Equazioni per lo strato limite (laminare)

Tenuto conto del modello proposto da Prandtl (1905), per la conservazione della quantità di moto si ha:

1) Lontano dal mezzo confinante

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$ [per un fluido di "laboratorio"]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\varepsilon_{ijk} f_j u_k - \delta_{ik} g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}$$ [per l'atmosfera terrestre]

2) Nello strato limite (anche per $Re \gg 1$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \boxed{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$ [per un fluido di "laboratorio"]

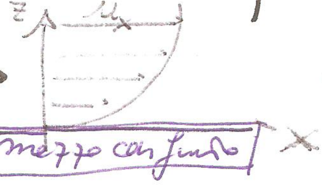
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\boxed{\varepsilon_{ijk} f_j u_k} - \delta_{ik} g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \boxed{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}$$ [per l'atmosfera terrestre]

Alcune considerazioni vanno fatte sui termini legati alla $\boxed{\text{viscosità}}$ e all'accelerazione di $\boxed{\text{Coriolis}}$

Per quanto riguarda l'accelerazione di Coriolis, nel surface layer atmosferico è trascurabile rispetto agli altri addendi. Nell'outer layer deve, in alcuni casi, essere considerato non trascurabile (es. modello di Ekman)

Per quanto riguarda il termine connesso con la viscosità, secondo l'ipotesi di Prandtl, solo le variazioni delle velocità parallele al mezzo confinante, nella sola direzione ortogonale alla superficie del mezzo confinante sono NON trascurabili rispetto gli altri addendi.

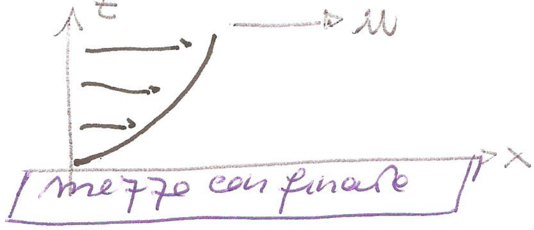
$$\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \longrightarrow$$



$$\longrightarrow \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$$

Nel caso più semplice di strato limite, non caratterizzato da gravità e accelerazione di Coriolis si ha

(fluido in 2 dimensioni)



$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$ [conservazione quantità di moto]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ [conservazione della massa]

Se consideriamo il primo membro dell'equazione per la conservazione della quantità di moto caratterizzato, come ordine di grandezza, dall'avvezione lungo x, cioè $u\frac{\partial u}{\partial x}$ è dominante(*), allora l'ipotesi di Prandtl si trasforma operativamente in:

$$(1) \quad u\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$\forall R_e$ anche $\lim_{R_e \to +\infty}$

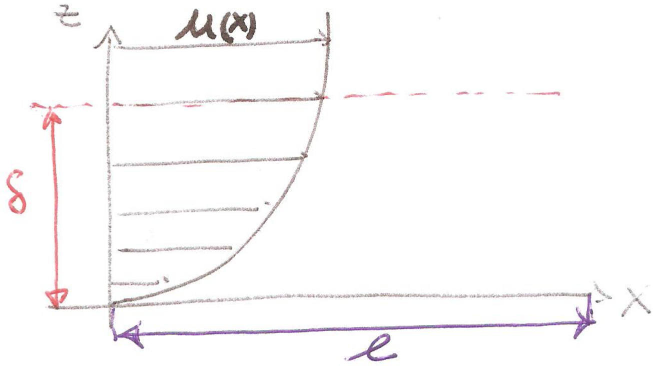
(*) Il caso stazionario e con $|w| \ll |u|$ è tra quelli considerati.

La relazione (1) si può anche scrivere:

ipotesi di Prandtl

$$\boxed{\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \simeq 1 \ \left(\text{stesso ordine di grandezza}\right) \Rightarrow \lim_{R_e \to +\infty} \frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \simeq 1}$$

Da questa definizione operativa è possibile individuare alcune caratteristiche generali degli strati limite



δ spessore strato limite

ℓ lunghezza della parte di mezzo confinante interessato dallo strato limite.

quindi $u \frac{\partial u}{\partial x} \sim u \frac{u}{\ell}$ e $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sim \nu \frac{u}{\delta^2}$

da cui $\boxed{\frac{u^2}{\ell} \Big/ \nu \frac{u}{\delta^2} \simeq 1}$ $\boxed{u \frac{\delta^2}{\nu \ell} \simeq 1}$

Ricordando la definizione del numero di Reynolds

$\boxed{R_e = \frac{LU}{\nu}}$ nel caso in esame $R_e = \frac{\ell u}{\nu}$

perciò $\frac{u \delta^2}{\nu \ell} \simeq 1 \Rightarrow R_e \frac{\delta^2}{\ell^2} \simeq 1$

Che deve valere anche per $\boxed{\lim_{R_e \to +\infty} R_e \frac{\delta^2}{\ell^2} \simeq 1}$

Quindi esiste una relazione tra lo spessore dello strato limite δ, la lunghezza del mezzo confinante lungo la direzione del moto del fluido ℓ ed il numero di Reynolds

$$\boxed{\frac{\delta}{\ell} \simeq \frac{1}{\sqrt{R_e}}}$$

Quindi il rapporto tra lo spessore dello strato limite e la lunghezza del mezzo confinante, lungo la direzione del fluido è determinato dal numero di Reynolds

