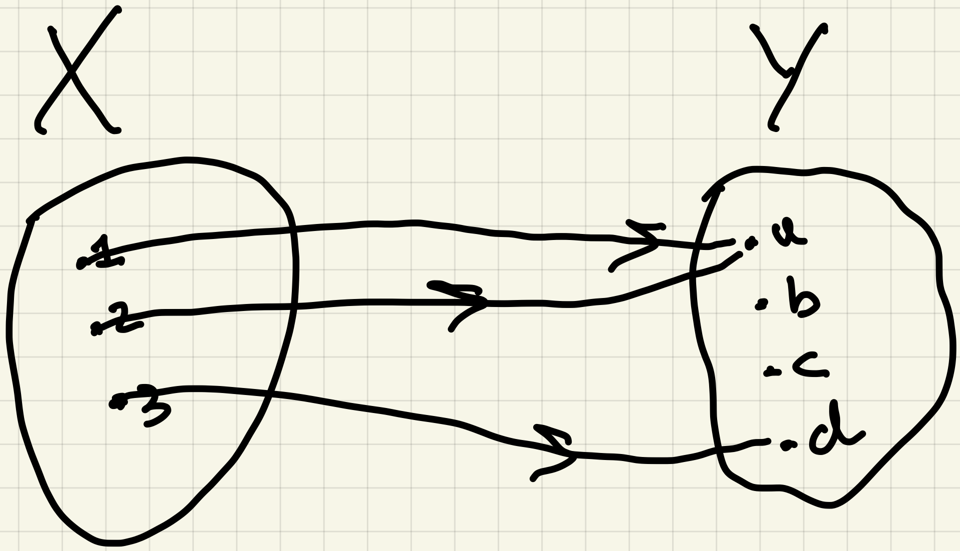
16 ottobre

Funzioni

Def Dati due insiemi X e Y, una funzione f definita in X a valori in Y, è una legge che associa ad ogni $x \in X$ uno ed uno solo elemento y dell'insieme Y. Di solito l'elemento di Y associato ad $x \in X$ viene denotato con $f(x)$ ed inoltre si scrive $f: X \to Y$ oppure $X \xrightarrow{f} Y$.



$1 \longrightarrow a$
$2 \longrightarrow a$
$3 \longrightarrow d$

Ho definito una funzione $X \longrightarrow Y$.

Es. Sia $Q(t)$ l'ammontare in Euro dei miei soldi nel conto corrente. Supponiamo che al tempo $t=0$ io abbia un'ammontare Q_0. Supponiamo la rivalutazione sia del 3% annuo, rivalutazione fatto continuamente. Allora

$$Q(t) = Q_0 \, e^{t \frac{3}{100}}$$

2) $C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

Qui x le unità di prodotto

Qui

$a =$ costi fissi

bx. ad esempio costo di materie prime

Osservazione $f : X \rightarrow Y$

X è dominio di definizione di f.

Y è il codominio o anche insieme dei valori di f.

Esempio $\quad \log_7(\sqrt{x+1}-1)$

Dominio?

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-1>0 \\ x+1\geq 0 \implies x\geq -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1}>1 \iff x+1>1 \iff \boxed{x>0}$$

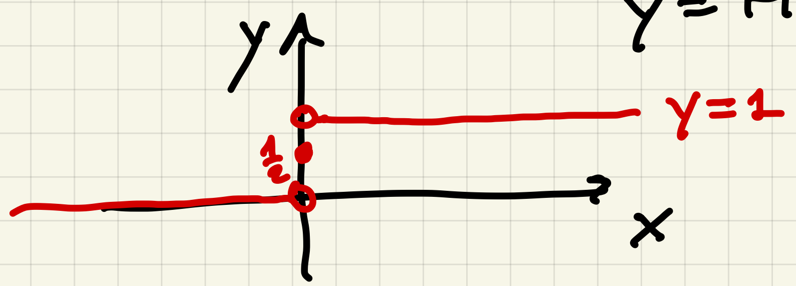
$\mathbb{R}_+$

è il dominio

Esempi $\quad H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 \;, & \text{se } x > 0 \\ 0 \;, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} \;, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$y = H(x)$



