

# RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA

$$v \in V_{\mathbb{R}} \quad v \mapsto e^{id^a t_R^a} v$$

↑  
sp. vett. sul  
campo  $\mathbb{C}$

$$v^* \mapsto e^{-id^a t_R^{a*}} v^*$$

formisano una  
RAPP. di  $G$

$$\rightarrow v^* \in \bar{V}$$

$$t_{\bar{R}}^a = -t_R^{a*}$$

Se consideriamo RAPP. UNITARIE di  $G$  (HERM. di  $G$ )

$$t_{\bar{R}}^a = -t_R^{a*} = -t_R^{aT}$$

$$\begin{aligned} [-t_R^{aT}, -t_R^{bT}] &= t_R^{aT} t_R^{bT} - t_R^{bT} t_R^{aT} = -([t_R^a, t_R^b])^T = \\ &= - (if^{abc} t_R^c)^T = if^{abc} (-t_R^c)^T \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$  è equiv. a  $\bar{\mathbb{R}}$  (e in pb con è definita rep. REALE)

se  $\exists$  una transf. unitaria  $U$  t.c.  $t_{\bar{R}}^a = U t_R^a U^T$

$\rightarrow$  in questo caso  $\exists G_{ij}$  t.c.  $\forall \xi, \eta \in V_{\mathbb{R}}$

$$G_{ij} \eta_i \xi_j \text{ è INVARIANTE}$$

Si distinguono due casi di rep. REALE:

1)  $G_{ij}$  è SIM  $\rightarrow \mathbb{R}$  è REALE

2)  $G_{ij}$  è ANTISIM  $\rightarrow \mathbb{R}$  è PSEUDO REALE

ES.  $SU(2)$

$$R = \underline{2} \quad t_R^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad a=1,2,3 \quad = G$$

$$t_{\bar{R}}^a = -\left(\frac{\sigma^a}{2}\right)^T = (i\sigma^2) \frac{\sigma^a}{2} (-i\sigma^2) \quad U = i\sigma^2 = \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{PSEUDO-REALE}$$

$$R = \mathbb{Z}$$

$t_R^a$  sono matrici immaginarie

$$G_{ij} = \delta_{ij}$$

→ REALE



## RAPPRESENTAZ. AGGIUNTA (Ad)

$V_R = \mathfrak{g}$  Il prodotto di Lie  $[\cdot, \cdot]$  fornisce un'azione lineare di  $\mathfrak{g}$  su  $\mathfrak{g}$  stessa

Prendiamo  $X \in \mathfrak{g}$ , allora  $[X, \cdot]$  è una mappa lineare su  $\mathfrak{g}$

→ può essere rep. da matrici, una volta che scegliamo una base  $T^a$

$$\underbrace{t_{Ad}^a}_{\text{matrice}} \cdot T^b = [T^a, T^b] = i f^{abc} \underbrace{T^c}_{\text{cons. lin. dirett.}}$$

$$A \cdot \underline{e}_m = a_{im} \underline{e}_i$$

↑  
elem. della matrice  
di rep. A

$$V = V_i \underline{e}_i$$
$$(A \cdot V)_j = a_{ji} V_i$$

$$(t_{Ad}^a)^{cb} = i f^{abc}$$

$f^{abc}$  sono REALI e ANTISIMM  $\Rightarrow -(t_{Ad}^a)^T = t_{Ad}^a$   
→ REALE

$$\dim \text{Adj} = \begin{cases} N^2 - 1 & \text{SU}(N) \\ N(N-1)/2 & \text{SO}(N) \\ N(N+1)/2 & \text{Sp}(N) \end{cases}$$

Nota:  $\dim SU(2) = \dim SO(3)$

→ non è un caso: le alg. di Lie sono ISOTORFE

l'alg. dei MOMENTI ANGOLARI  
(generatori delle rotazioni)

$$\left. \begin{array}{l} R = 1 \\ R = 2 \\ R = 3 \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{spin} = 0 \\ \text{spin} = 1/2 \\ \text{spin} = 1 \\ \vdots \end{array}$$

questo numero dà il valore di  $\bar{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$

In una IRREP  $\bar{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 \mathbb{1}_R \rightarrow$  caso costante con  
ogni elem. dell'alg., e in  
partic. comm. con tutti i generatori

## CASIMIR OPERATOR

Per ogni rapp.  $R$  di  $\mathfrak{g}$ , la matrice

$$T^2 \equiv t_R^a t_R^a \quad (\text{somma su } a)$$

commuta con tutti i  $t \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} [t_R^b, t_R^a t_R^a] &= t_R^a [t_R^b, t_R^a] + [t_R^b, t_R^a] t_R^a = \\ &= t_R^a i f^{bac} t^c + i f^{bca} t^c t_R^a = \\ &= i t_R^a t^c (f^{bac} + f^{bca}) = 0 \end{aligned}$$

$T^2$  si dice un INVARIANTE dell'alg., prende un valore  
fisso in ogni IRREP

$$\Rightarrow \text{tr}_R t_R^a t_R^a = C_2(R) \mathbb{1}_R \quad C_2(R) \text{ è chiamato}$$

QUADRATIC CASIMIR OPERATOR

$$1_4 \quad R = \text{Adj}$$

$$i f^{abc} i f^{acd} = C_2(G) \delta^{bd}$$

$$\rightarrow f^{bac} f^{dac} = C_2(G) \delta^{bd}$$

(l'invariante  $C(R)$ , legata alle normalizzazioni, può essere derivata se conosciamo  $C_2(R)$ ):

$$\begin{aligned} \text{tr}_R t_R^a t_R^a t_R^a &= C_2(R) \text{tr}_R \mathbb{1}_R = & C_2(R) \dim(R) \\ \parallel & & \parallel \\ \delta^{ab} \text{tr}_R t_R^a t_R^b &= C(R) \delta^{ab} \delta^{ab} = & C(R) \dim(G) \end{aligned}$$

ES.  $SU(N) \quad C(N) = 1/2$

$$\begin{aligned} \rightarrow C_2(N) &= C(N) \frac{\dim(SU(N))}{\dim(N)} = C(N) \frac{N^2 - 1}{N} \\ &= \frac{N^2 - 1}{2N} \end{aligned}$$

PRODOTTO TENSORE DI RAPP.

