y \equiv dV/dx$

ottenendo

$$\frac{y^2}{2} = 2KV^{1/2} + C_1$$

La costante d'integrazione C_1 vale zero in quanto il catodo è a potenziale $V = 0$ e dalla [E.5](#) anche $y = 0$. Prendendo la radice quadrata si ha quindi un'equazione differenziale che integrata a sua volta fornisce

$$\frac{4}{3}V^{3/4} = 2K^{1/2}x + C_2 \quad (\text{E.6})$$

$C_2 = 0$ in quanto $V = 0$ in $x = 0$, e infine:

$$V = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} K^{2/3} x^{4/3} \quad (\text{E.7})$$

Sostituendo K si ottiene quindi, per la densità di corrente

$$J = \frac{4}{9} \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \epsilon_0 \frac{V^{3/2}}{x^2} \quad (\text{E.8})$$

Si può dimostrare che se si possono trascurare le velocità iniziali degli elettroni, un'equazione della forma

$$I = G V^{3/2} \quad (\text{E.9})$$

con G opportuna costante dipendente dalla geometria degli elettrodi, vale appunto per qualunque configurazione di questi ultimi.

Per piccoli valori della tensione V non si possono trascurare gli effetti derivanti dalle velocità iniziali effettivamente non nulle degli elettroni emessi e il ruolo dei potenziali di contatto esistenti a livello degli elettrodi. I piccoli

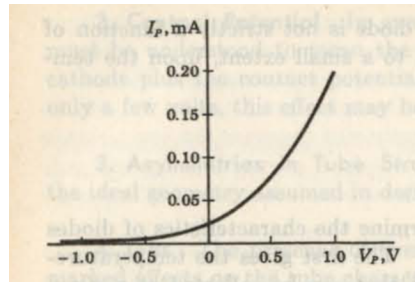


Figura E.4: Curva caratteristiche di un diodo per piccoli voltaggi.

valori delle correnti associate rendono oltretutto trascurabili gli effetti di carica spaziale per cui, in questi limiti, la curva caratteristica di un diodo a valvola termoionica può essere scritta

$$I = I_o e^{eV/kT}$$

con I_o la corrente corrispondente alla tensione $V = 0$

Appendice F

Capacità di un diodo semiconduttore: diodo vario-cap

La struttura di una giunzione p-n, così come descritta, con le due distribuzioni di carica di segno opposto che si fronteggiano, ricorda quella di un condensatore a facce piane parallele. È intuitivo quindi che un diodo presenti degli effetti capacitivi spesso non trascurabili.

Questi possono essere distinti con due termini specifici:

- a. il principale dei due, C_t che dà luogo alla cosiddetta capacità dinamica o capacità di transizione, è connesso al fatto che l'estensione della regione di carica spaziale (o zona di svuotamento), e quindi la carica in essa contenuta, dipendono direttamente dalla tensione applicata alla giunzione;
- b. il secondo, C_d che dà luogo alla cosiddetta capacità di diffusione, e dipende dalla variazione, al variare della tensione applicata, della distribuzione delle cariche immagazzinate nelle regioni quasi neutre della giunzione.

In condizioni di polarizzazione diretta C_d e C_t sono confrontabili, e bisogna quindi tener opportunamente conto di entrambi; in condizioni di polarizzazione inversa invece, C_d è trascurabile e si può efficacemente tener conto del solo termine C_t .

Si fanno ora alcune considerazioni che permettano di esprimere C_t in funzione della tensione di polarizzazione inversa applicata al diodo, e capire quindi come poterla sfruttare operativamente.

Si suppongano condizioni ideali di campo nullo al di fuori della giunzione. Sia x la coordinata lungo la direzione ortogonale alla superficie che individua la giunzione che per semplicità si suppone piana, senza con ciò togliere generalità alle conclusioni che si dedurranno. Si supponga anche che $x = 0$

sia la coordinata dell'inizio dello spessore della zona di svuotamento. Come mostrato ad esempio in figura 1.34, la superficie che individua la giunzione si trova in corrispondenza della coordinata x per la quale il campo elettrico $\vec{E}(x)$ presente ha modulo massimo.

