19 ottobre.

<u>Def</u> $f : X \to Y$ si dice suriettiva se $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$ t.c. $f(x) = y$.

o, equivalentemente, quando

$$f(X) = Y.$$

<u>Def</u> $f : X \to Y$ si dice iniettiva se

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

<u>Lemma</u> Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$. Se f è strettamente crescente (decrescente) allora f è iniettiva.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Una $f : X \to \mathbb{R}$ è monotona se è o una una funzione crescente o una funzione decrescente.

Def (Composizione di funzioni) Date due funzioni

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

la loro composizione è una funzione

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

ed è definita da

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in X$$

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

Esempio

X = insieme degli studenti

$Y = \mathbb{R}$ $\qquad f : X \to Y$ la funzione voto

$Z = \{B, P\}$

$$Y = \mathbb{R} \xrightarrow{g} Z$$

$$g(y) = B \quad \text{se} \quad y < 18$$

$$g(y) = P \quad \text{se} \quad y \geq 18$$

$$g \circ f : X \longrightarrow Z$$

$$x \longrightarrow f(x) = \text{voto} \xrightarrow{g(f(x))} B \text{ o } P$$

a seconda che $f(x)$ sia maggiore o minore di 18.

Esempi $f(x) = x+3$

$$g(y) = e^{y^2}$$

$$g\circ f = g(f(x)) = e^{f^2(x)} = e^{(x+3)^2}$$

$$f\circ g(y) = f(g(y)) = g(y)+3 = e^{y^2}+3$$

$$f\circ g(x) = e^{x^2}+3 \neq e^{(x+3)^2}$$

$$f\circ g \neq g\circ f$$

Esercizio Siano $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} Z$.

Dimostrare

1) $g\circ f$ suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

2) $g\circ f$ iniettiva $\Rightarrow$ f iniettiva.

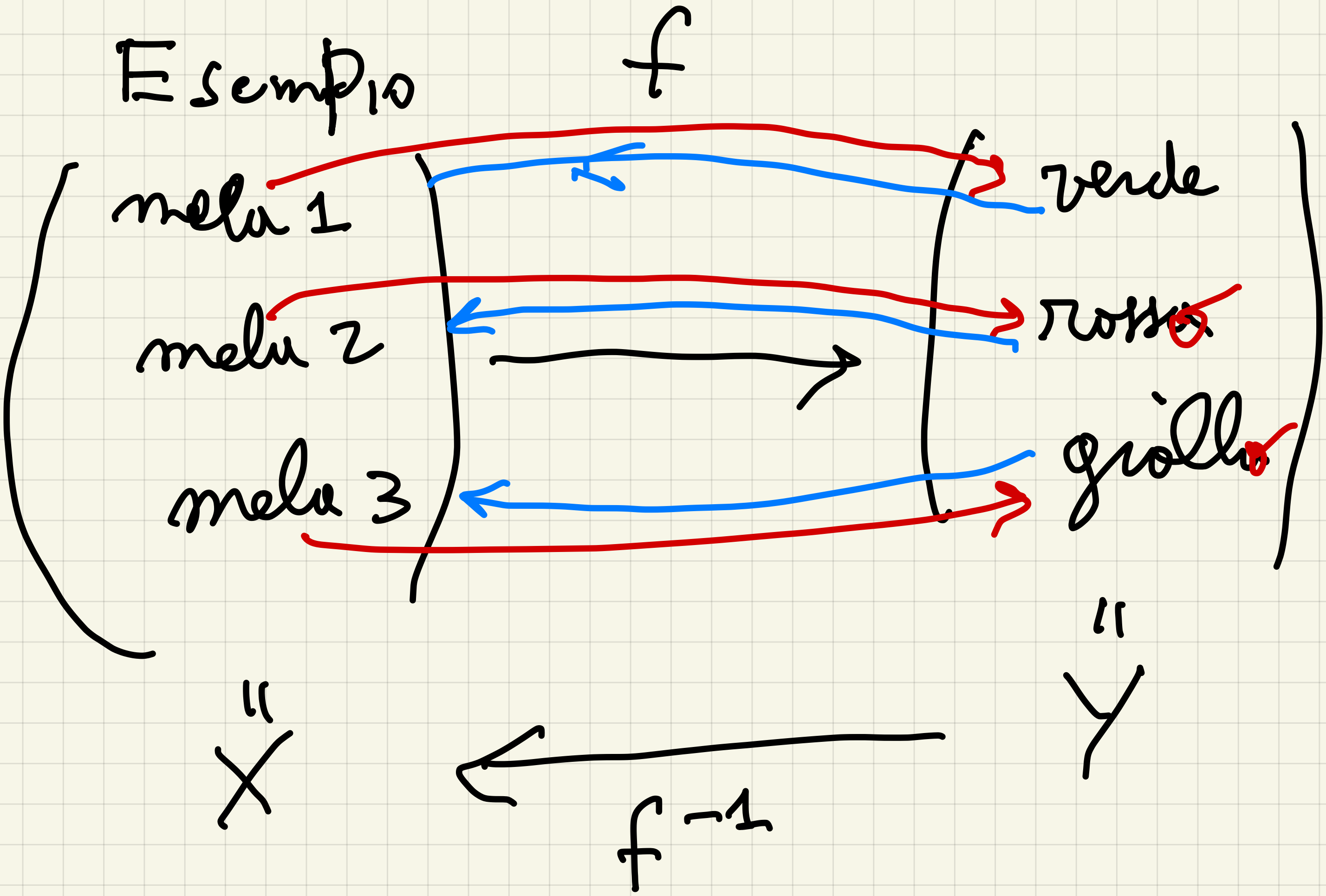
Stabilire se sono vere le implicazioni opposte.

