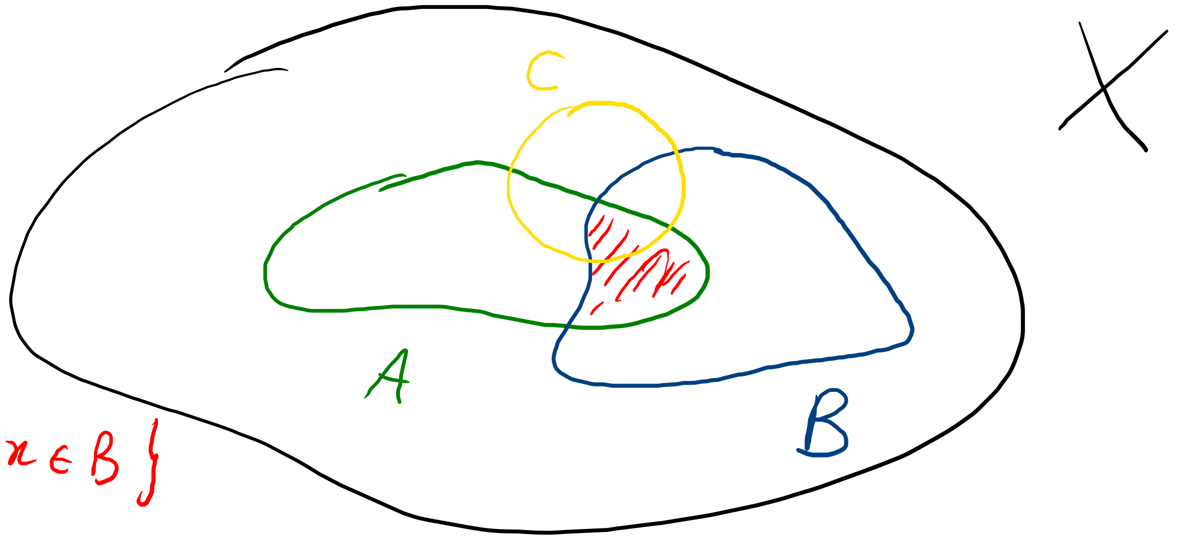
X insieme

$A, B \subset X$



$A \cap B \overset{def}{=} \{ x \in X \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$

↑

intersezione

$A \cap B \cap C = \{ x \in X \mid x \in A \underset{(\wedge)}{\text{e}} x \in B \underset{(\wedge)}{\text{e}} x \in C \}$

$\{A_i\}_{i \in I}$ $\qquad A_i \subset X$

famiglie $\qquad$ insieme degli indici

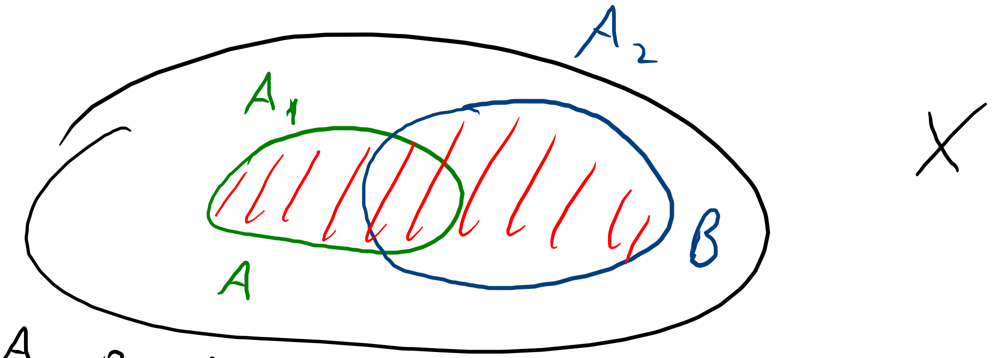
Es $\qquad A_n = \{0, 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$

$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Def $\qquad \bigcap_{i \in I} A_i \overset{def}{=} \{x \in X \mid x \in A_i \ \forall i \in I\}$

intersezione degli A_i

$A, B \subset X$ $\qquad$ $I = \{1, 2\}$



$$A \cup B \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid x \in A \ \underset{(\vee)}{\text{o}} \ x \in B\}$$

$\uparrow$

Unione

"e" = "$\wedge$"

"o" = "$\vee$"

$$\{A_i\}_{i \in I} \qquad \underbrace{A_i \subset X}_{\forall i \in I} \quad \rightsquigarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid \exists\, i \in I \ \text{ e } \ x \in A_i\}$$

V $\mathbb{K}$ - spazio vettoriale $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

$W \neq \emptyset$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$v_1, v_2 \in W$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W$

Prop.

$W \subset V$ sottospazio vettoriale di V

$U \subset V$ " " " "

$\Rightarrow U \cap W$ sottosp. vett. di V

Dim

1) $0_V \in U$, $0_V \in W \Rightarrow 0_V \in U \cap W \neq \emptyset$

2) $v_1, v_2 \in U \cap W$ $\Rightarrow v_1, v_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in W \Rightarrow$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \begin{cases} U \\ W \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U \cap W$

$\square$

Prop. $\{W_i\}_{i \in I}$ famiglia di sottosp. vett. di V $\Longrightarrow$

$\bigcap_{i \in I} W_i$ è un sottosp. vett. di V.

