$+$

multiplo $n \cdot k$

$n \cdot 0 = 0$

$n\ (k + k') = n \cdot k + n \cdot k'$

$n\ (k \cdot k') = (n k) \cdot k'$

$\cdot$

potenza n^k

$n^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$n^{k+k'} = n^k \cdot n^{k'}$

$n^{k \cdot k'} = (n^k)^{k'}$

Def Ogni funzione $f: \mathbb{N} \to S$

(con dominio $\mathbb{N}$ insieme dei numeri naturali)

si dice SUCCESSIONE (di elementi di S)

Ad esempio

$$f: \mathbb{N} \to P$$

$$n \longmapsto 2 \cdot n$$

è una successione di numeri pari.

Tale successione è sia iniettiva che suriettiva.

$$n \longmapsto 2n$$

INIETTIVITÀ $2n = 2n' \iff n = n'$

SURIETTIVITÀ

Preso $\exists\, m \in \mathbb{N}$:

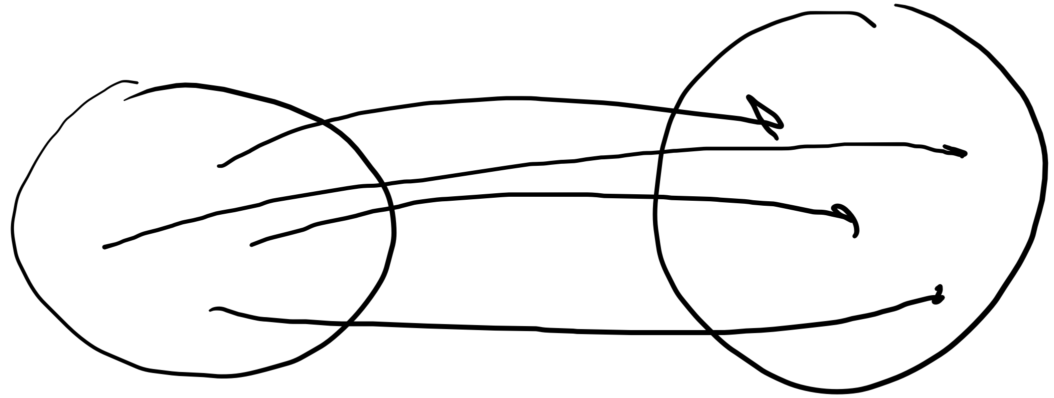
$$\underbrace{2 \cdot m}_{n} = f(m) \quad m \in \mathbb{N}$$

