13 ottobre.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

<u>Teor</u> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Solo enunciato

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

<u>Def</u> Due sottoinsiemi di $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$, A e B formano una coppia separata se

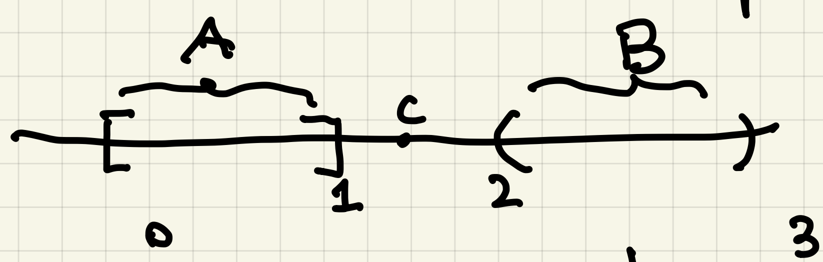
$$a \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

Assioma (Di Separazione) Dedekind Per ogni coppia di sottoinsiemi separati A e B in $\mathbb{R}$ $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$a \le c \le b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

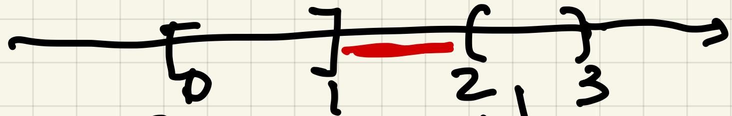
c si dice un elemento di separazione

Esempi



$$A = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$$
$$B = (2,3) = \{x : 2 < x < 3\}$$

A e B sono una coppia separata



$$A = [0,1] = \{a \in \mathbb{R} : 0 \le a \le 1\}$$
$$B = (2,3) = \{b : 2 < b < 3\}$$

A e B sono una coppia separata

Qualsiasi $1 \le c \le 2$ soddisfa la proprietà

$$a \le c \le b \quad \forall\, a \in [0,1] \text{ e } \forall\, b \in (2,3)$$

Infatti $a \underset{\text{dalla def di A}}{\le} 1 \le c \le 2 \underset{\text{dalla def di B}}{<} b$

Es Sia $A = \{ a > 0 : a^2 < 2 \}$
$B = \{ b > 0 : b^2 > 2 \}$

A e B sono una coppia separata con $a < b \quad \forall a \in A$ e $\forall b \in B$

Infatti $a < b \iff a^2 < b^2$, visto che a e b sono positivi

$a^2 < b^2$ segue da
$$a^2 < 2 < b^2 \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

L'assioma di separazione garantisce l'esistenza di $c \in \mathbb{R}_+$ t.c.
$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$$

Si dimostra che
$$c^2 = 2$$

Def $\mathbb{R}$,

Con $\overline{\mathbb{R}}$ intendiamo

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

$\overline{\mathbb{R}}$ è la retta reale estesa

Def (Estremo superiore)

Sia X un sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$

Un $c \in \overline{\mathbb{R}}$ che soddisfa le seguenti due proprietà è detto estremo superiore di X ed è denotato con $\sup X$:

1) $c \geq x \quad \forall\, x \in X$

2) $y \geq x \;\; \forall\, x \in X \implies y \geq c$.

Teor Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1) $\mathbb{R}$ soddisfa l'assioma di separazione

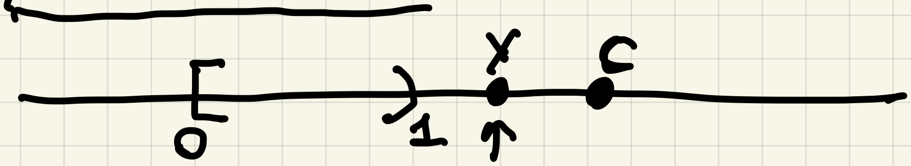
2) $\forall \; X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ non vuoto esiste $\sup X$.

Inoltre $\forall X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ $\sup X$ è unico.
solo enunciato

Per $X \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$ è $c = \sup X$ se

1) $c \geq x \quad \forall x \in X$

2) $y \geq x \quad \forall x \in X \Rightarrow y \geq c$

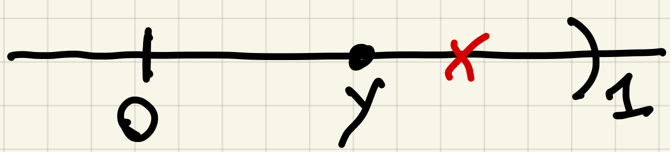


$[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

Dimostriamo che $\sup[0,1) = 1$

1 ovviamente soddisfa la propr 1) perché da $x < 1 \quad \forall x \in [0,1)$

Il fatto che $1 = \sup[0,1)$ segue dal fatto che se $y \geq x \quad \forall x \in [0,1)$ non può essere $y < 1$. Infatti se fosse $y < 1$ avremmo $y \in [0,1)$



Allora $y < \frac{y+1}{2} < 1$

$0 \leq y < 1 \implies y < \frac{y+1}{2} < 1$

$y < \frac{y+1}{2} \iff \cancel{2}y < \cancel{y} + 1 \iff y < 1$

$\frac{y+1}{2} < 1 \iff y + \cancel{1} < \cancel{2}\,1 \iff y < 1$

se y soddisfa $0 \leq y < 1$ allora

abbiamo $0 \leq y < \frac{y+1}{2} < 1$

$\implies \frac{y+1}{2} \in [0,1)$ ed è

strettamente maggiore di y. Assurdo!