Dette $\sigma(x)$ la densità superficiale di carica, funzione della coordinata x , ed ϵ la costante dielettrica del materiale nella zona della giunzione, si ha, sfruttando ad esempio il teorema di Gauss:

$$|\vec{E}(x)| = E(x) = \frac{\sigma(x)}{2\epsilon} \quad (\text{F.1})$$

con $\sigma(x) = Q(x)/A$, dove A è l'area della superficie della giunzione, mentre $Q(x)$ è la carica totale presente nello spessore della zona di svuotamento compresa fra 0 ed x . Introducendo ora la densità lineare di carica $\lambda(x) = Q(x)/x$, si può porre

$$E(x) = \frac{\sigma(x)}{2\epsilon} = \frac{Q(x)}{2\epsilon A} = \frac{\lambda(x)}{2\epsilon A} x \quad (\text{F.2})$$

Per quanto concerne il potenziale $V(x)$ si ha quindi:

$$V(x) = - \int_0^x E(x^*) dx^* = - \frac{1}{2\epsilon A} \int_0^x \lambda(x^*) x^* dx^* \quad (\text{F.3})$$

e

$$= \left| - \int_0^{\Delta x} E(x^*) dx^* \right| = \left| - \frac{1}{2\epsilon A} \int_0^{\Delta x} \lambda(x^*) x^* dx^* \right| \quad (\text{F.4})$$

e la differenza di potenziale totale riferita all'intera zona di svuotamento di spessore $\Delta s = \Delta s_p + \Delta s_n$. Il valore assoluto della carica presente nel tratto p (di spessore Δs_p) o in quello n (di spessore Δs_n) della zona di svuotamento è dato da:

$$Q = \left| \int_0^{\Delta s_p} \lambda(x^*) dx^* \right| = \left| \int_{\Delta s_p}^{\Delta s} \lambda(x^*) dx^* \right| \quad (\text{F.5})$$

Supponiamo, per semplificare la trattazione, di rifarci ad un caso particolare in cui:

$$\Delta s_p = \Delta s_n = \frac{\Delta s}{2} \quad \text{e} \quad \lambda(x) = \begin{cases} -\lambda_0 & \text{per } x < \Delta s/2 \\ \lambda_0 & \text{per } x > \Delta s/2 \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

in tal caso si ha:

$$\Delta V = \frac{\lambda_0 (\Delta s)^2}{4\epsilon A} \quad , \quad Q = \frac{\lambda_0 \Delta s}{2} \quad (\text{F.7})$$

da cui:

$$\frac{\Delta s}{2} = \frac{Q}{\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{Q^2}{\epsilon A \lambda_0} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\epsilon A \lambda_0 \Delta V} \quad (\text{F.8})$$

Si può dunque definire la capacità dinamica, o di transizione, del diodo come:

$$C_t = \frac{dQ}{dV} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon A \lambda_0}{\Delta V} \right)^{-1/2} \propto (\Delta V)^{-1/2} \quad (\text{F.9})$$

Chiaramente diverse formw per la distribuzione lineare di carica $\lambda(x)$ daranno luogo a diverse dipendenze di C_t da ΔV , anche se del tipo $\propto (\Delta V)^{-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$.

Un diodo può quindi essere opportunamente utilizzato come elemento capacitivo variabile in un circuito, con valore della capacità controllata tramite la tensione di polarizzazione inversa. Ovviamente ciò vale per ogni diodo a semiconduttore, ma ve ne sono in commercio di specifici. In tabella sono riportate come esempio le caratteristiche tecniche di alcuni di essi.

Sigla	Capacità min. (pF)	Capacità max. (pF)	Tensione inv. max (V)
BA102	15	60	30
BA138	5	15	30
BA182	1	5	25
BB103	5	45	30
BB104	15	70	30
BB130	25	500	25

Le caratteristiche indicate fanno sì che i diodi vario-cap rappresentino delle ottime alternative agli ingombranti condensatori variabili un tempo presenti nelle apparecchiature radio-riceventi.

Appendice G

Misure di sfasamenti: figure di Lissajous

Il moto del fascio elettronico lungo l'asse orizzontale di un oscilloscopio, che quando si osserva un segnale nel suo sviluppo temporale per studiarne caratteristiche e forma viene gestito da un segnale a dente di sega inviato alle placche verticali, può essere anche pilotato da altri segnali inviati dall'esterno.