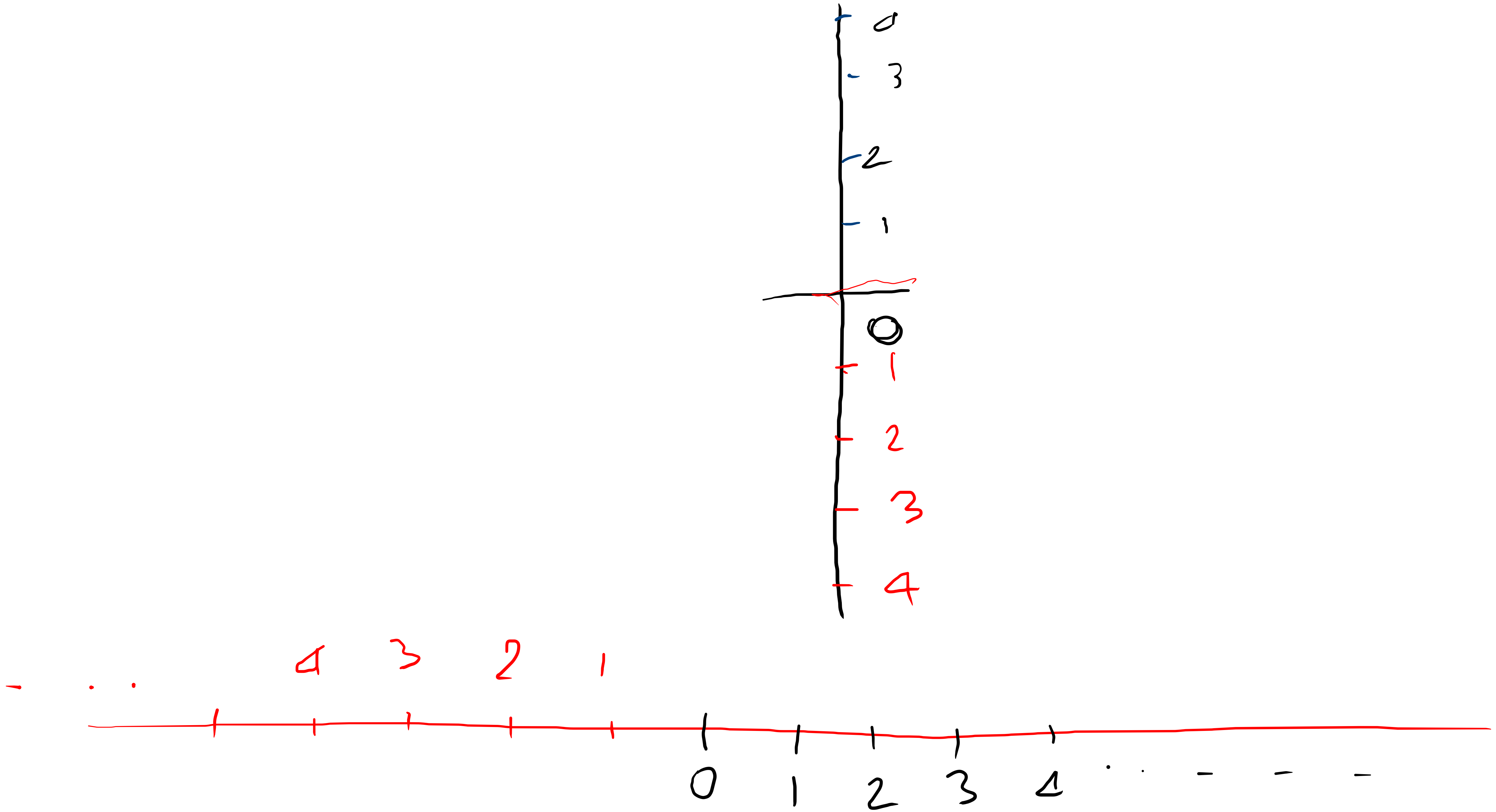
D

Esiste quindi una CORRISPONDENZA BIUNIVOCA fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P} \subsetneq \mathbb{N}$.

sottoinsieme PROPRIO di $\mathbb{N}$

Questo fatto può avvenire solo per INSIEMI INFINITI.





4
3
2
1
0
1
2
3
4
4 3 2 1
0 1 2 3 4

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

insieme dei numeri INTERI

meno 1

meno 2

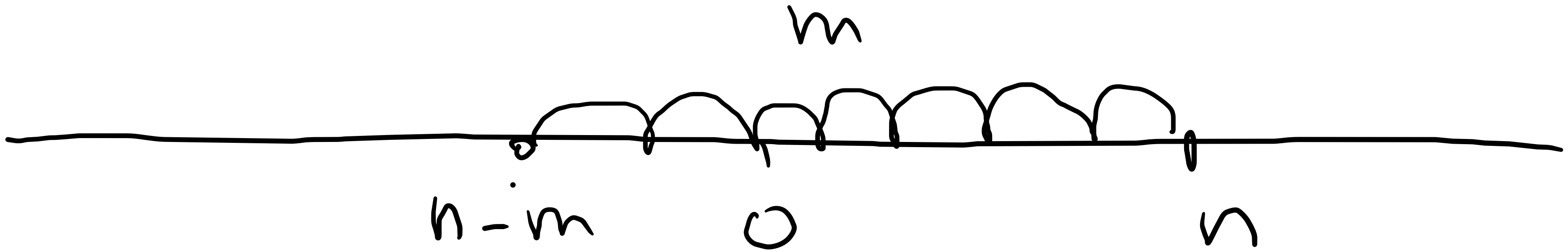
$n \in \mathbb{N} \qquad (-n) \in \mathbb{Z} \qquad n + (-n) = 0$

$-n$ è detto <u>opposto</u> di n

Estendiamo la somma in $\mathbb{Z}$

$$n + (-m) = n - m \in \mathbb{Z}$$

è l'm-simo precedente a n



Valgono le proprietà di COMMUTATIVITÀ, ASSOCIATIVITÀ e 0 è elemento neutro per +

Proviamo ad estendere anche il prodotto "·" in $\mathbb{Z}$

$$n \cdot 0 = 0$$

$$m + (-m) = 0$$

$$n \cdot 0 = n \cdot (m + (-m)) = 0$$

$$= n \cdot m + [-(n \cdot m)]$$

IN

$$-n \cdot \underbrace{(m + (-m))}_{=0} =$$

$$= 0 =$$

$$= -(nm) + (-n) \cdot (-m)$$

NEGATIVO

è opposto di $-(n \cdot m)$ e quindi POSITIVO

$$n - m = n + (-m)$$

La moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ gode delle proprietà associativa, commutativa, 1 è elemento neutro ed inoltre vale la proprietà distributiva.

