$v_1, \dots, v_n \in V$ (V $\mathbb{K}$-sp. vett.)

- sono generatori di V se $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$
- lin. indip. se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

base : se generano e sono lin. indip.

$\mathbb{K}^n$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}\right\} \quad \underline{\text{base canonica}}$$

$(a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

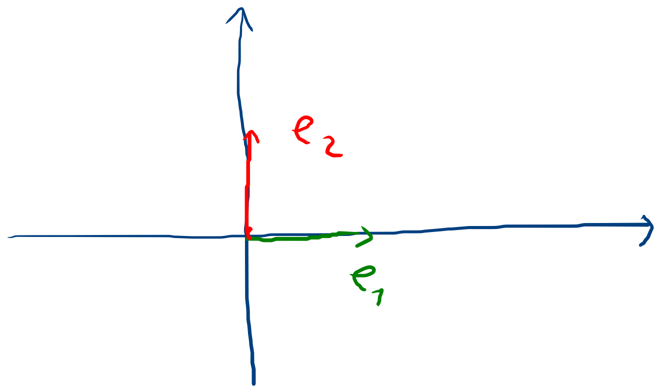
$\mathbb{K}$ $\quad e_1 = 1$

$\mathbb{K}^2$ $\quad e_1 = (1,0), \; e_2 = (0,1)$

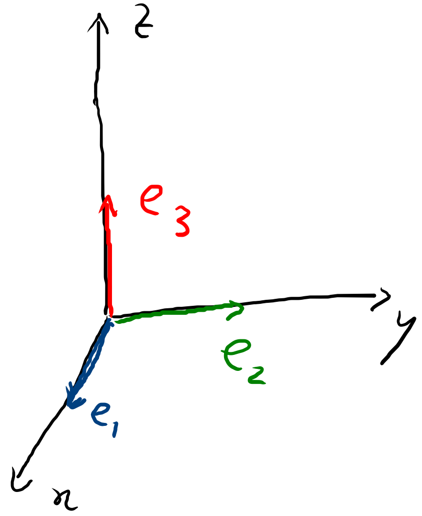
$\mathbb{K}^3$ $\quad e_1 = (1,0,0), \; e_2 = (0,1,0), \; e_3 = (0,0,1)$

$\mathbb{K}^4$ $\quad \dots$

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



Prop. $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti $\iff$ uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Dim ($\Rightarrow$) $v_1, \dots, v_n$ lin. dip. : $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli t.c.

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

A meno di rienumerarli possiamo assumere che $\lambda_n \neq 0$

$$v_n = (-\lambda_n^{-1} \lambda_1) v_1 - \dots - (\lambda_n^{-1} \lambda_{n-1}) v_{n-1} .$$

($\Leftarrow$) A meno di rienumerarli possiamo assumere che v_n è comb. lin. degli altri.

$$v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0_V$$

comb. lin. con almeno un coeff. $\neq 0$.

Prop. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono <u>lin. indip.</u> e

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad , \lambda_i \in \mathbb{K} ,$$

allora i coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono univocamente determinati da v, e da $v_1, \dots, v_n$.

Dim Se $\underline{v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n} v_n \quad , \mu_i \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\mu_1 - \lambda_1)} v_1 + \dots + (\mu_n - \lambda_n) v_n = 0_V \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mu_1 - \lambda_1 = 0 \\ \vdots \\ \mu_n - \lambda_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 \\ \vdots \\ \mu_n = \lambda_n \end{cases}$$

Corollario $S \subset V$ è base per $V \iff$ ogni vettore $v \in V$ si può esprimere in modo unico come combinazione lin. di vettori di S.

Es $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ base $\Rightarrow \forall v \in V \ \exists! \ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

t.c. $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

Se $V = \{0\}$ (sp. nullo) allora l'unica base è $\emptyset$

Es $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}$-sp. vett.

una base è un qualunque numero $\neq 0$

$u \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a \in \mathbb{R} \quad a = (a u^{-1}) u$

V sp. vett. <u>finitamente generato</u> $\overset{def}{\iff}$ $\exists \{v_1, \dots, v_n\}$ insieme <u>finito</u> di generatori per V.

<u>Teorema</u> Se V è generato dall'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ allora $\exists$ base $B \subset \{v_1, \dots, v_n\}$. Quindi V ammette almeno una base.

<u>Dim</u> Se $v_1, \dots, v_n$ sono <u>lin. indip.</u> allora sono una base.
In caso contrario, uno di essi è comb. lineare degli altri.
A meno di rinumerarli possiamo assumere $v_n \in L(v_1, \dots, v_{n-1}) \Rightarrow$
$\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ sono generatori di V.
Se questi sono lin. indip. allora sono base
Altrimenti continuiamo il ragionamento. Il procedimento finisce dopo numero finito di passi.

$v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \implies \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ generatori

Infatti se $v \in V \implies v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n =$

$= a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1})$

$v_1, \dots, v_n \in V$ sono detti generatori di V se $\forall\, v \in V$

$\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$\iff V = L(v_1, \dots, v_n)$

Prop. Sia V sp. vett. finitamente generato, $\{v_1, \dots, v_n\}$ insieme di generatori. Se $\{w_1, \dots, w_r\} \subset V$ sono linearmente indipendenti, allora $r \leq n$.

Dim per assurdo: supponiamo $r > n$

1) $v_1, \dots, v_n$ generatori $\Rightarrow$ $w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

λ_i non sono tutti nulli. A meno di riordinarli possiamo assumere $\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow v_1 = \lambda_1^{-1} w_1 - \lambda_1^{-1} \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_1^{-1} \lambda_n v_n$$

$\Rightarrow$ $\{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ generano V.

$w_2 \in L(w_1, v_2, \dots, v_n)$

$\boxed{r > n}$

$\rightarrow w_2 = a_1 w_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_n v_n \implies \exists \mu_i \neq 0$

A meno di riordinare possiamo assumere $\mu_2 \neq 0$

$\implies v_2 \in L(\underbrace{w_1, \underline{w_2}, v_3, \dots, v_n}) \implies \{\underbrace{w_1, w_2, v_3, \dots, v_n}\}$ generano V.

⋮

$\{\underbrace{w_1, \dots, w_n}\}$ generano V

$w_{n+1} = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n \implies \{w_1, \dots, w_r\}$ lin. dip.

<u>Contraddizione</u>

$\square$