Conclusione:

se $y \geq x \quad \forall\, x \in [0,1)$ allora

$y \geq 1 \implies 1$ verifica anche

la 2° proprietà $\implies 1 = \sup [0,1)$

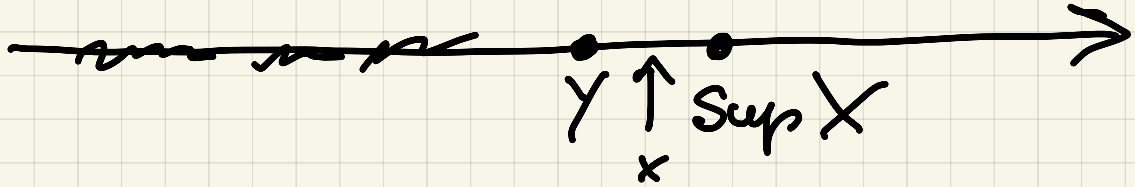
Def Dato $X \subseteq \mathbb{R}$,

se $\sup X = +\infty$ X si dice superiormente illimitato, mentre se $\sup X < +\infty$ allora X si dice superiormente limitato.

Lemma Sia $X \subseteq \mathbb{R}$.

Allora se $y < \sup X$ esiste $x \in X$ con

$$y < x \leq \sup X$$



Dim (Per assurdo) Neghiamo che l'enunciato sia vero. Supponiamo che esistono $X \subseteq \mathbb{R}$ ed un

$\mathbb{R} \ni y < \sup X$ con $x \leq y \quad \forall x \in X$

Per la 2° proprietà del sup,

$x \leq y \quad \forall x \in X \implies y \geq \sup X > y$

$\implies y > y$ assurdo.

<u>Lemma</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X < \infty$

Allora $c \in \mathbb{R}$ coincide con $\sup X$
se sono soddisfatte:

1) $c \geq x \quad \forall x \in X$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in X$ t.c.

$$c - \varepsilon < x \, .$$

<u>Dim</u> Dimostriamo che se pongo $c = \sup X$
allora c verifica 1') e 2').
La prima proprietà del sup
garantisce che $c \geq x \quad \forall x \in X \implies$
c soddisfa 1')

Dimostriamo ora che se $c = \sup X$ allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in X$ t.c.

$x > c - \varepsilon$.

Questo segue dal lemma precedente.

Infatti, siccome $c - \varepsilon < c = \sup X$, il lemma precedente garantisce che $\exists \ x \in X$ t.c. $c - \varepsilon < x$, cioè $c = \sup X$ soddisfa la 2')

Dimostriamo ora, che se c soddisfa 1') e 2') allora $c = \sup X$.

Ricordiamo

1') $c \geq x \ \forall x \in X \iff$ 1) del sup

siccome $c \geq x \ \forall x \in X \implies c \geq \sup X$

Per concludere che deve essere $c = \sup X$ dobbiamo escludere che possa essere $c > \sup X$.

Procediamo per assurdo e supponiamo si abbia $c > \sup X$

Poniamo $\varepsilon = c - \sup X > 0$

Dalla 2') sappiamo che $\exists\, x \in X$

t.c. $x > c - \varepsilon = c - (c - \sup X) =$

$= \cancel{c} - \cancel{c} + \sup X = \sup X$

cioè $\exists\, x \in X$ t.c. $x > \sup X$. Assurdo

Quindi $c = \sup X$.

Teor $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Dim Per assurdo sia falso. Allora

$c = \sup \mathbb{N} < +\infty$, $c \in \mathbb{R}$.

Consideriamo $c-1$. Allora esiste

$n \in \mathbb{N}$ t.c. $c-1 < n \leq c$

Ma $c-1 < n \Rightarrow c < n+1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow c < n+1 \leq c \Rightarrow c < c$

assurdo

Corollario (Teor. di Archimede) Dati $x>0$ e $y>0$

$\exists\ n \in \mathbb{N}$ t.c. $nx > y$.

Dim Risulta $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$. Siccome

$\sup \mathbb{N} = +\infty$ segue che $\exists\ n$

t.c. $n > \frac{y}{x} \Rightarrow nx > y$.

Def Sia $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che $c \in \overline{\mathbb{R}}$ è l'estremo inferiore di X sse

1) $c \leq x \quad \forall x \in X$

2) $y \leq x \quad \forall x \in X \Rightarrow y \leq c$.

Esercizio Dato $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e posto $-X = \{-x : x \in X\}$, risulta

$$\inf X = -\sup(-X).$$

Def $X \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se

$$-\infty < \inf X \leq \sup X < +\infty$$

Def Se $X \subseteq \mathbb{R}$ è t.c. $\sup X \in X$ allora diciamo che X ha massimo con $\max X = \sup X$

Es. $(0,1] = \{x : 0 < x \le 1\}$

allora $\sup(0,1] = 1 \in (0,1]$, dunque

$\exists \max(0,1] = 1$

Analogamente se $X \subseteq \mathbb{R}$ e se $\inf X \in X$ allora diciamo che X ha minimo e scriveremo $\min X = \inf X$

$\min(0,1]$ non esiste.

Verificate che se $X \subseteq \mathbb{R}$ con un numero finito di elementi esistono sia $\max X$ che $\min X$.