$S \subset V$ sottoinsieme di V (sp. vett. su $\mathbb{K}$)

$\rightsquigarrow L(S) = \mathrm{Span}(S)$ (sottospazio vettoriale generato da S)

$= \langle S \rangle$

$$\boxed{\underline{L(S) \subset \Lambda(S)}}$$

$$L(S) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{W \subset V \text{ sottosp vett} \\ S \subset W}} W \longleftarrow$$

$S \neq \emptyset$

<u>Prop.</u> $L(S) = \underline{\{ \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_k s_k \mid k \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ s_i \in S \}} =: \Lambda(S)$

<u>Dim</u> Se W è un sottosp. vett. di V, con $S \subset W$

allora $\Lambda(S) \subset W \implies \underline{\Lambda(S) \subset L(S)} \leftarrow$

$S \subset \Lambda(S)$, $\Lambda(S)$ chiuso rispetto a $\cdot_V$, $+_V \implies \Lambda(S)$ sottosp. vett.

$\implies L(S) \subset \Lambda(S) \leftarrow$

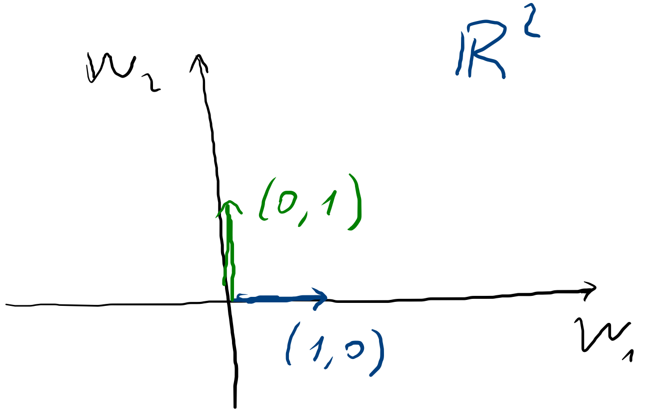
Es $S = \{s_1, \dots, s_n\} \rightsquigarrow L(S) = L(s_1, \dots, s_n) = \mathrm{Span}(s_1, \dots, s_n)$

$$L(S) = \{\lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_n s_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

$$L((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$$

Es $S = \{s\}$

$$L(s) = \{\lambda s \mid \lambda \in \mathbb{K}\} \begin{cases} = \{0_V\} & \text{se } s = 0_V \\ \neq \{0_V\} & \text{se } s \neq 0_V \end{cases}$$



$W_1 = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0)\})$

$W_2 = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,1)\})$

$(a,0) = a(1,0)$

$W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$

$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$

Prop. Se $W_1, W_2 \subset V$ sono sottospazi vettoriali, allora la loro somma è diretta ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$) $\iff$ $\forall\, w \in W_1 + W_2$ si può scrivere in modo unico come $w = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

Dim. $\Rightarrow$) ieri.

$\Leftarrow$ Se $w \in W_1 \cap W_2$

$$\underset{V}{0} = \underset{W_1}{w} - \underset{W_2}{w} = \underset{W_1}{w} + \underset{W_2}{(-w)} = \underset{W_1}{0_V} + \underset{W_2}{0_V}$$

$\overset{\text{unicità}}{\Longrightarrow}$ $w = 0_V$ $\Longrightarrow$ $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$.

$$
\begin{tikzcd}
W_1 \oplus W_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & W_1 \\
W_2 &
\end{tikzcd}
$$

proiezioni

$$
\left.\begin{aligned}
p_1(w_1 + w_2) &= w_1 \\
p_2(w_1 + w_2) &= w_2
\end{aligned}\right\} \text{ ben definite}
$$

$$w \in W_1 \oplus W_2 \rightsquigarrow w = \underbrace{w_1 + w_2}_{\text{unici}}$$

A, B insiemi $\rightsquigarrow A \times B \overset{def}{=} \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}$

