20 ottobre.

Comunicazione: domani ricevimento su Teams nella fascia 17-18.

<u>Distanza sulla retta</u> Dati $x, y \in \mathbb{R}$ la loro distanza è data da

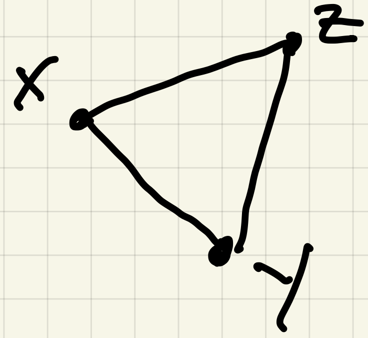
$$|x-y|.$$

<u>Proprietà</u>

a) $|x-y| = 0 \iff x = y$

b) $|x-y| = |y-x| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

c) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$



Dimostrare che c) è equivalente a

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

<u>Esercizio</u> Dimostrare che dati due numeri $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$, allora si ha:

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \implies L_1 = L_2$$

Successioni

<u>Def</u> Dato un insieme X, una successione di elementi di X è una funzione $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$.

La successione verrà rappresentata nella forma $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_n\}$

dove $x_n = f(n)$

Esempi

$$\{n\} = \{1, 2, 3, \dots\} \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\{1, 1, 1, 1, \dots\} \qquad \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

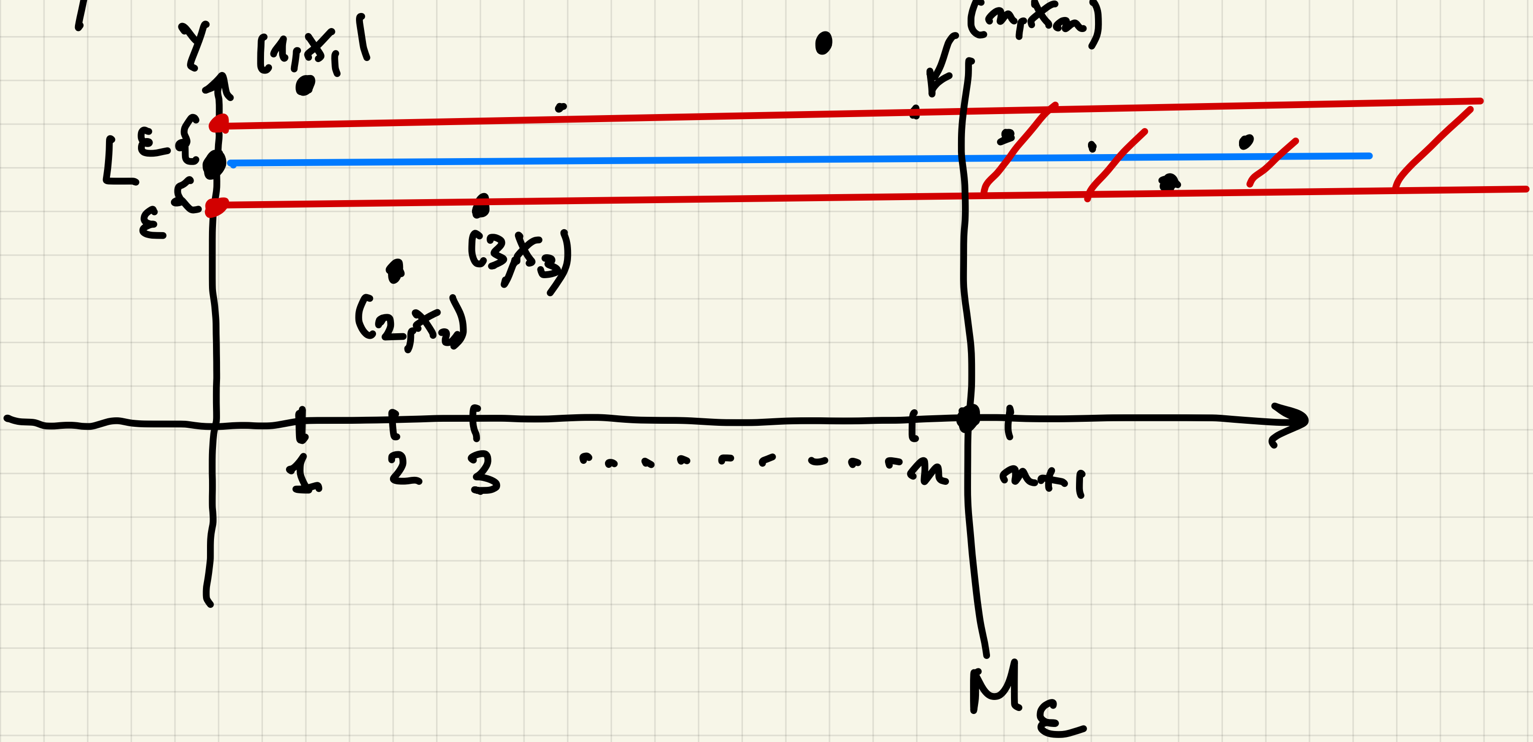
$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ non esiste.