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{ (p,q) \quad p \in \mathbb{Z} \quad q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$$

$$(p,q) \underset{R}{\sim} (p',q') \iff p \cdot q' = q \cdot p'$$

per esercizio

il prodotto in $\mathbb{Z}$

Verifichiamo che R è una relazione di equivalenza

$$(p,q) \sim (p,q) \quad \checkmark \qquad pq = q \cdot p \quad \text{OK}$$

R è di equivalenza e

$$[(p,q)]_R = \frac{p}{q}$$ frazione

p è detto numeratore

q è detto denominatore

$\boxed{q \neq 0}$

Consideriamo due frazioni

è il prodotto in $\mathbb{Z}$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = \frac{p \cdot n}{q \cdot m}$$

<u>Oss</u> $q \neq 0$ $m \neq 0$

$\Rightarrow q \cdot m \neq 0$

L'insieme di tutte le frazioni è l'insieme dei **numeri razionali** ed è indicato con $\mathbb{Q}$

$$\frac{p}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{p \cdot n}{1}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \overset{?}{\subset} \mathbb{Q}$$

Il prodotto in $\mathbb{Q}$ estende il prodotto in $\mathbb{Z}$

$$m \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \frac{m}{1} \in \mathbb{Q}$$

$(p,q) \sim_R (p',q')$ $\qquad\qquad$ $(n,m) \sim_R (n',m')$

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \qquad\qquad \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$$

$$\Downarrow$$

Esercizi

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{n'}{m'}$$

$$\Updownarrow$$

$$(pn, qm) \sim_R (p'n', q'm')$$

Voglio ora estendere la somma in $\mathbb{Q}$

prodotto in $\mathbb{Z}$

$$\frac{p}{q} +_{\mathbb{Q}} \frac{n}{m} = \frac{p \cdot m + q \cdot n}{qm}$$

somma in $\mathbb{Z}$

$p \rightsquigarrow \frac{p}{1}$

$n \rightsquigarrow \frac{n}{1}$

$$p + n = \frac{p \cdot 1 + n \cdot 1}{1} \rightsquigarrow p + n$$

La somma e il prodotto in $\mathbb{Q}$ sono commutativi, associativi e vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

$$0 \rightsquigarrow \frac{0}{1}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1} \sim \frac{0}{q} \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{p}{q}$$

$p \neq 0 \qquad p \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{p} \in \mathbb{Q} \qquad\qquad p \rightsquigarrow \frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{p}{1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{p \cdot 1}{p \cdot 1} = \frac{p}{p} = \frac{1}{1} = 1$$

$\frac{1}{p}$ è detto reciproco di $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Più in generale se

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \qquad p \neq 0$$

allora $\frac{q}{p}$ è reciproco di $\frac{p}{q}$.

Infatti $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{pq}{pq} = 1 \in \mathbb{Q}$

$n \in \mathbb{Z}$

$$n : m = \frac{n}{m} = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{m}$$

$m \neq 0$

reciproco di m

$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$m \in \mathbb{N}$

$$n^{-m} := \left(\frac{1}{n}\right)^m = \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots \frac{1}{n}}_{m \text{ volte}}$$

in $\mathbb{Q}$

$$n^0 = 1 \qquad \text{se } n \neq 0$$

$$0 = m + (-m) \qquad m \in \mathbb{N}$$

$$1 = n^0 = n^{m+(-m)} = n^m \cdot n^{(-m)}$$

$$n^{(-m)} = \frac{1}{n^m} = \left(\frac{1}{n}\right)^m$$

$p \neq 0$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

Se $m > 0$ $\quad p^m$ è p^m

Se $m < 0$ $\quad p^m = \left(\frac{1}{p}\right)^{(-m)}$

Se $m < 0$ $\quad \frac{p^m}{q^m} = \left(\frac{q}{p}\right)^{-m} \qquad q^m = \left(\frac{1}{q}\right)^{(-m)}$