13 ottobre

<u>Terminologia</u>. Diremo che un insieme X è finito, se il numero dei suoi elementi è finito.

<u>Esercizio</u> Dimostrare che ogni $X \subseteq \mathbb{R}$ finito ammette sia massimo che minimo

---

Tutorato Martedì 16-18
Ricevimento Mercoledì 16-18 !!
(Mercoledì 21 17-18)

Dim Per induzione sul numero n degli elementi di X.

1) Dimostriamo che [se $n=1$ allora $\exists \max X$ e $\min X$.]

$n=1 \Longrightarrow X=\{x_1\}$.

E' immediato che

$$\max X = \min X = x_1$$

Infatti

1) $x_1 \geq x_1$ cioè $x_1 \geq x \ \forall x \in X$.

2) $y \geq x \ \forall x \in X \Longleftrightarrow y \geq x_1$

cioè x_1 soddisfa le due proprietà del $\sup X$ e

quindi $x_1 = \sup X \Longrightarrow x_1 = \max X$.

2) Se la proposizione è vera per insiemi con n elementi allora è vera per insiemi con $n+1$ elementi.

Sia $X = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$

Considero $Y = \{x_1, \overset{x_{n_0}}{\dots}, x_n\}$

Pertanto $X = Y \cup \underline{\{x_{n+1}\}}$

Siccome $\# Y = n$, per induzione esiste $\max Y$ che sarà uguale a x_{n_0} per un qualche $1 \leq n_0 \leq n$. Cioè

$$x_{n_0} \geq x_j \qquad \forall \ 1 \leq j \leq n$$

Ora consideriamo x_{n+1} e confrontiamolo con x_{n_0}.

Risulta che $x_{n_0} \neq x_{n+1}$

a) Se $x_{n_0} > x_{n+1}$ allora

$$x_{n_0} \geq x_j \quad \forall \quad 1 \leq j \leq n+1$$

$\Longrightarrow \quad x_{n_0} = \max X.$

b) Se $x_{n_0} < x_{n+1}$ allora

$$x_{n+1} > x_{n_0} \geq x_j \quad \forall \quad 1 \leq j \leq n$$

$\Longrightarrow \quad x_{n+1} \geq x_j \quad \forall \quad 1 \leq j \leq n+1$

$\Longrightarrow \quad x_{n+1} = \max X.$

Esercizio. Ogni $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$, ammette $\min X$.

Esempio $X = \mathbb{N}$. Ovviamente non ha max (visto che $\sup \mathbb{N} = +\infty$), ma è t.c. $\min \mathbb{N} = 1$.

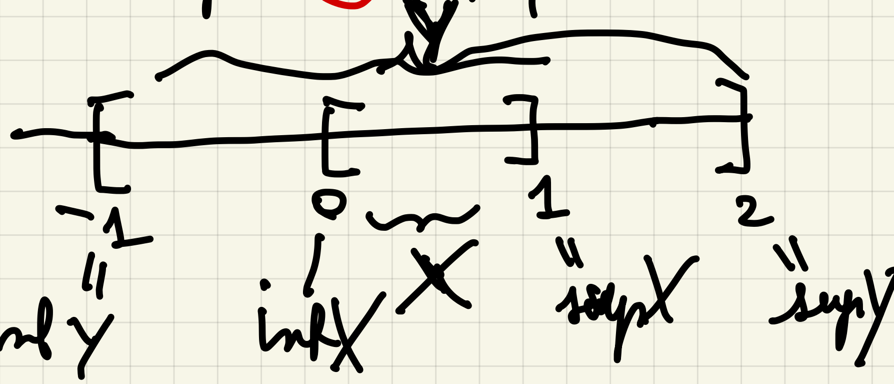
Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{Z}$, $X \neq \emptyset$, con $\inf X > -\infty$. Allora $\exists \min X$.

Esercizio Sia $X \subseteq \mathbb{Z}$ con $\sup X < +\infty$. Allora $\exists \max X$.

Esercizio Dati $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$\inf Y \le \inf X \le \sup X \le \sup Y$$

Dimostrarlo!