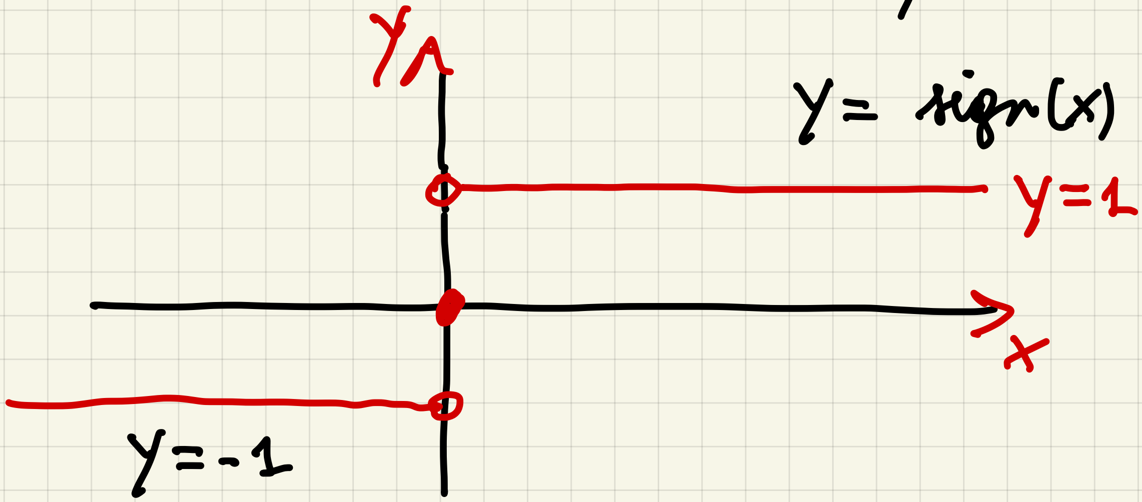
Def. Data $f : X \to Y$, dato il prodotto cartesiano

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X ,\, y \in Y \},$$

il grafico Γ_f di f è il sottoinsieme di $X \times Y$ definito da

$$\Gamma_f = \{ (x, y) \in X \times Y : \; y = f(x) \}$$
$$= \{ (x, f(x)) \in X \times Y : \; x \in X \}$$

Es. $$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



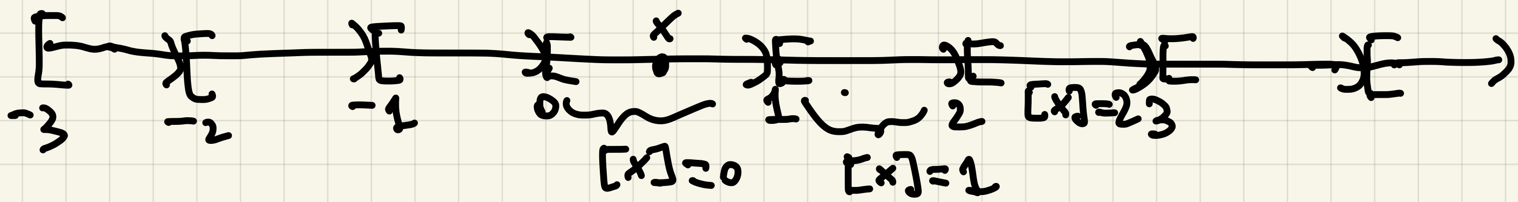
Es $D: \mathbb{R} \to \overset{\{0,1\}}{\mathbb{R}}$, funzione di Dirichlet,

