12 ottobre

Polinomi. Sono della forma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

dove z è la variabile e

$a_0, \dots, a_n$ sono i coefficienti del polinomio. Qui $a_n \neq 0$

n è il grado del polinomio

Esempi 1) $p(z) = z^2 + 1$ grado $p = 2$

2) $p(z) = 1 z^0$ ha grado 0.

<u>Osserviamo</u> 1) Che ~~che~~ il polinomio $p(x) = x^2 + 1$ non è mai uguale a 0 in $\mathbb{R}$.

Tuttavia l'equazione $z^2 + 1 = 0$ ha soluzioni $z = \pm i$ tra i numeri complessi

2) Infatti più in generale $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ l'equazione

$$a z^2 + b z + c = 0$$ ha soluzioni

$$z_\pm = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se $\Delta \doteq b^2 - 4ac < 0$ allora

$$z_\pm = -\frac{b}{2a} \pm i \sqrt{-\Delta}$$

3) Dato un polinomio $p(z)$, una soluzione z_0 di $p(z) = 0$ viene detto uno zero o una radice di $p(z)$

$p(z_0) = 0$ significa che z_0 e' uno zero o una radice di $p(z)$

4) $a \neq 0$

$$a z + b = 0 \qquad z = -\frac{b}{a}$$

Teorema (Fond. dell'Algebra 1° versione)

Sia $p(z)$ un polinomio di grado ≥ 1.
Allora esso ha una radice in $\mathbb{C}$.

Teor (2° versione)

Sia $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ un polinomio con $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$, k numeri complessi distinti $\{z_1, \dots, z_k\}$ e k numeri naturali $m_1, \dots, m_k$ e si ha

$$m_1 + \dots + m_k = n$$

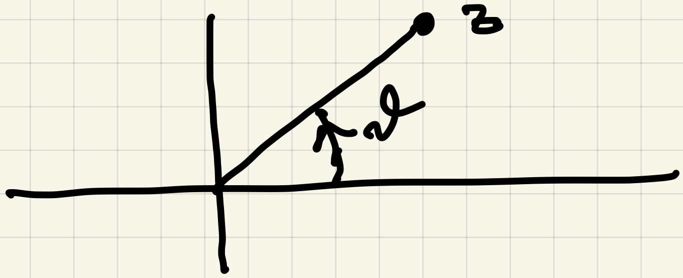
$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k}.$$

Gli $z_1, \dots, z_k$ sono le radici di $p(z)$ e i $m_1, \dots, m_k$ sono le loro molteplicità.

Formule di De Moivre

Dato $z = x+iy = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$r = |z|$



(r,ϑ)

$$z^n = r^n\left(\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)\right)$$

$(r^n, n\vartheta)$ risultano coordinate polari di z^n.

$$z^n=(x+iy)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (iy)^{n-j}$$

Teor (Radici dell'unità) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ gli zeri di $z^n = 1$ sono esprimibili come

$$z_j = \cos\left(\frac{2\pi}{n} k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n} k\right)$$

$$k = 0, \dots, n-1.$$

Dim Sia z una soluzione di $z^n = 1$
In coordinate polari $z = r(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$
con r e ϑ due incognite.
$z^n = 1$ è equivalente

$$\cancel{r^n}\left(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)\right) = 1$$

$$|r^n(\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))| =$$

$$r^n \, |\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)| = r^n = 1$$

$$\Longrightarrow \quad r = 1$$

$$\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) = 1$$

$$\begin{cases} \cos(n\vartheta) = 1 \\ \sin(n\vartheta) = 0 \end{cases} \Longrightarrow n\vartheta = 2\pi k$$

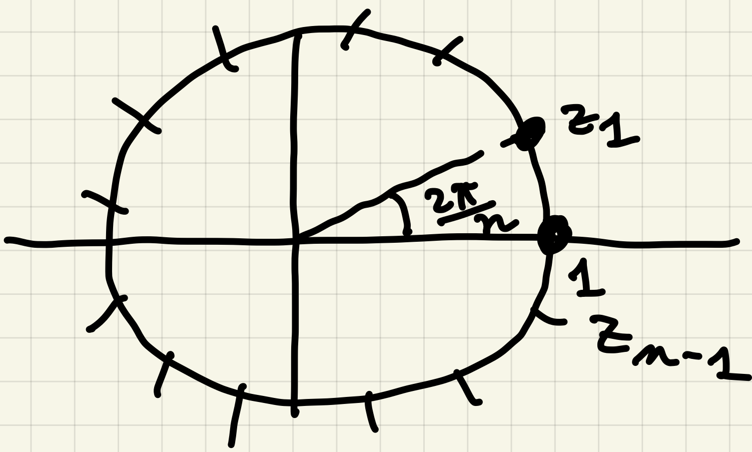
$$k \in \mathbb{Z}$$

$$n\vartheta = 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\vartheta = \frac{2\pi k}{n}$$

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

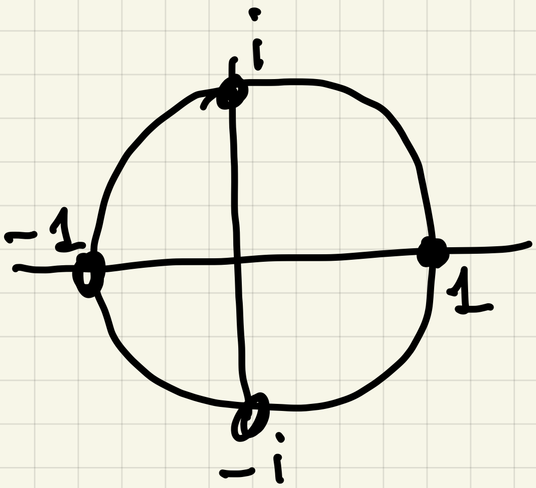
Per $k = 0, \dots, n-1$ si ottengo degli z_k a due a due distinti



$z_0 = 1$

$$z^4 = 1$$

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{4}\right)$$



$z^n = w_0$ con $w_0 \in \mathbb{C}$

$z^n = 0$ ha radice $z = 0$ di molteplicità n.