Esempio $X \subseteq \mathbb{R}$ $\quad Y = \mathbb{R}$

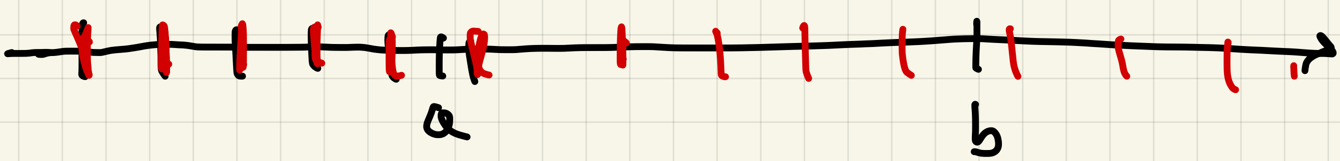
$$-\infty \leq \inf X \leq \sup X \leq +\infty$$

<u>Teor</u> (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$) Per ogni coppia $a < b$ in $\mathbb{R}$ $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ con

$$a < q < b.$$

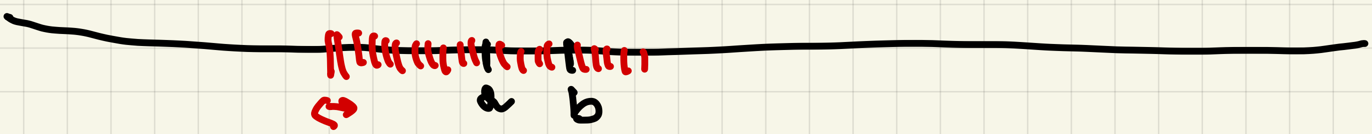
Osservazioni intuitive.

Sia $b - a > 1$ allora si considera $\mathbb{Z}$



In generale, se $0 < b - a \leq 1$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{1}{n_0} < b - a \qquad \frac{m}{n_0} \quad m \in \mathbb{Z}$$



Dim Distinguiamo tre casi

i) $a < 0 < b$

ii) $0 \leq a < b$

iii) $a < b \leq 0$

Il caso i) è immediato: basta prendere $q = 0$.

Ci limitiamo ora al caso ii) cioè $0 \leq a < b$. Sia $\frac{1}{n} < b-a$ che esiste perché $\sup \mathbb{N} = +\infty$ e sappiamo che esiste $n > \frac{1}{b-a}$.

Sia $X = \{ m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > a \}$

$X \neq \emptyset$ per il Teor. di Archimede

$X \subseteq \mathbb{N}$. Da un esercizio sappiamo che $\exists\ m_0 = \min X$

Dimostreremo che $q = \frac{m_0}{n}$ soddisfa

$a < \frac{m_0}{n} < b$. $\frac{m_0}{n} > a$ perché $m_0 \in X$

Dimostriamo che $\frac{m_0}{n} < b$.

Per prima cosa osserviamo che

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq a. \quad *$$

Infatti, se $m_0 = 1$ allora $\frac{m_0 - 1}{n} = 0 \leq a$

Se invece $m_0 \geq 2$ allora $m_0 - 1 \in \mathbb{N}$ e allora $*$ deve essere vera, perchè se fosse $\frac{m_0-1}{n} > a \implies m_0 - 1 \in X$

$$\implies m_0 - 1 < m_0 = \min X \leq m_0 - 1$$

$$m_0 \cancel{-1} < m_0 \cancel{-1}$$

$$0 < 0 \quad \text{assurdo}$$

Concludiamo che $*$ è vera, cioè che

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq a$$

$$\frac{m_0}{n} = \overbrace{\frac{m_0 - 1}{n}}^{\leq a} + \overbrace{\frac{1}{n}}^{< b-a} < a + b - a = b$$

$$\frac{m_0 - 1}{n} \leq a, \quad \frac{1}{n} < b - a$$

Conclusione: $\frac{m_0}{n} < b$ $\square$

Esercizio Enunciare e dimostrare il principio di induzione in

$$\{m_0, m_0+1, m_0+2, \dots\} = [m_0, +\infty) \cap \mathbb{Z}$$

dove $m_0 \in \mathbb{Z}$.

La formulazione è la seguente

Se $X \subseteq [m_0, +\infty) \cap \mathbb{Z}$ soddisfa le seguenti due proprietà, allora $X = [m_0, +\infty) \cap \mathbb{Z}$:

1) $m_0 \in X$

2) $n \in X \Rightarrow n+1 \in X$.

Dim Notare che
$$[m_0,+\infty)\cap\mathbb{Z} = \{m_0+j-1 : j\in\mathbb{N}\}.$$
e Sia $S=\{j\in\mathbb{N} : m_0+j-1\in X\}\subseteq\mathbb{N}$

E' immediato che
$$S=\mathbb{N} \iff X=[m_0,+\infty)\cap\mathbb{Z}$$
Notiamo che $(m_0\in X)\iff(1\in S)$

Supponiamo che
$$j\in S \iff m_0+j-1\in X \implies$$
$$\implies m_0+j\in X \iff m_0+(j+1)-1\in X$$
$$\iff j+1\in S$$
Concludi
$$j\in S \implies j+1\in S$$
Per il principio di induzione su $\mathbb{N}$ segue che $S=\mathbb{N} \implies$
$$X=[m_0,+\infty)\cap\mathbb{Z}.$$