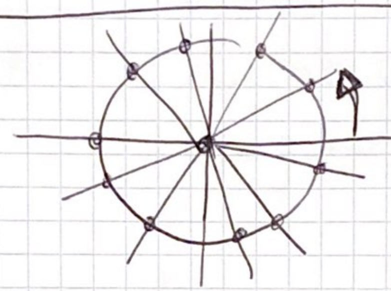
Discretizzazione di $\displaystyle\int_{\substack{\text{cerchio}\\ \text{unitario}}} dz\, z^n$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i(k+1)\frac{2\pi}{N}} - e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right) \times \left(e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right)^n}$$

ovvero: 1)



divido il cerchio in N spicchi di angolo $\frac{2\pi}{N}$;

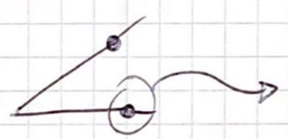
punti: $e^{ik\frac{2\pi}{N}}$, $k=0,\dots N-1$

2)

dz è approssimato dalla differenza tra due punti successivi:

$$e^{i\frac{(k+1)2\pi}{N}} - e^{ik\frac{2\pi}{N}}$$

3)



valuto la funzione z^n in un estremo dell'intervallo, ad esempio in $e^{ik\frac{2\pi}{N}}$.

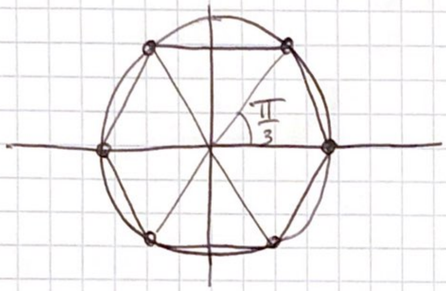
(Potrei anche scegliere il punto in mezzo, la differenza scompare nel limite $N \to \infty$.)

$\Rightarrow$ Trovo: $\left(e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right)^n$

Alla fine per trovare l'integrale serve: $N \to \infty$

Vediamo perché l'integrale fa zero per $n \neq -1$ e $2\pi i$ per $n=-1$, usando la discretizzazione.

Vediamo un caso concreto, $N=6$ per esempio:



In questo caso la discretizzazione è un esagono, e $\frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{3}$.

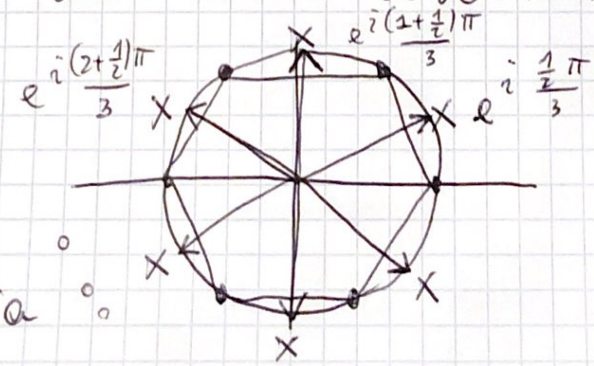
Approssimazione di dz:

$$e^{i(k+1)\frac{\pi}{3}} - e^{ik\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i} \times 2i$$

$$= 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}} = i\, e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}}$$

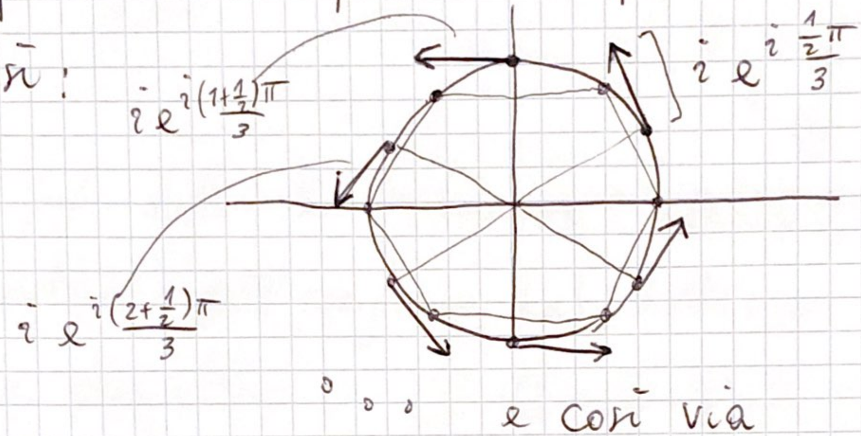
[NOTA: per N generico ottenei $2i\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{N}}$ che in effetti è infinitesimo per $N \to \infty$].