<u>Def</u> Se $f : X \to Y$ è sia iniettiva che suriettiva, allora f si dice biettiva.

Quando $f: X \to Y$ è biettiva allora $\forall\, y \in Y$ resta definito uno e un unico elemento $x \in X$ t.c. $f(x) = y$. La funzione $Y \longrightarrow X$ che associa ad ogni $y \in Y$ questo $x \in X$ è detto funzione inversa della funzione f. La funzione inversa viene denotata con il simbolo $f^{-1} : Y \longrightarrow X$

$$\boxed{f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}}$$

Esempio



Sia $f : X \longrightarrow Y$ biettiva

Resta definito il grafico

$$\Gamma_f = \{ (x, y) \in X \times Y : y = f(x) \}$$

Sia $f^{-1} : Y \longrightarrow X$. Resta definito

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{ (y, x) \in Y \times X : x = f^{-1}(y) \}$$

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Sia $f^{-1} : Y \to X$. Resta definito

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y,x) \in Y \times X : x = f^{-1}(y)\}.$$

Osserviamo che

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Quindi

$$\Gamma_{f^{-1}} = \{(y,x) \in Y \times X : y = f(x)\}$$

Si osserva che gli elementi di $\Gamma_{f^{-1}}$ sono ottenuti prendendo gli elementi di Γ_f scambiandone le coordinate.