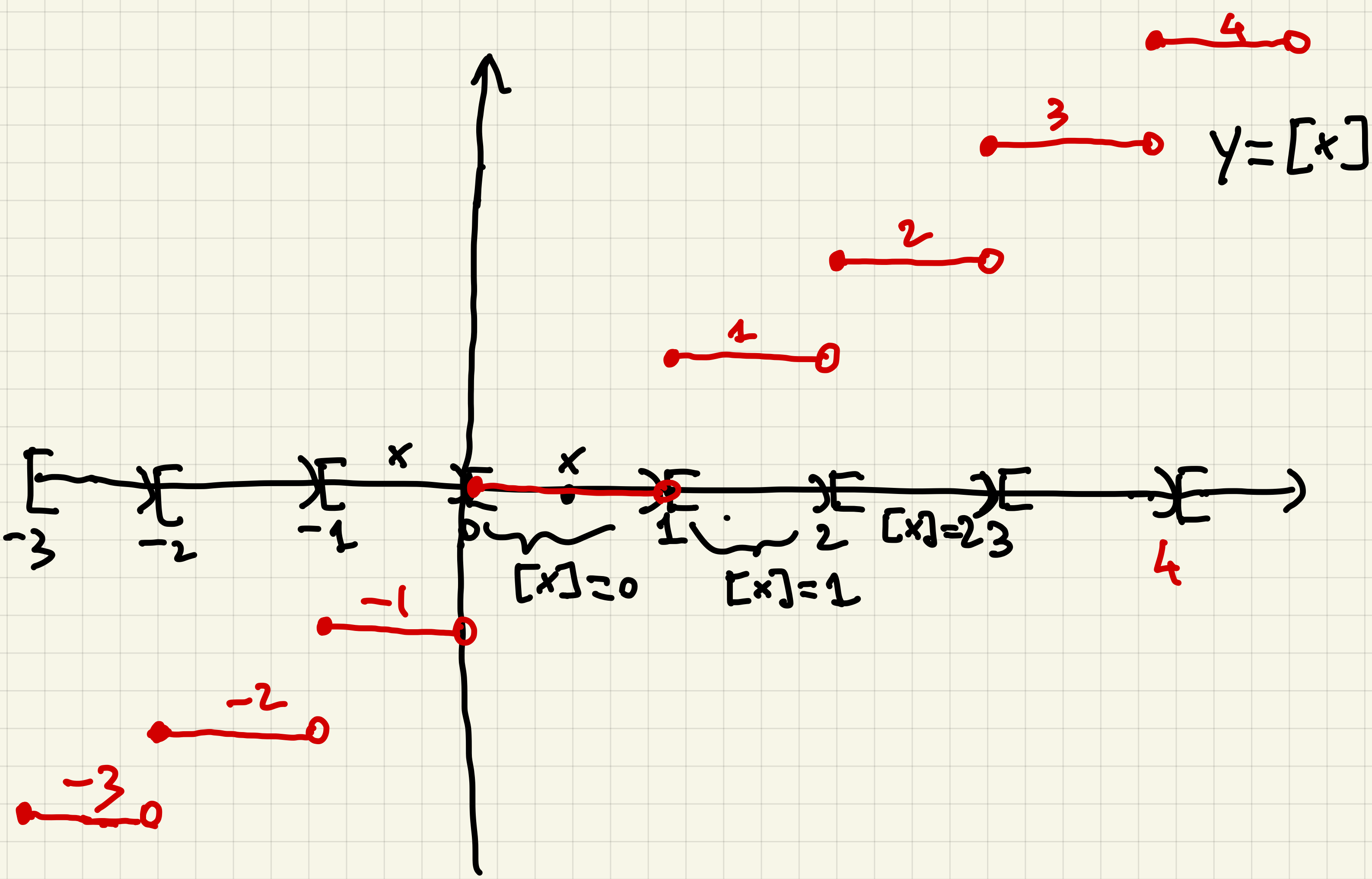
$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

E1 Funzione parte intera

$[x] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ e per ogni x

è definita da $[x] \leq x < [x]+1$.