I vettori $e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}}$ sono semplicemente a metà tra i punti della nostra discretizzazione:



e così via

Moltiplicandoli per $\underline{\underline{i}}$ li dobbiamo ruotare in senso anti-orario di $\frac{\pi}{2}$, quindi le nostre approssimazione per $i\,dz$ può essere disegnata così:

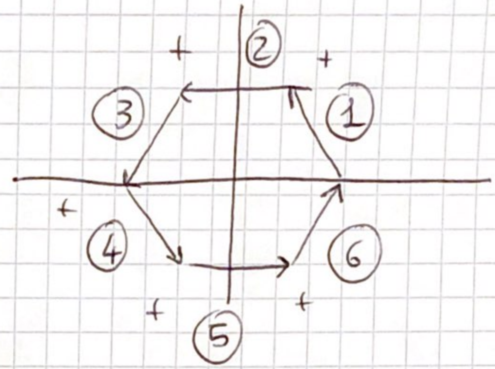


e così via

Ora per ottenere l'approssimazione dell'integrale dobbiamo moltiplicare il vettore K-esimo per $\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)^n$, e infine sommare su K. Notiamo che $\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{kn\pi}{3}}$ è invariante per $n \to n+6m$ con m intero, quindi possiamo restringerci a $n=-2,-1,0,+1,+2,+3$.

Cominciamo con $\boxed{n=0}$ che è il caso più facile. In questo caso $\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)^n = 1$ quindi dobbiamo solo sommare le nostre approssimazioni per dz. Disegnandole una di seguito all'altra si vede che formano un esagono regolare e che la somma è 0:

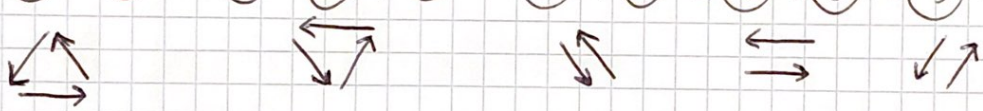
$\boxed{n=0}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} i\, e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}} \times 1 =$



$= 0$

Ho introdotto la notazione 1, 2, 3, 4, 5, 6 per i lati (orientati) dell'esagono dati dalle approssimazioni per dz. Nota che oltre a $1+2+3+4+5+6=0$ vale anche:

$1+3+5 = 2+4+6 = 1+4 = 2+5 = 3+6 = 0.$



Per n generico, dobbiamo moltiplicare $k+1$ per $e^{in\frac{k\pi}{3}}$ e poi sommare su $k=0,..,5$. Notiamo che moltiplicare per $e^{in\frac{k\pi}{3}}$ equivale a ruotare di $\frac{nk\pi}{3}$, e che la rotazione di un lato $k+1$ di un multiplo di $\frac{\pi}{3}$ dà sempre uno dei lati $k'+1$. Quindi alla fine ritroveremo la somma su un sottoinsieme di $\{1,2,3,4,5,6\}$. Pertanto la "magia" sarà che per $n \neq -1$ la rotazione produrrà un sottoinsieme a somma zero, $\{1,2,3,4,5,6\}$ oppure $\{1,3,5\}$, $\{2,4,6\}$, $\{1,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,6\}$.

Ad esempio per $\boxed{n=1}$ ruotiamo di $\frac{k\pi}{3}$ e troviamo:

1 ruotato di $\frac{0\cdot\pi}{3}=0$ è ancora 1 ;

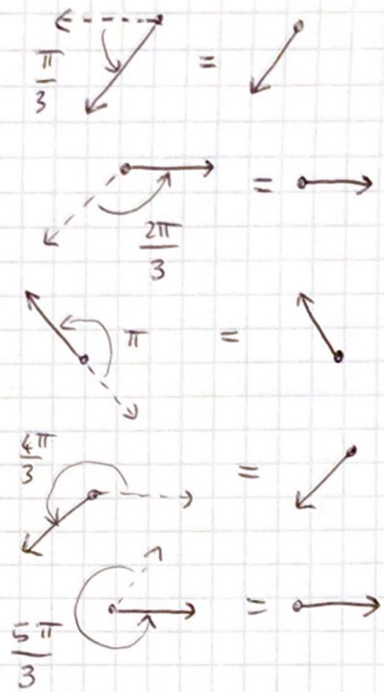
2 ruotato di $\frac{1\cdot\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ è 3 ;