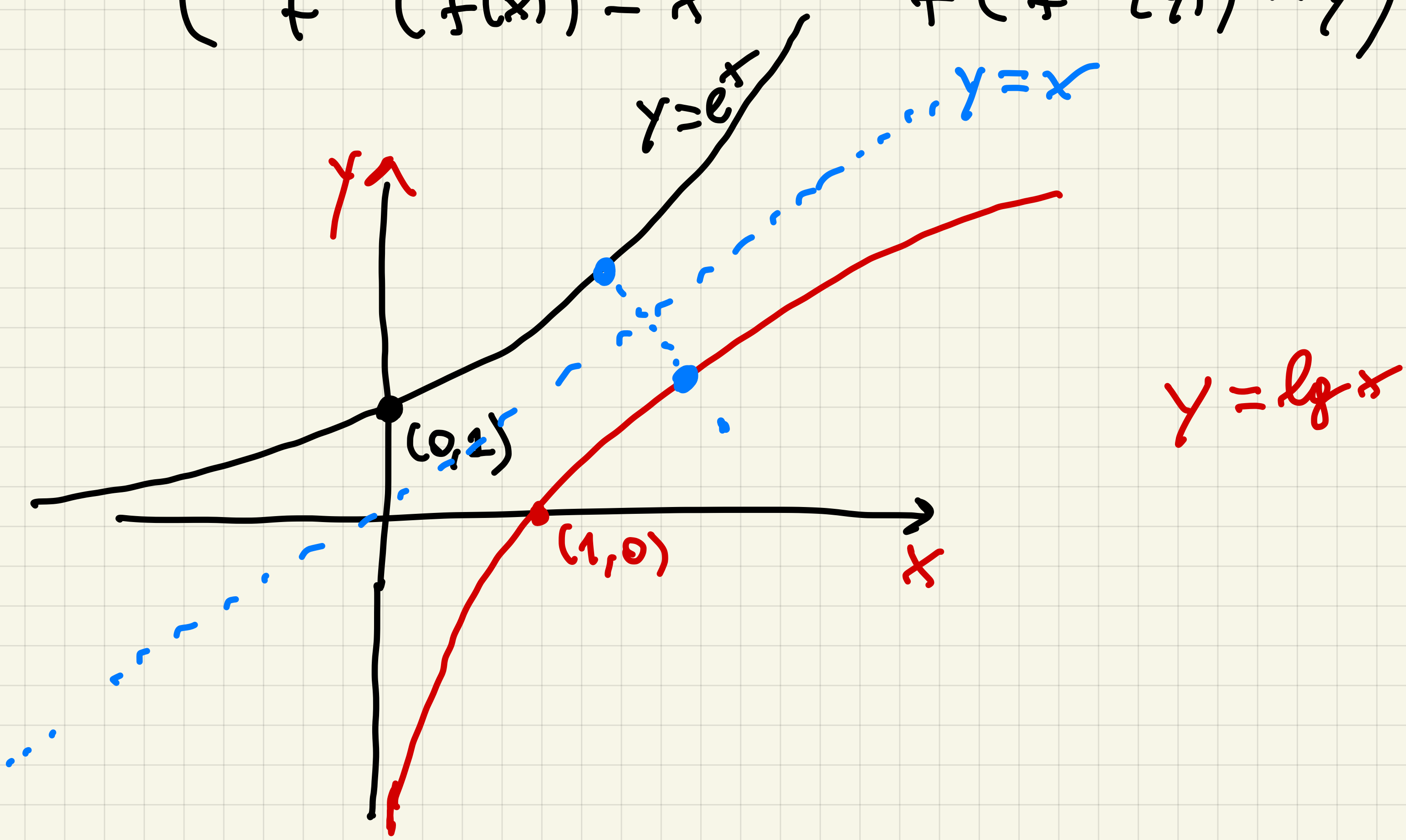
__Es__ $f(x) = e^x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