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \\
B &
\end{tikzcd}
$$

$$p_1(a, b) = a$$

$$p_2(a, b) = b$$

Somma diretta di spazi vettoriali

V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Somma diretta

$V \oplus W \overset{def}{=} V \times W$ con le operazioni di somma e molt. scalare definite:

$(v_1, w_1) \oplus (v_2, w_2) \overset{def}{=} (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$

$\forall (v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \oplus W$

$(0_V, 0_W)$

$-(v, w) = (-v, -w)$

$\lambda \cdot (v, w) \overset{def}{=} (\lambda v, \lambda w) \quad \forall \lambda \in K, \forall (v, w) \in V \oplus W$

$V \oplus W$ è uno spazio vett. su $\mathbb{K}$ $(*)$

$$\underbrace{V_1, \dots, V_k}_{K\text{- spazi vett.}} \rightsquigarrow \underline{V_1 \oplus \dots \oplus V_k \overset{def}{=} V_1 \times \dots \times V_k}$$

$$\begin{cases} (v_1, \dots, v_k) + (w_1, \dots, w_k) \overset{def}{=} (v_1 + w_1, \dots, v_k + w_k) \\ \lambda \cdot (v_1, \dots, v_k) \overset{def}{=} (\lambda v_1, \dots, \lambda v_k) \\ \forall \lambda \in K, \ \forall (v_1, \dots, v_k), (w_1, \dots, w_k) \in V_1 \oplus \dots \oplus V_k \end{cases}$$

$V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ è uno spazio vett. su K $(*)$

$$\begin{array}{ccc} V \oplus W & \xrightarrow{p_1} & V \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \\ W & & \end{array}$$

$p_1(v, w) = v$

$p_2(v, w) = w$

<u>proiezioni canoniche</u>

Indipendenza lineare

V $\mathbb{K}$-sp. vett.

Def Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se

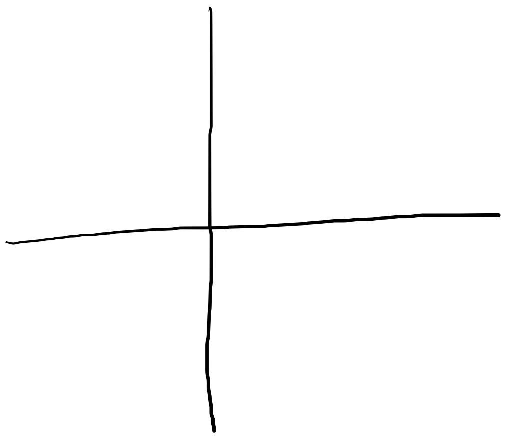
$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

$\forall \lambda_i \in \mathbb{K}$.

Se $v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipendenti, allora si dice che sono linearmente dipendenti.

OSS Se 0_V è uno dei v_i allora $v_1, \dots, v_n$ sono lin. dipendenti.

Es $v_1=(1,0)$, $v_2=(1,1)\in\mathbb{R}^2$



$$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$$

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(1,1)=(0,0)$$

$$(\lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_2)=(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\end{cases} \Rightarrow v_1, v_2 \text{ linearmente indipendenti}$$

Prop. $v_1, v_2\in V$ sono lin. dip $\iff$ uno dei due è multiplo dell'altro

Dim ($\Rightarrow$) $\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2=0$ λ_1 e λ_2 non entrambi nulli

Se $\lambda_1\neq 0 \Rightarrow v_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2$; se $\lambda_2\neq 0$ $v_2=-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}v_1$

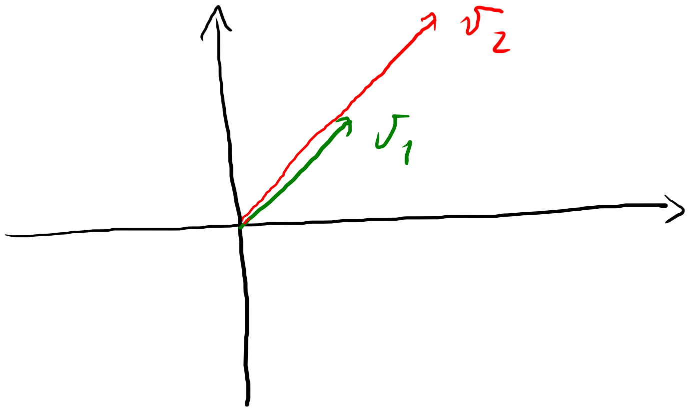
$(\Leftarrow)$ Se $v_1 = \lambda v_2$ per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$