$$\left(\begin{array}{ccccc}
\frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \dots \\
\frac{0}{1} & -\frac{1}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{3}{1} & \dots \\
\frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \dots \\
\frac{0}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\frac{0}{n} & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{3}{n} & \dots \\
\frac{0}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{2}{n} & -\frac{3}{n} & \dots
\end{array}\right)$$

Def (di limite quando il limite è in $\mathbb{R}$)

Data una successione $\{x_n\}$, si dice che $L \in \mathbb{R}$ è il limite della successione, e si scrive $\lim_{n \to +\infty} x_n = L$, quando si ha

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \\ n > M_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon . \end{array}}$$



$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sia $\varepsilon > 0$. Notiamo che

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Quindi:

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Abbiamo dimostrato l'esitenza di un numero $M_\varepsilon \left(= \frac{1}{\varepsilon}\right)$ con la proprietà che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } n > M_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

In effetti, siccome $x_n = 1 \quad \forall n$, risulta $|x_n - 1| = 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ e $\forall n$.

Se pongo $M_\varepsilon = 0$ allora è vero che

$$n > M_\varepsilon = 0 \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$$

Quindi abbiamo dimostrato che è vero

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \text{ t.c. }$$
$$n > M_\varepsilon \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon .$$

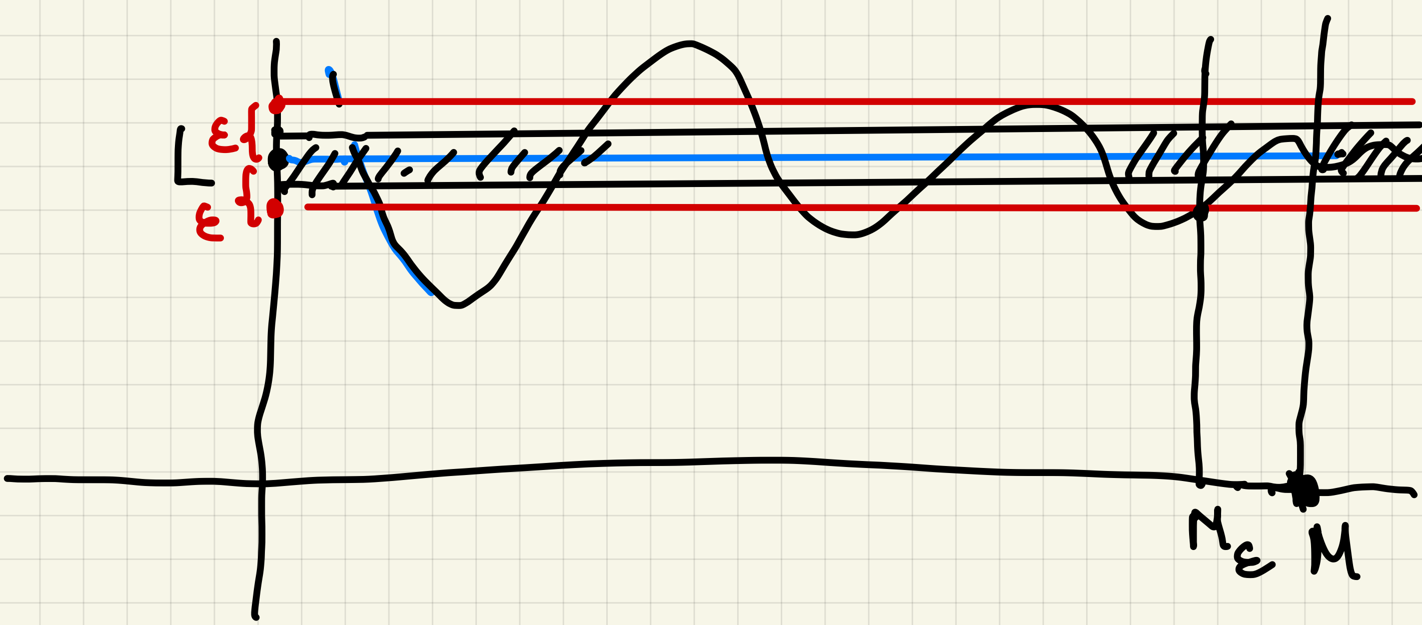
$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$