è biettiva. La funzione inversa è

$\lg x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$

$$\lg e^x = x \qquad e^{\lg x} = x$$

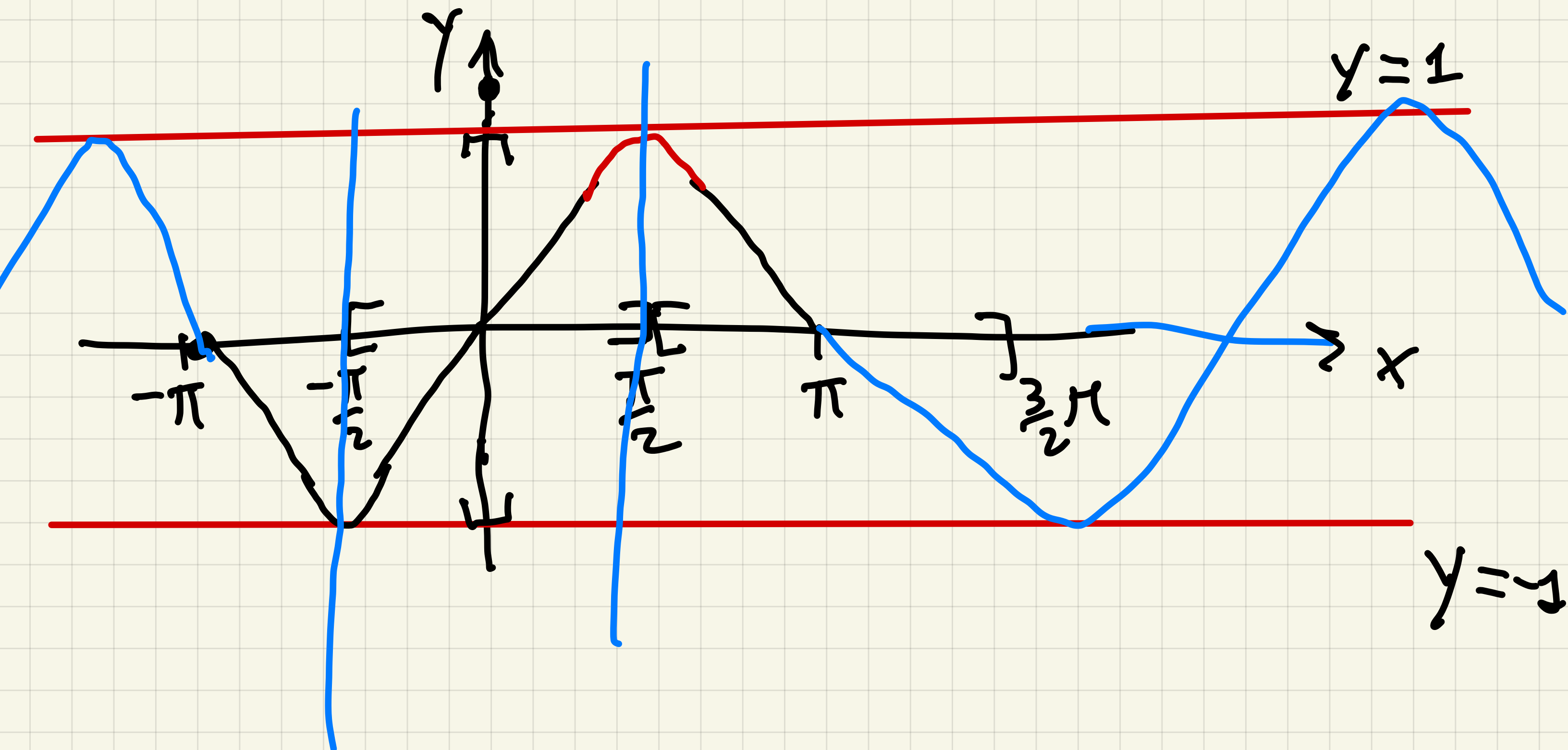
$$\left(f^{-1}(f(x)) = x \qquad f(f^{-1}(y)) = y \right)$$

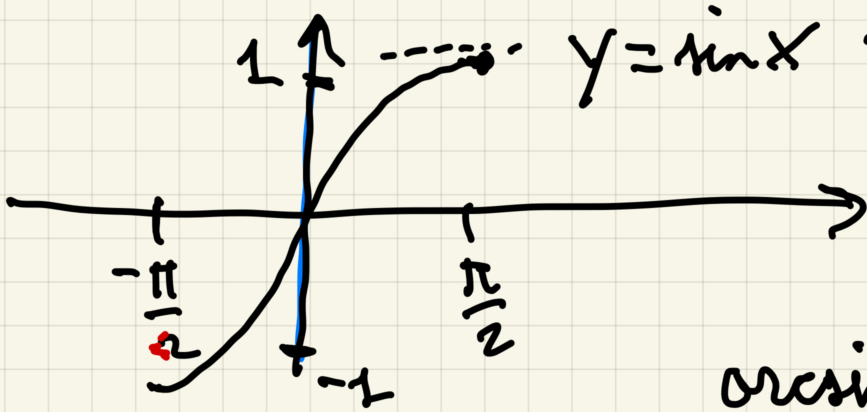


Esempio (arcsin)

