

TEORIA DI YANG-MILLS

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Esiste un altro termine gauge inv., Lorentz inv e che contenga al più 2 derivati di A_μ ?

Sì:

$$I = \theta \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho})$$

$$= 4\theta \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr}(\partial_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\rho + 2i A_\mu A_\nu \partial_\sigma A_\rho)$$

$$= 4\theta \partial_\sigma \left\{ \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \text{tr} \left(A_\rho \partial_\mu A_\nu + \frac{2i}{3} A_\rho A_\mu A_\nu \right) \right\}$$

[PASSAGGI IN RAZIONI]

cioè I è una "derivata totale"

→ non modifica le equazioni del moto

Ma quantisticamente è un termine importante.
Viene chiamato "θ-term".

$$A_\mu = A_\mu^a t_R^a$$

↑ possiamo prendere qualsiasi R

oppure usare i generatori astratti T^a [tr $t_R^a = 0$]

→ usiamo la convenz. $\text{tr} t_R^a t_R^b = \delta^{ab}$

Eq. del moto :

$$\delta S = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu})$$

$$\delta F^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu + i \delta A^\mu A^\nu - i A^\mu \delta A^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left(F_{\mu\nu} \left(\partial^\mu \delta A^\nu + \underbrace{i \delta A^\mu A^\nu + i A^\mu \delta A^\nu}_{-i \delta A^\nu A^\mu} \right) \right)$$

Integriamo le parti, buttando via il termine di bordo
(variaz. si annullano agli estremi)

$$\delta S = \frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \left[\left(\partial^\mu F_{\mu\nu} + i [A^\mu, F_{\mu\nu}] \right) \delta A^\nu \right]$$

$$\Rightarrow \text{E.O.M.} \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} + i [A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0$$

$F_{\mu\nu}$ sta nella rapp. Adj \Rightarrow e.o.m. possono essere scritte:

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (*)$$

è COVARIANTE: se A_μ^0 è soluz. di (*),
allora anche $A_\mu^{0'}$ è soluz.

← trasformato di A_μ^0 sotto una fibria
tranz. di gauge

cioè qui elemento dell'ORBITA

di A_μ^0 è soluz.

In aggiunta $F_{\mu\nu}$ soddisfa alle IDENTITÀ DI BIANCHI

def. $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\sigma\tau}$; allora per def. di $F^{\sigma\tau}$

$$D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \quad \leftarrow \text{non è un'eq. del moto, ma un'identità che } A_\mu \text{ soddisfa.}$$

Dalle eq. del moto ricaviamo una CORRENTE CONSERVATA

$$j_\nu = i [A^\mu, F_{\mu\nu}] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{e.o.m.}}}{=} -\partial^\mu F_{\mu\nu} \Rightarrow \partial^\nu j_\nu = 0$$

è la stessa corrente che usavo applicando Noether

$$Q = \int d^3x j_0 = - \int d^3x \partial^i F_{i0} \quad i=1,2,3$$

$$= - \oint_{S_\infty^2} d\Sigma^i F_{i0}$$

Sotto transf. di gauge Q trasforma

$$Q \mapsto Q' = - \oint_{S_\infty^2} d\Sigma^i U_{(i)} F_{i0}^{(U)} U_{(i)}^{-1}$$

sono transf. di gauge valutate all' ∞

Richiedendo di limitarsi a transf. di gauge che tendono a una COSTANTE all'infinito spaziale, U può essere portata fuori dell'integrale e otteniamo

$$Q \mapsto U Q U^{-1} \quad (\text{transf. in matrice covariante})$$

Possono quindi def.

$$\Omega_{\neq} = \left\{ U(x) \mid U(x) \rightarrow \mathbb{1} \text{ a } |x| \rightarrow \infty \right\}$$

$$\Omega = \left\{ U(x) \mid U(x) \rightarrow \text{cost.} \in G \text{ a } |x| \rightarrow \infty \right\}$$

↑
tali $U(x)$ vengono chiamati
LARGE GAUGE TRANSF.

$$\Omega / \Omega_{\neq} \cong G$$

↑ gruppo di simmetria

QUANTIZZAZIONE CANONICA

- Teoria di YM è una teoria vincolata \rightarrow DIRAC BRACKETS
- Facciamo un GAUGE FIXING e poi applichiamo la quant. canonica
- $A_0^a = 0$
↑ A_0^a è la componente che non ha un momento coniugato non-triviale
↓ Regole di comm.

$$[A_i^a(\bar{x}, t), A_j^b(\bar{y}, t)] = 0 \quad [F_{0i}^a(\bar{x}, t), F_{0j}^b(\bar{y}, t)] = 0$$

$$[A_i^a(\bar{x}, t), F_{0j}^b(\bar{y}, t)] = i \delta^{ab} \delta_{ij} \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

def. ps. \Rightarrow non abbiamo stati a norma negativa

Mettendo a zero A_0^a , nascono l'infinit. data dalle sue eq. del moto, che quindi devo imporre a zero:

$$\text{eqn di } A_0^a : (D_i F^{i0})^a = 0 \quad (\text{GAUSS LAW})$$

Questa condizione viene imposta sugli stati fisici:

$$(D_i F^{i0})^a | \text{phys} \rangle = 0 \quad \leftarrow \text{In particolare questa uccide le polarizzazioni longitudinali}$$

$$\updownarrow$$

$$\Gamma(\alpha) | \text{phys} \rangle = 0 \quad \forall \alpha \text{ transf. di gauge}$$

$$\text{donc } \Gamma(\alpha) \equiv \int d^3x \alpha^a(x) (D_i F_{ix})^a$$

Se abbiamo una sim. generata da T , e un camp ϕ che transf. sotto tale simm, allora

$$\delta\phi = i[T, \phi]$$

usiamo le regole di comm canoniche

L'operatore che genera la transf. $\delta A_i^a = (D_i \alpha)^a$

$$\bar{e} \quad \tilde{T}(\alpha) = \int d^3x \underline{F^{a0i}} (D_i \alpha)^a$$

$$(\text{cioè } \delta A_i^a = -i [A_i^a, \tilde{T}(\alpha)])$$

$$\partial_i (\underbrace{F^{a0i}}_{\text{singoletto}} \alpha^a) = (D_i F^{a0i}) \alpha^a + \underline{F^{a0i}} D_i \alpha^a$$

\Downarrow

$$\tilde{\Gamma}(\alpha) = \int \partial_i (F^{a0i} \alpha^a) d^3x - \Gamma(\alpha)$$

" ↑

$$\oint_{S_\infty^2} F^{a0i} \alpha^a = \alpha^a(\infty) Q^a$$

si annulla in eq. del vuoto

$$\delta |\psi\rangle = i \tilde{\Gamma}(\alpha) |\psi\rangle = i \alpha^a(\infty) Q^a |\psi\rangle - i \cancel{\Gamma(\alpha)} |\psi\rangle$$

= 0 se $|\psi\rangle$
è uno STATO FISICO

Quando $\alpha^a(\infty) = 0$ allora $|\psi\rangle$ è INVARIANTE ;
 le transf. con $\alpha^a(\infty)$ sono quelle $U(x)$ che $\rightarrow 1$
 in $|x| \rightarrow \infty$ e sono una vera RIDONDANZA.

$$\Omega_* = \{ \text{vere ridondanze} \leftrightarrow \text{transf. di gauge} \}$$

$$\Omega / \Omega_* \cong G \quad \text{è il GRUPPO DI SIMMETRIA delle forze}$$