$z^n = w_0$ con $w_0 \neq 0$

$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$w_0 = |w_0| (\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0)$

dove $|w_0|$ ed α_0 sono dati.

$$\cancel{r^n}\left(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\right) = \cancel{|w_0|}\left(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0\right)$$

$$r^n = |w_0| \iff r = |w_0|^{\frac{1}{n}}$$

$$\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta) = \cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0$$

$$\begin{cases} \cos(n\vartheta) = \cos\alpha_0 \\ \sin(n\vartheta) = \sin\alpha_0 \end{cases} \Longrightarrow n\vartheta = \alpha_0 + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\vartheta_k = \frac{\alpha_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \qquad k = 0, \dots, n-1$$

$$\Longrightarrow \quad z_k = |w_0|^{\frac{1}{n}} (\cos\vartheta_k + i\sin\vartheta_n)$$

Sono n numeri distinti

Es $\quad (1+i)^{\frac{1}{8}} \qquad z^8 = 1+i$

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

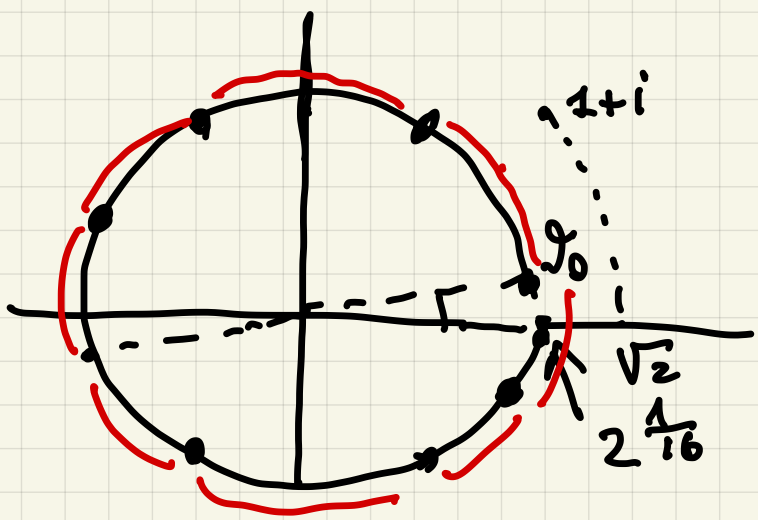
$$1+i = \sqrt{2}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$|z| = \sqrt[8]{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{16}}$$

$$z_k = 2^{\frac{1}{16}}\left(\cos\vartheta_k + i\sin\vartheta_k\right)$$

$$\vartheta_k = \frac{\pi}{32} + \frac{2\pi k}{8} \qquad k = 0,\dots,7$$



$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{32}$$

$z^6 - |z|^4 + |z|^2 = 1 \qquad z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$\underbrace{r^6(\cos(6\vartheta) + i\sin(6\vartheta))} - r^4 + r^2 = 1$$

$$r^6\cos(6\vartheta) + i r^6\sin(6\vartheta) - r^4 + r^2 = 1$$

$$\begin{cases} r^6\cos(6\vartheta) - r^4 + r^2 = 1 & \checkmark \\ r^6\sin(6\vartheta) = 0 \end{cases}$$

$r^6 \sin(6\vartheta) = 0 \iff r = 0$ o $\sin(6\vartheta) = 0$

$r = 0$ non risolve il sistema.

$\sin(6\vartheta) = 0 \implies \cos(6\vartheta) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Incominciamo sostituendo nella 1° equazione $\cos(6\vartheta) = -1$

$$-r^6 - r^4 + r^2 = 1$$

$r^2 = 1 + r^4 + r^6$ non ha soluzioni $r \geq 0$ perché, per

$0 \leq r < 1 \implies r^2 < 1 \leq 1 + r^4 + r^6$
$\implies r^2 < 1 + r^4 + r^6$

Mentre per $r \geq 1$

$$r^2 \leq r^6 \implies r^2 < r^6 + 1$$

$$\implies r^2 < r^4 + r^6 + 1$$ quindi

non posso mai avere $r^2 = r^4 + r^6 + 1$

$\cos(6\vartheta) = 1$

$$r^6 - r^4 + r^2 - 1 = 0$$
$$r^4(r^2 - 1) + r^2 - 1 = 0$$
$$(r^4 + 1)(r^2 - 1) = (r^4 + 1)(r + 1)(r - 1) = 0$$

$$\implies r = 1$$

$$\begin{cases} \sin(6\vartheta) = 0 \\ \cos(6\vartheta) = 1 \end{cases} \implies 6\vartheta = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\vartheta_k = \frac{2\pi k}{6} \qquad k = 0, \dots, 5$$