$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

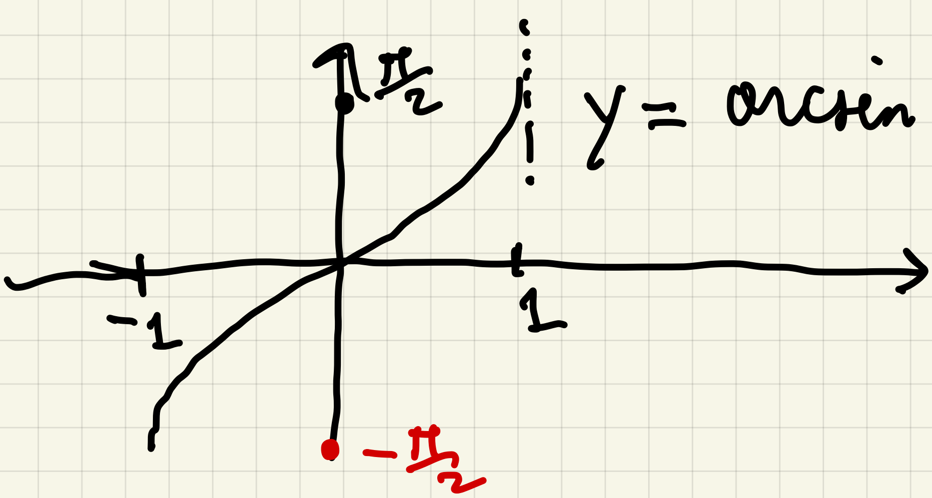
$\sin x : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$