Consideriamo lo sp. vett.  $V_{R_1} \otimes V_{R_2}$  dove  $R_1, R_2$  sono IRREP

Qto è lo sp. vett. di una RAPP. che  
diciamo  $R_1 \otimes R_2 \rightarrow \dim(R_1 \otimes R_2) = \dim R_1 \cdot \dim R_2$

1 generatore sono:

$$t_{R_1 \otimes R_2}^a = t_{R_1}^a \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes t_{R_2}^a \quad (*)$$

In generale  $R_1 \otimes R_2$  è RIDUCIBILE :

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_i R_i \quad (**)$$

Calcolerò op :

$$\begin{aligned} (t_{R_1 \otimes R_2}^a)^2 &= (t_{R_1}^a)^2 \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes (t_{R_2}^a)^2 + \\ &+ 2 t_{R_1}^a \otimes t_{R_2}^a \end{aligned}$$

Facciamo la traccia  $(\text{Tr}(A \otimes B) = (\text{tr} A) (\text{tr} B) \text{ prop. distrib.})$

$$\begin{aligned} \text{Ar} (t_{R_1 \otimes R_2}^a)^2 &= \dim R_2 \text{tr} (t_{R_1}^a)^2 + \dim R_1 \text{tr} (t_{R_2}^a)^2 = \\ &= [c_2(R_1) + c_2(R_2)] \dim R_1 \cdot \dim R_2 \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\text{Ar} (t_{R_1 \otimes R_2}^a)^2 = \sum_i \text{Ar} (t_{R_i}^a)^2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i$$

$$(c_2(R_1) + c_2(R_2)) \dim R_1 \dim R_2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i \quad (**)$$

Es:  $SU(N) \quad R_1 = N \quad R_2 = \bar{N}$

$N \otimes \bar{N} \rightarrow$  elem. di  $V_{N \otimes \bar{N}}$  sono matrici  $N \times N$   
 e tali matrici possono essere scritte  
 come  $\alpha \delta^{ij} + M_{ij}$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   $\nwarrow$   
 $1$   $\text{traceless}$   $N^2 - 1$

$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus \text{Ad}$   $\frac{N^2 - 1}{2N}$   $\begin{matrix} 0 \\ \parallel \\ 0 \end{matrix}$   
 Appellazioni (H)  $2 C_2(N) N^2 = C_2(1) \dim(1) + C_2(G) \dim G$   
 $\Rightarrow C_2(G) = N \Rightarrow C(N) = N$

# SIMMETRIA DI GAUGE

→ simm. interne locali (non Lorentz.)

→ Necessarie per descrivere campi con spin 1 e massa nulla (per i campi con spin 2 si rivedono locali le transf. di Lorentz/Poincaré  $\rightsquigarrow$  GRAVITA' )

→ Es. più semplice

$$L_0 = i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \quad \begin{array}{l} \sigma^\mu (1, \sigma^i) \\ \bar{\sigma}^\mu (1, -\sigma^i) \end{array}$$

invariante sotto  $\psi_L \mapsto e^{i\alpha} \psi_L$

→ GAUGING:  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$

$L_0$  non è più invariante (a causa della presenza

↓  
Introduciamo DERIVATA COVARIANTE  $D_\mu \psi$  ( $\partial_\mu \psi_L$ )

A.c.  $D_\mu \psi_L \mapsto e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi_L$

$\Rightarrow L = i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_L$  è inv. sotto transf. di gauge  
 $\psi_L(x) \mapsto e^{i\alpha(x)} \psi_L(x)$

$L_0(\phi, \partial\phi)$  inv. sotto transf. globali

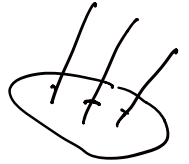
$\Rightarrow L(\phi, D\phi)$  " " " locali (di gauge)

Γ Più formalmente la derivata di  $\psi(x)$  nella direzione  $n^\mu$  è

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)}{\epsilon}$$

$\leftarrow$   $\uparrow$  transf. in variabile diretta

$\psi$  è una sezione di un FIBRATO VETTORIALE



Per ovviare a pte. considerazioni, esso introduce una CONNESSIONE

$$D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*M) \quad \text{mappa lineare}$$

che soddisfa

$$1) \quad D(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2) = \alpha_1 D_1 s_1 + \alpha_2 D_2 s_2 \quad \text{L.I.N.}$$

$$3) \quad D\left(\int_{\text{form.}} s\right) = d\int s + \int Ds \quad \text{LEIBNIZ RULE}$$

Se uno prende trivialità locale (rist. coordine)  $S \in E_x$

$$D_\mu S = \partial_\mu S + i A_\mu S$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 opera  $\mu$   $\uparrow$   
 tutte le  $\uparrow$   
 connessioni  $\uparrow$   
 op. lineare da distinguere  
 tra le diverse connessioni

Elettrodinamica scalare:  $\phi$  scalare complesso  $\phi(x) \in E_x \cong \mathbb{C}$