3 ruotato di $\frac{2\cdot\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ è 5 ;

4 ruotato di $\frac{3\cdot\pi}{3}=\pi$ è 1 ;

5 ruotato di $\frac{4\cdot\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ è 3 ;

6 ruotato di $\frac{5\cdot\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ è 5 ;



Quindi per $\boxed{M=1}$ abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{5} i\, e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}}\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right) = 1+3+5+1+3+5$$
$$=0$$

In maniera simile, per $\boxed{M=2}$ dobbiamo ruotare $k+1$ di $2\times\frac{k\pi}{3}$, e poi sommare su K. Troviamo:

1 ruotato di $2\cdot\frac{0\cdot\pi}{3}=0$ è ancora 1

2 ruotato di $2\cdot\frac{1\cdot\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ è 4 ;

3 ruotato di $2\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ è 1 ;

4 ruotato di $2\cdot\frac{3\cdot\pi}{3}=2\pi$ è 4 ;

5 ruotato di $2\cdot\frac{4\cdot\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ è 1 ;

6 ruotato di $2\cdot\frac{5\cdot\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$ è 4 ;

Quindi per $\boxed{n=2}$ abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{5} i\, e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}} \left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)^2 = 1+4+1+4+1+4=0.$$

Elenchiamo l'effetto delle rotazioni anche per gli altri valori di $n \neq -1$:

$$\boxed{n=3}: \begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 5 \\ 3 \to 3 \\ 4 \to 1 \\ 5 \to 5 \\ 6 \to 3 \end{cases}, \quad \boxed{n=-2}: \begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 6 \\ 3 \to 5 \\ 4 \to 4 \\ 5 \to 3 \\ 6 \to 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in entrambi i casi la somma è 0.

Rimane il caso $\boxed{n=-1}$. La cosa speciale è che in questo caso tutti i lati vengono ruotati in 1 e quindi la somma non fa zero! Infatti:

1 ruotato di $-1 \cdot \frac{0 \cdot \pi}{3} = 0$ è 1;

2 ruotato di $-1 \cdot \frac{1 \cdot \pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ è 1;

3 ruotato di $-1 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$ è 1;

4 ruotato di $-1 \cdot \frac{3 \cdot \pi}{3} = -\pi$ è 1;

5 ruotato di $-1 \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$ è 1;

6 ruotato di $-1 \cdot \frac{5 \cdot \pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$ è 1;

Quindi in questo caso:

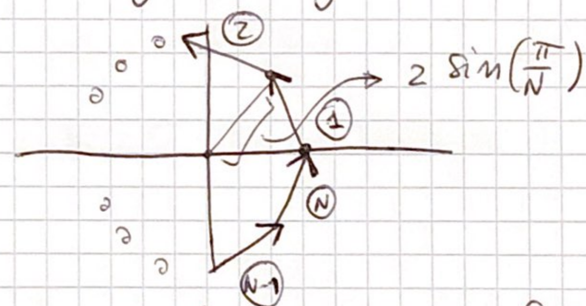
$$\sum_{k=0}^{5} i\, e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{3}} \left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)^{-1} = 1+1+1+1+1+1 = 6 \cdot 1 \neq 0$$

Riassumendo, per $N=6$ abbiamo ottenuto:

$$\sum_{k=0}^{5} i\, e^{\frac{i\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{3}} \left(e^{\frac{ik\pi}{3}}\right)^{m} = \begin{cases} 0, & \text{per } m=-2, 0, +1, +2, +3 \\ 6\, i\, e^{i\frac{\pi}{6}}, & \text{per } m=-1 \end{cases}$$

e abbiamo visto l'interpretazione geometrica di questo risultato. La stessa logica si può usare per N più generale. In questo caso le approssimazioni di dz sono: $2i\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) e^{i\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)2\pi}{N}}$

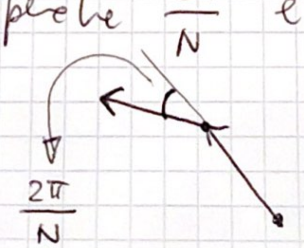
e formano un N-agono regolare di raggio $2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$:



Anche in questo caso la somma fa zero:

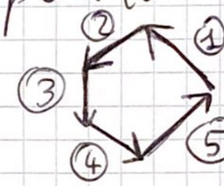
$$① + ② + \dots + (N-1) + (N) = 0$$

e rimane vero che moltiplicando per $\left(e^{i\frac{k2\pi}{N}}\right)^{m}$, ovvero ruotando di un multiplo di $\frac{2\pi}{N}$, un lato dell'N-agono viene mandato in un lato dell'N-agono, semplicemente perché $\frac{2\pi}{N}$ è l'angolo tra due lati consecutivi:



Dunque il punto rimane che al variare di m (sempre a meno di multipli di N, o "modulo N" come si dice) si trova che $\forall m \neq -1$ i lati vengono mandati in un sottoinsieme dei lati che ha somma 0, mentre per $m=-1$ è facile vedere che tutti gli N lati vengono mandati in 1.

Ad esempio vediamo anche esplicitamente le mappe che si trovano per $N=5$:



$1+2+3+4+5=0$

$\boxed{m=0}$ $1\to1$, $2\to2$, $3\to3$, $4\to4$, $5\to5$

$\boxed{m=1}$ $1\to1$, $2\to3$, $3\to5$, $4\to2$, $5\to4$

$\boxed{m=2}$ $1\to1$, $2\to4$, $3\to2$, $4\to5$, $5\to3$

$\boxed{m=-2}$ $1\to1$, $2\to4$, $3\to2$, $4\to5$, $5\to3$

$\Rightarrow$ in ogni caso il risultato della somma è $1+2+3+4+5=0$. Mentre per $\boxed{m=-1}$ si trova:

$\boxed{m=-1}$ $1\to1$, $2\to1$, $3\to1$, $4\to1$, $5\to1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{4} i\, e^{i\frac{(k+\frac{1}{2})2\pi}{5}} \left(e^{i\frac{k2\pi}{5}}\right)^{-1} = 5\,(1)$$

$$= 10\, i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) e^{i\frac{\pi}{5}}.$$

Nel caso di N generico, l'unico risultato diverso da zero, con $m=-1$ (modulo N) sarà uguale a:

$$\sum_{k=0}^{N-1} i\, e^{\frac{i\left(k+\frac{1}{2}\right)2\pi}{N}} \left(e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right)^{-1} = N \text{ ①}$$

$$= 2Ni \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) e^{i\frac{\pi}{N}}$$

Nel limite $N \to \infty$ questo dà: $2Ni\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)e^{i\frac{\pi}{N}}$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} 2\pi i$$

proprio come ci aspettavamo.

Possiamo provare algebricamente i risultati delle somme per N generico, che sopra abbiamo mostrato geometrica=mente per $N=6$ (e $N=5$ senza dettagli).

Abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{N-1} i\, e^{i\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)2\pi}{N}} \left(e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right)^{m}$$

[ho omesso un fattore $2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$, lo reinseriamo dopo]

$$= i\, e^{i\frac{\pi}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(m+1)k\frac{2\pi}{N}}$$

$$= i\, e^{i\frac{\pi}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{(m+1)2\pi}{N}}\right)^{k}$$

Usiamo l'identità: $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1-x^N}{1-x}$

valida per $x \neq 1$. Siccome vogliamo identificare $x = e^{i\frac{(m+1)2\pi}{N}}$, abbiamo $x \neq 1$ solo se $m \neq -1$.

Quindi per $n \neq -1$ la somma dà:

$$i e^{i\frac{\pi}{N}} \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{(n+1)2\pi}{N}}\right)^N}{1 - e^{i\frac{(n+1)2\pi}{N}}} \qquad (*)$$

Ma $\left(e^{i\frac{(n+1)2\pi}{N}}\right)^N = e^{i(n+1)2\pi} = 1 \quad \forall n$ intero.

Pertanto al numeratore in $(*)$ abbiamo $1 - 1 = 0$, e la somma in effetti fa $0 \ \forall n \neq -1$.

Invece per $n = -1$ abbiamo: $\left(e^{i\frac{(n+1)2\pi}{N}}\right)^k = \left(e^0\right)^k = 1$

e la somma dà: $i e^{i\frac{\pi}{N}} \sum_{k=0}^{N-1} 1 = i N e^{i\frac{\pi}{N}}$

Reinserendo il fattore $2\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)$ che avevo omesso prima, troviamo quanto detto sopra:

$$n = -1 : \quad 2i\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) N e^{i\frac{\pi}{N}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2\pi i.$$