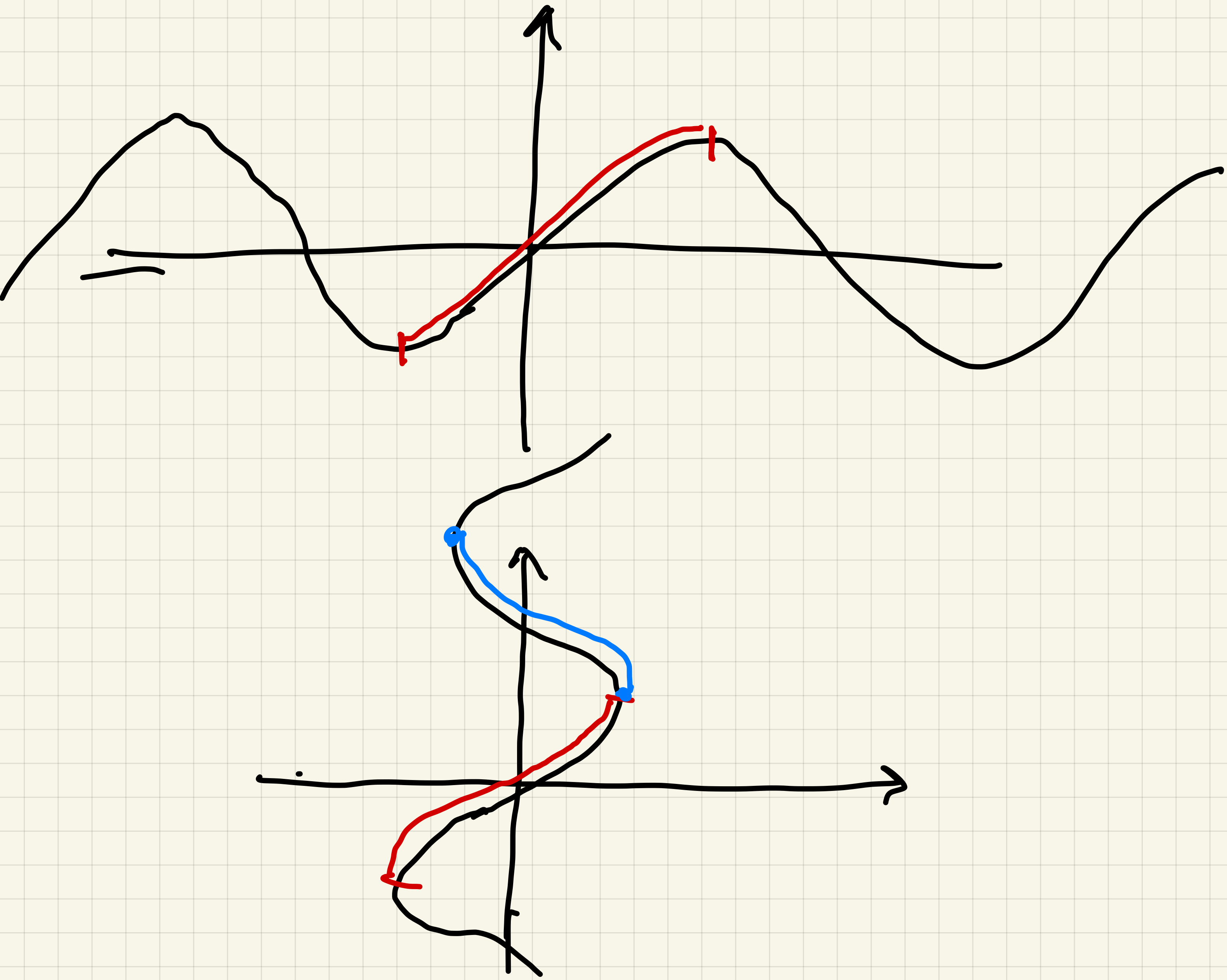


$y = \sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$

$\arcsin x : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



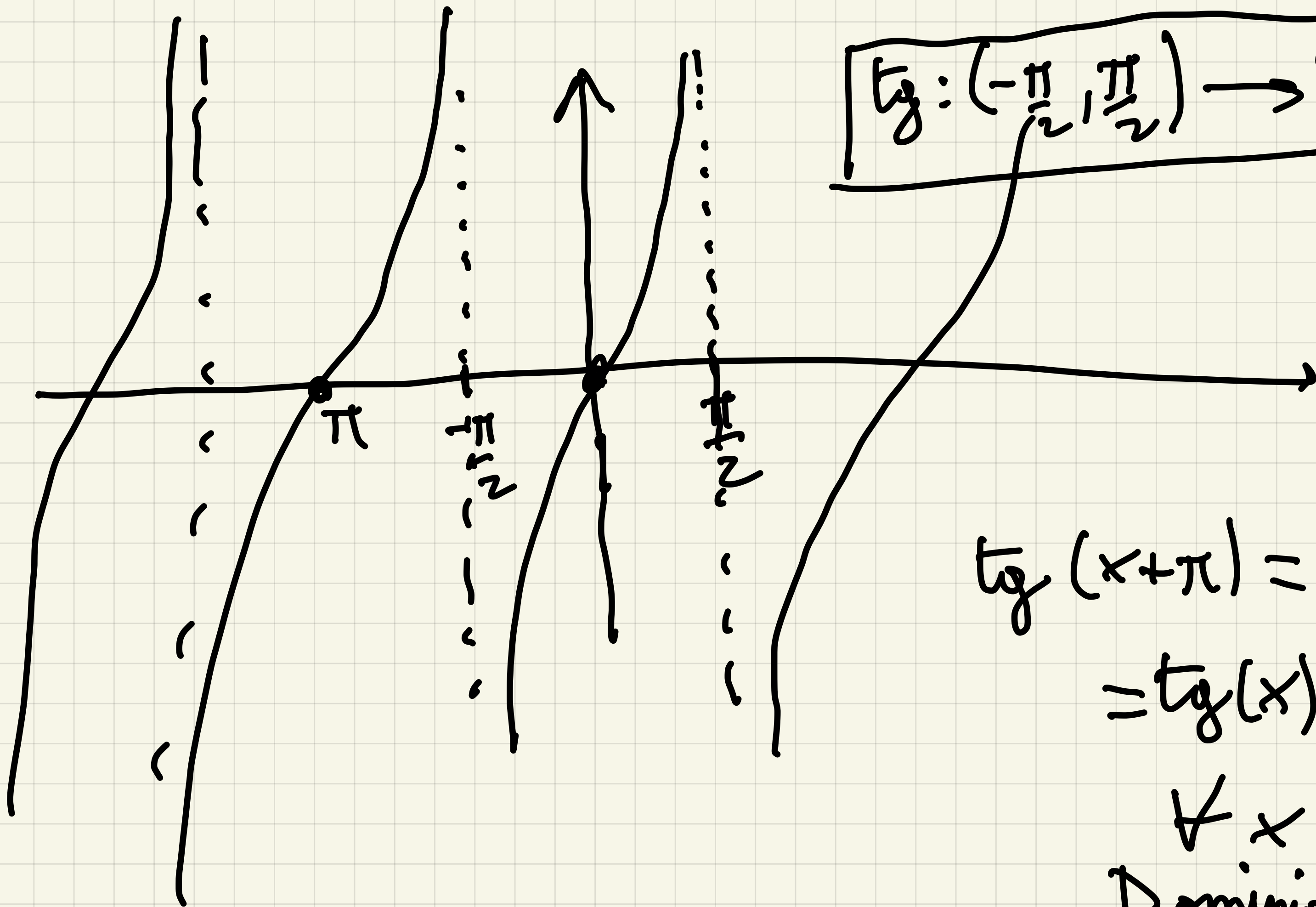
$y = \arcsin x$



Es Arcotangente.

$tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\boxed{tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}}$

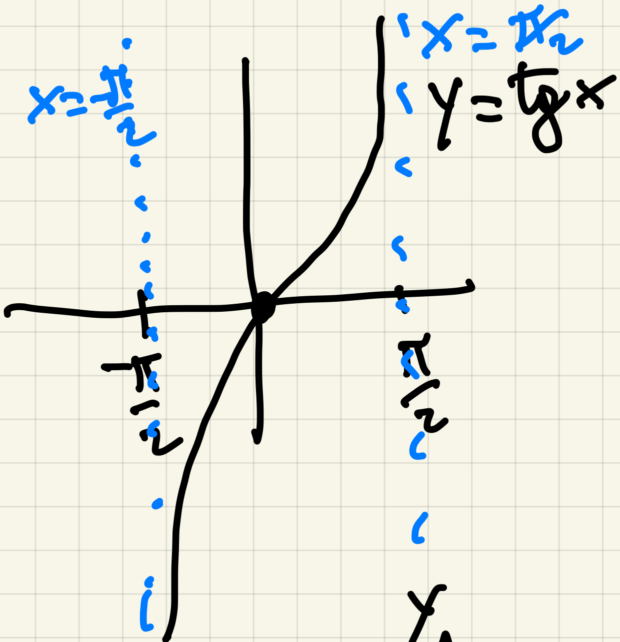


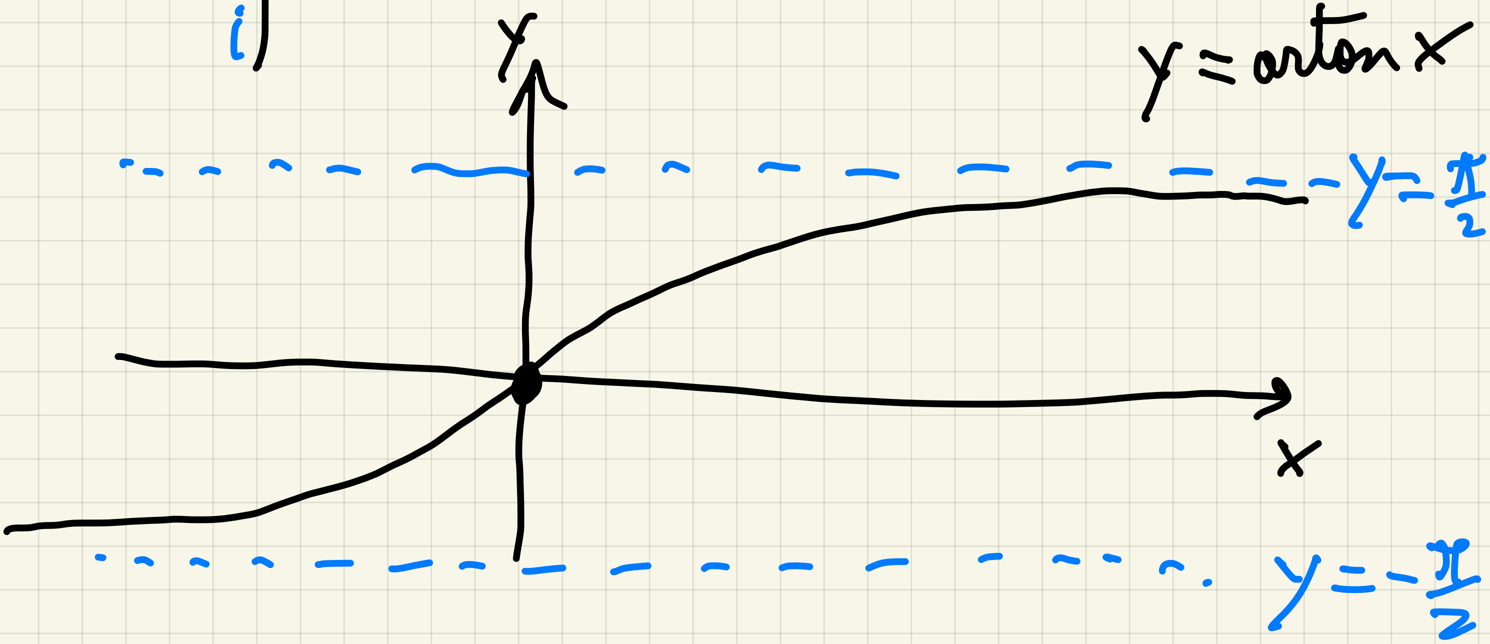
$tg(x+\pi) =$
$= tg(x)$
$\forall x$ nel Dominio di tg