Inviando alle placche di deflessione orizzontale e verticale segnali in tensione del tipo:

$$V_x(t) = V_{x0}\cos(\omega_x t + \varphi_x) \quad (\text{G.1})$$

alle placche verticali, di deflessione orizzontale,

$$V_y(t) = V_{y0}\cos(\omega_y t + \varphi_y) \quad (\text{G.2})$$

alle placche orizzontali, di deflessione verticale, con V_{x0} e V_{y0} le ampiezze, ω_x e ω_y le pulsazioni, φ_x e φ_y le fasi dei due segnali, che risultano quindi due moti oscillatori ortogonali impressi al fascetto elettronico del tubo catodico, quello che si ottiene e visualizza sullo schermo sono le cosiddette figure di Lissajous¹. La loro utilità, oltre alla piacevolezza estetica, è che permettono, a colpo d'occhio, di poter valutare la molteplicità della frequenza di un segnale ondulatorio rispetto all'altro, quando questa è intera e non troppo alta, e lo sfasamento relativo fra due segnali ondulatori, purchè questo non sia troppo piccolo (molto dipende anche da quanto è allenato l'occhio dell'osservatore a riconoscere le figure in questione).

Se le impedenze in ingresso per i segnali inviati alle placche di deflessione verticale e orizzontale sono uguali, e così pure le ampiezze dei due segnali ortogonali inviati, allora al variare degli sfasamenti e dei rapporti in frequenza si ottengono sullo schermo dell'oscilloscopio figure simili a quelle di seguito riportate.

¹Jules Antoine Lissajous (1822-1880), fisico francese. Prima di lui, nel 1815, l'astronomo americano Nathaniel Bowditch aveva già studiato queste curve.

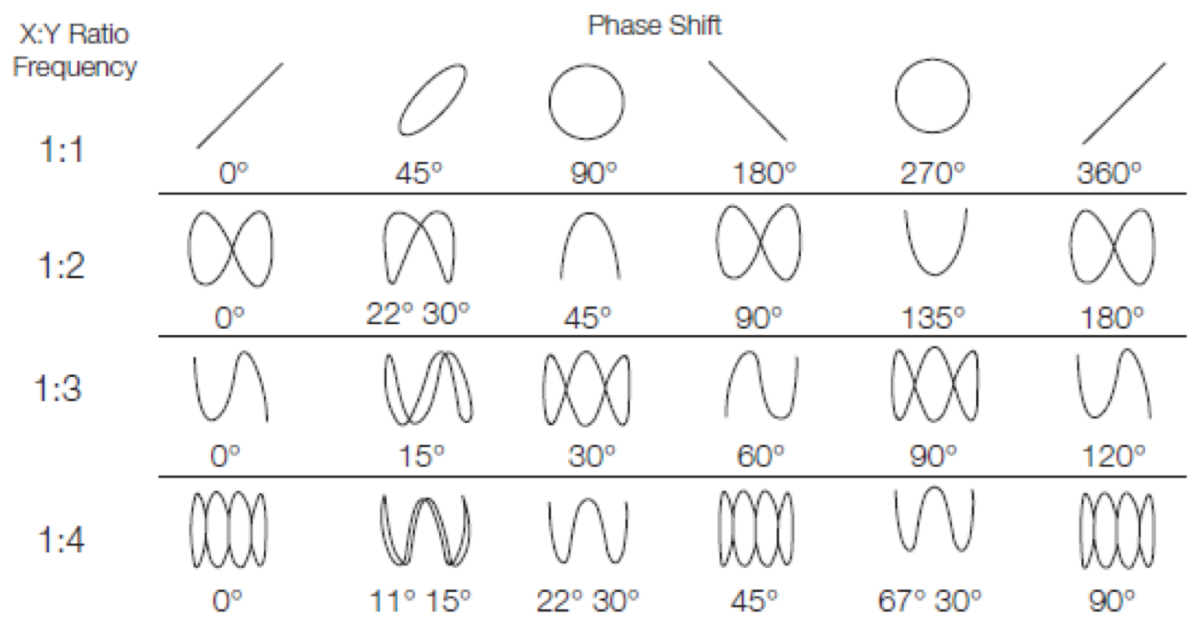


Figura G.1: Figure di Lissajous

Appendice H

Circuiti LC in serie e in parallelo