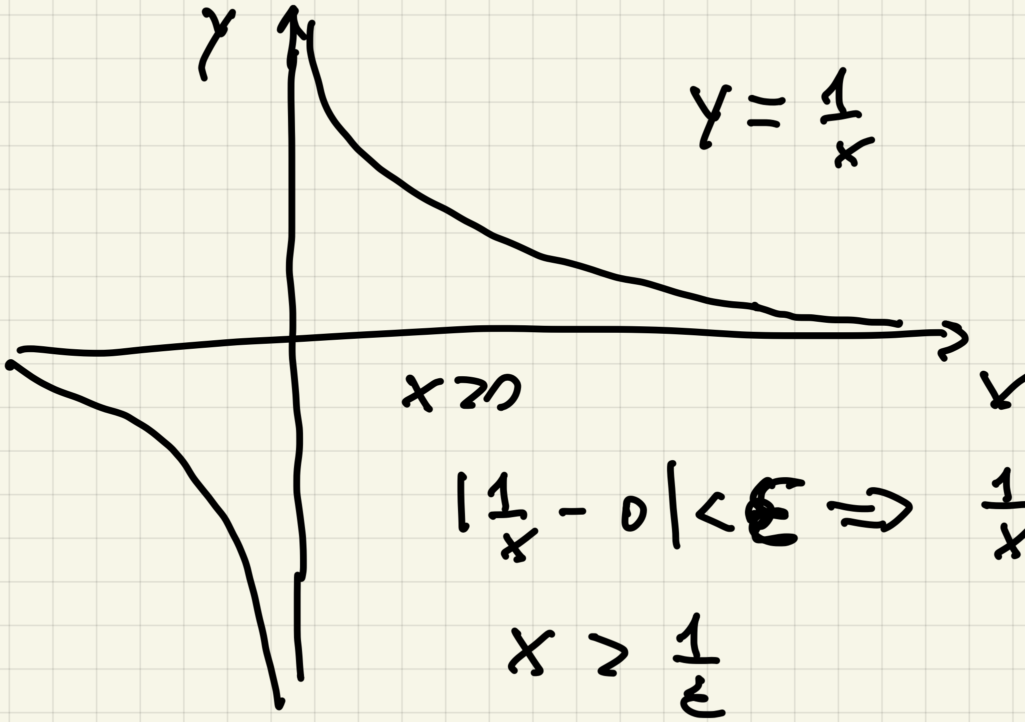
Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ a $+\infty$, e scriviamo

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, se si ha

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_\varepsilon \quad \text{t.c.} \\ x > M_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon. \end{array}}$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$x > \frac{1}{\varepsilon}$$