$\mathrm{Dom}\, tg = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ per } k \in \mathbb{Z}\}$

L'inversa di $tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$

è $\operatorname{arctan} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$





<u>Def</u> Sia $f: X \to \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$

t.c. $\quad X = -X \; (= \{-x : x \in X\})$

Allora

1) f si dice funzione pari se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in X$$

2) f ... dispari se $\quad f(x) = -f(-x) \;\; \forall x \in X.$

Esempi Sia $n \in \mathbb{N}$, allora

$x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è (dispari) pari esattamente

se n è un numero pari (dispari)

$\sin(x)$ è dispari

$\cos(x)$ è pari

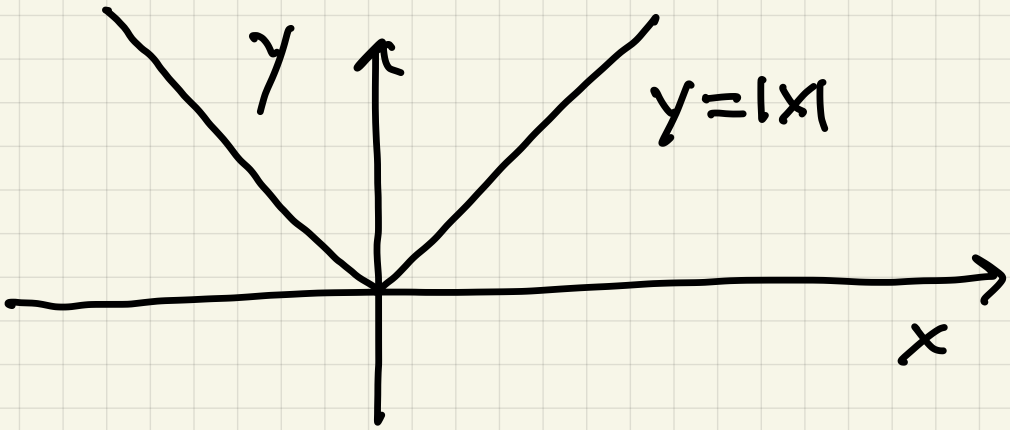
$\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ è dispari.

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

Funzione valore assoluto

$$|x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Proprietà

1) Lemma Sia $a \geq 0$. Allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

2) $|xy| = |x|\,|y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

3) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

<u>Dim</u> Ovviamente

$$\left.\begin{array}{l} |x| \leq |x| \implies -|x| \leq x \leq |x| \\ |y| \leq |y| \implies -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\} \text{sommiam}$$

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\Updownarrow$$

$$|x+y| \leq \underbrace{|x| + |y|}_{a} \qquad \square$$

$a \geq 0$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Esercizio $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \forall n \in \mathbb{N}$