Ora data la relazione tra le dimensioni tipiche del mezzo confinante (ℓ) e lo spessore dello strato limite, è possibile analizzare le proprietà del sistema nella direzione perpendicolare al mezzo confinante

Dall'equazione di continuità possiamo ricavare una relazione tra la velocità tipica lungo la normale (w) e quella parallela alla superficie confinante (u)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial w}{\partial z}}$$

Ricordiamo che $\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$ e che

$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \simeq \nu \frac{u}{\delta^2}$ quindi $u \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \nu \frac{u}{\delta^2}$

o anche $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{\nu}{\delta^2}}$ perciò abbiamo

anche una stima della relazione tra $\frac{\partial w}{\partial z} \simeq \frac{w}{\delta}$ e gli altri parametri del problema

$$\frac{\partial w}{\partial z} \simeq \frac{w}{\delta} \simeq - \frac{\nu}{\delta^2}$$

(il segno − lo trascuriamo in quanto siamo interessati alla dipendenza funzionale dei moduli)

$$\boxed{w \simeq \frac{\nu}{\delta}}$$

Ricordiamo che $R_e = \frac{u l}{\nu}$ quindi $w \simeq \frac{u}{R_e} \frac{l}{\delta}$

ma $\frac{l}{\delta} \simeq \sqrt{R_e}$ quindi

$$\boxed{w \simeq \frac{u}{\sqrt{R_e}}}$$

la velocità del fluido, nella direzione ortogonale la superficie del mezzo confinante, è molto minore rispetto a quella della direzione parallela alla superficie

Osservazione

Nel caso dello strato limite atmosferico, per cui $\nu \simeq 10^{-5}\, m^2 s^{-1}$ e velocità $u \simeq 10\, m s^{-1}$ considerando una lunghezza tipica della superficie del mezzo confinante confrontabile con la scala tipica dei fenomeni alla meso o microscala, quindi $l \simeq 10^3\, m$ si ha:

$$\boxed{\frac{\delta}{l} \simeq \frac{1}{\sqrt{Re}} = \frac{1}{\sqrt{10^9}}}$$

Che ci da una stima per lo spessore dello strato limite atmosferico di

$$\boxed{\delta} \simeq \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 10^{-4} \cdot 10^3\, m \boxed{\sim \frac{1}{3} 10^{-1}\, m}$$

Questo valore è ordini di grandezza inferiore a quanto misurato, quindi tale incongruenza va motivata.

Se il modello di Prandtl non prevede ipotesi sulla natura del mezzo confinante, né sul fluido, il modello deve essere applicabile anche all'atmosfera.

La fonte dell'incongruenza risiede nell'elevato valore assunto dal numero di Reynolds.

Notiamo che $\boxed{Re = \frac{lu}{\nu}}$ e visto che l e u sono note sperimentalmente possiamo supporre che sia inverosimile il valore attribuito a ν.

Assumendo che nell'atmosfera $\boxed{\frac{\delta}{l} \simeq 10^{-2}}$ valore ragionevole per strati limite non convettivi si ha che ν dovrebbe valere

$$\frac{\delta}{l} = 10^{-2} \simeq \frac{1}{\sqrt{Re}} \Rightarrow Re = 10^4 \Rightarrow \boxed{\nu \simeq 1\; m^2 s^{-1}}$$

Osservazione

Negli esperimenti di laboratorio si nota che lo spessore dello strato limite è descritto con ottima approssimazione dal modello di Prandtl solo per numeri di Reynold inferiori a un valore critico ($\sim 3.2 \cdot 10^5$) al di sopra di tale valore lo strato limite aumenta la sua estensione secondo una dipendenza da Re, diversa dalla $(Re)^{-1/2}$ trovata con il modello di Prandtl, ma è dipendente da $(Re)^{-1/5}$

Il valore critico corrisponde alla transizione del regime da quello laminare a quello turbolento.

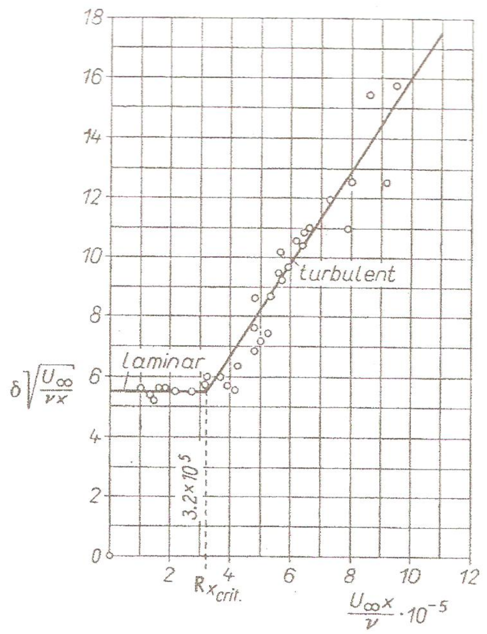


Fig. 2.23. Boundary-layer thickness plotted against the Reynolds number based on the current length x along a plate in parallel flow at zero incidence, as measured by Hansen [16]