$1 \cdot v_1 - \lambda_2 v_2 = 0_V$

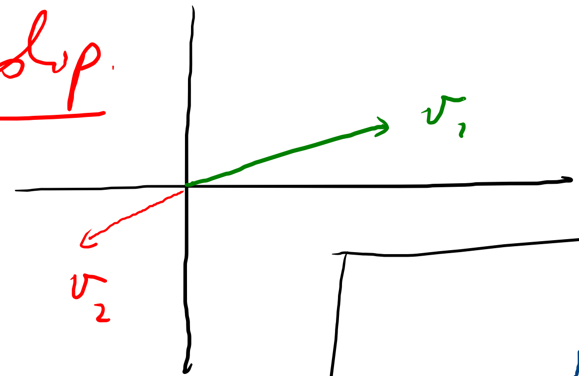
Se $v_2 = \lambda v_1 \Longrightarrow \underbrace{\lambda \cdot v_1 - v_2}_{-1} = 0_V$

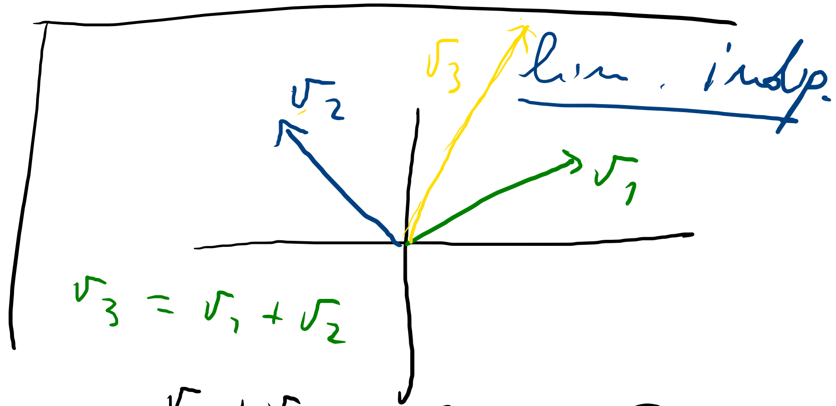
$\Longrightarrow$ lin. dip.

Es



lin. dip.





$v_3 = v_1 + v_2$

$v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Es $V = \mathbb{Q}$ spazio vett. su $\mathbb{Q}$

$v_1 = 3$, $v_2 = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ lin. dip.

$$\frac{1}{3} v_1 - 2 v_2 = 0$$

Es V K-sp. vett. $v \in V$, $v \neq 0_V$ allora v è lin. indip.

$$\lambda v = 0_V \implies \lambda = 0$$

$v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (-3, -6, 0) \in \mathbb{Q}^3$

$$v_2 = -3 v_1$$

Es $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ lin. indip.

<u>Es. notevole</u> In $\mathbb{K}^n$ $(\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}^n, \dots)$ poniamo

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}\right\} \quad n\text{-uple di } \mathbb{K}^n$$

$\boxed{\text{Sono } \underline{\text{lin. indip.}}}$

$$\underline{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n} = 0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(\underline{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}) = (0, \dots, 0)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \, .$$

Def Diciamo che i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ generano V se (sono generatori)

$$V = L(v_1, \dots, v_n)$$

$$\Longleftrightarrow \forall v \in V \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad t.c.$$

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Es $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ sono generatori di $\mathbb{K}^n$

Def I vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono una **base** di V se

1) generano V
2) sono lin. indipendenti

$\{e_1, \dots, e_n\}$ sono base di $\mathbb{K}^n$
base canonica di $\mathbb{K}^n$