Dim 1) $0_V \in W_i \quad \forall i \in I \Longrightarrow 0_V \in \bigcap_{i \in I} W_i \neq \emptyset$

2) $v_1, v_2 \in \bigcap_{i \in I} W_i$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in W_i \quad \forall i \in I \Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \bigcap_{i \in I} W_i$

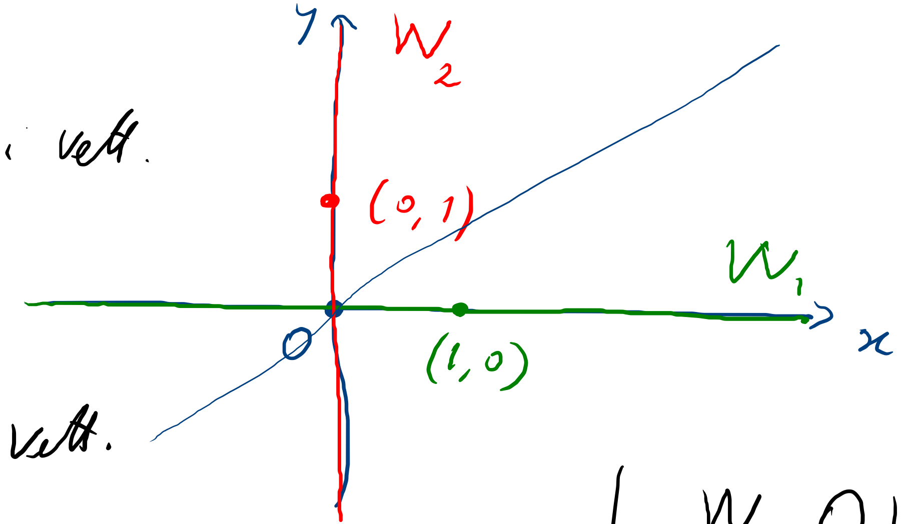
$\square$

OSS In generale l'unione di sottospazi vett. **non** è un sottospazio vett.

Es $V = \mathbb{R}^2$

$W_1 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ sottospazi vett. (*)

$W_2 = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$



$\Rightarrow$ $W_1 \cup W_2$ non è sottosp. vett.

$(1,0) \in W_1$, $(0,1) \in W_2$

$(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$ sottosp. vett. **nullo**

$S \subset V$ sottoinsieme

Def $L(S) \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{S \subset W \subset V \\ W \text{ sottosp. vett.}}} W$ = intersezione dei sottospazi vettoriali di V che contengono S

$L(S) \subset V$ è il più piccolo sottospazio vett. che contiene S.

rispetto a inclusione

OSS Se $S = \emptyset$

$$L(\emptyset) = \{0_V\}$$

Se $S \subset V$ è sottosp. vett.

$\Rightarrow L(S) = S$.

$L(S) = \text{Span}(S) = \langle S \rangle$

Def Dati: $U, W \subset V$ sottosp. vett. poniamo

$$U + W \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(U \cup W)$$

(Somma di sottospazi vett.)

$$\left.\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

Prop $U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$

Dim

$T = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$

1) $T \subset U + W$ $\Rightarrow U + W \subset T$

2) T è sottosp. vett. : $t_1, t_2 \in T$, $t_1 = u_1 + w_1$, $u_1, u_2 \in U$

$0_V \in T$ $\qquad t_2 = u_2 + w_2$, $w_1, w_2 \in W$

$\Rightarrow t_1 + t_2 = u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in T$

$t = u + w \in T$

$\lambda \in K$

$\lambda t = \lambda u + \lambda w \in T$

$T \supset U, W$

$U, W \subset V$ sottosp. vett.

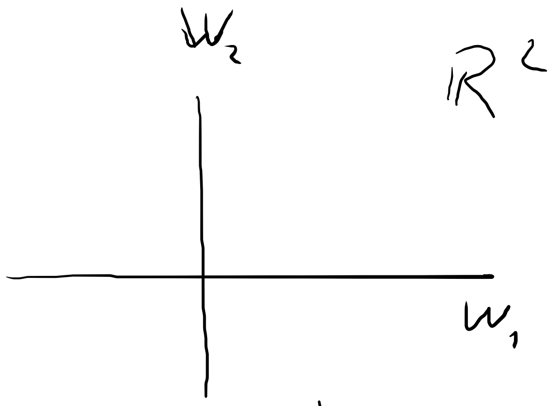
Se $U \cap W = \{0_V\}$ diciamo che la somma

$$U + W$$

è diretta e si denota con

$$U \oplus W$$

(somma diretta (interna))



$\mathbb{R}^2$

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$

$$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$$

$$(a,b) = \underset{W_1}{\underset{\uparrow}{(a,0)}} + \underset{W_2}{\underset{\uparrow}{(0,b)}}$$

<u>Prop.</u> $U, W \subset V$ sono sottosp. vett., $U \cap W = \{0_V\}$, allora ogni $v \in U \oplus W$ si scrive in modo <u>unico</u> nella forma

$$v = u + w$$

con $u \in U$, $w \in W$.

<u>Dim</u> (unicità) Supponiamo che $v = u + w = u' + w'$
$u, u' \in U$, $w, w' \in W$

$$\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \Rightarrow u - u' \in U \cap W = \{0_V\}$$

$$\Rightarrow u - u' = 0_V \Rightarrow u = u'$$

$$\Rightarrow w' - w = 0_V \Rightarrow w = w'.$$