Def Sia $f : X \to Y$ e sia $A \subseteq X$ allora resta definita una funzione

$$f|_A : A \to Y$$

che viene detta la restrizione di f in A ed e' definita da

$$f|_A(x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

Def: $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, l'immagine di A e'

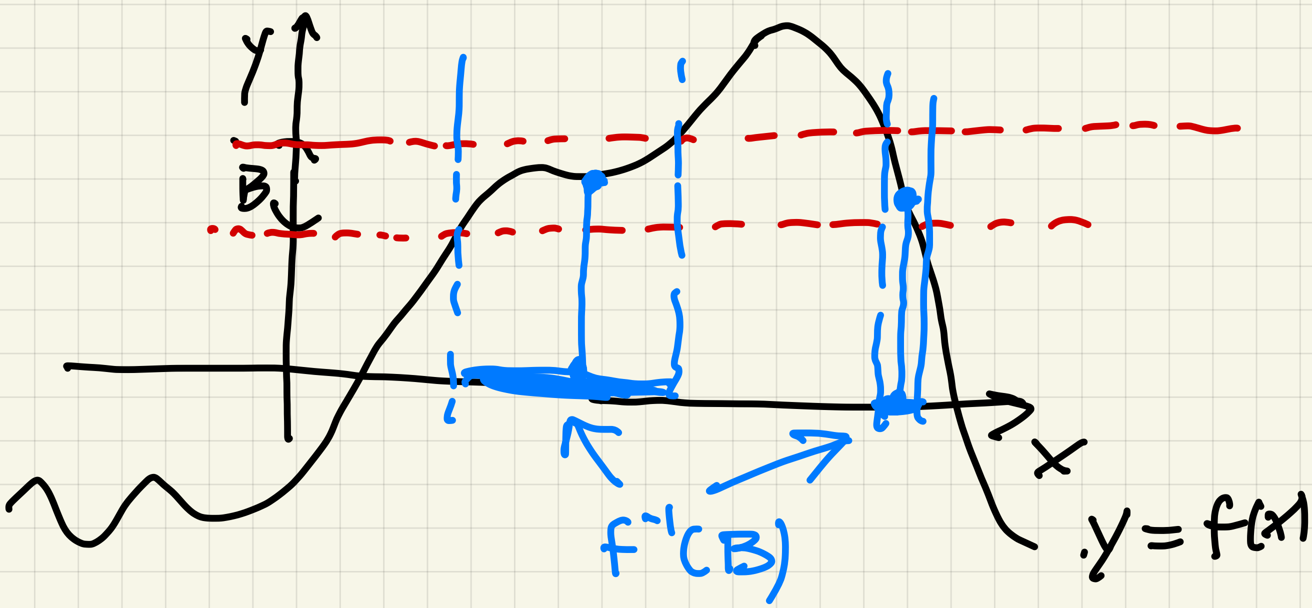
$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \} \subseteq Y$$

Es $f(x) = [x]$

$$f((\pi, 10)) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Def Dato $f: X \to Y$, dato $B \subseteq Y$ allora la controimmagine di B è l'insieme

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$



Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia dato $f : X \to \mathbb{R}$.

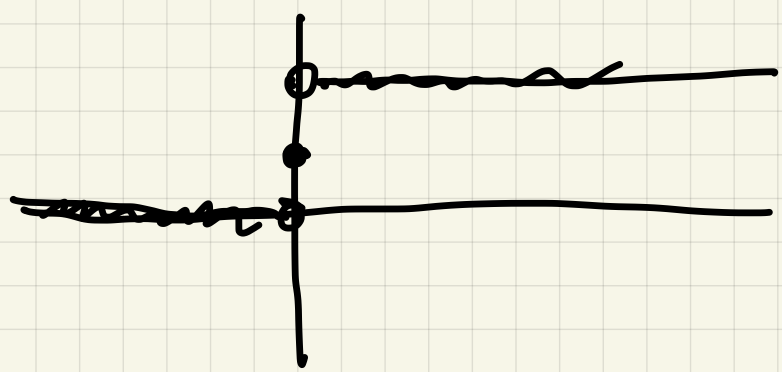
f si dice (strettamente) crescente se

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2)$$

f si dice (strettamente) decrescente se

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \overset{>}{\geq} f(x_2)$$

Es $H(x)$ è crescente



$D(x)$, $\text{sign}(x)$ sono crescenti