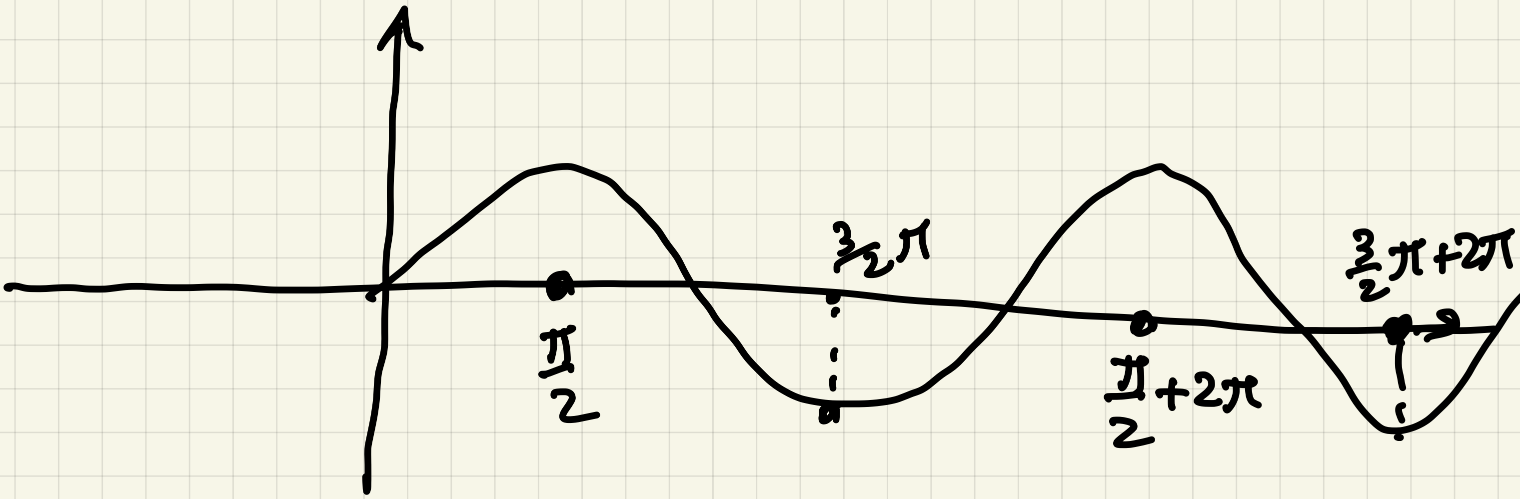
Quindi $x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

Quindi abbiamo dimostrato che

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \ \text{t.c.} \\ x > M_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \end{array}}$$

$$M_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste



Osserviamo che $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= 1$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi n\right) = -1$

Se per assurdo esistesse $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = L \in \mathbb{R}$

Allora avrei

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c.

$$x > M_\varepsilon \Rightarrow |\sin(x) - L| < \varepsilon .$$

Ma allora, se $\frac{\pi}{2}+2\pi n > M_\varepsilon$,

cioè se $n > \dfrac{M_\varepsilon - \frac{\pi}{2}}{2\pi}$, avrò concludere che

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-L\right|<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad |1-L|<\varepsilon$$

E siccome $\forall\, \varepsilon>0$ esistono

$n > \dfrac{M_\varepsilon - \frac{\pi}{2}}{2\pi}$, concludo

che $|1-L|<\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon>0$

$$\Longrightarrow \boxed{L=1}$$

$\forall\, \varepsilon>0$ se $\frac{3}{2}\pi+2\pi n > M_\varepsilon$,

cioè se $n > \dfrac{M_\varepsilon - \frac{3}{2}\pi}{2\pi}$, si

ha $\left|\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\pi n\right)-L\right|<\varepsilon$

$$\Longrightarrow |-1-L|<\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon>0$$

$$\Longrightarrow \boxed{-1=L} \Longrightarrow 1=-1 \text{ assurdo}$$

Def $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T>0$ se e solo se

$$f(x+T)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Esercizio Dimostrare che se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è periodica di periodo T e non è costante, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste.

Teor (unicità del limite)

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$

Se due numeri reali L_1 ed L_2 sono limiti di f a $+\infty$, allora $L_1 = L_2$.

<u>Dim</u> $L_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ significa

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_1(\varepsilon)$ t.c. $x > M_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

$L_2 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ significa

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_2(\varepsilon)$ t.c. $x > M_2(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

Sia $M_3(\varepsilon) = \max\{M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon)\}$ e se $x > M_3(\varepsilon)$

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|L_1 - f(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

Concludo che $\forall \varepsilon > 0$ ho $|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ hw $|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$

$\Longrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ hw $|L_1 - L_2| < \varepsilon$.

$\Longrightarrow$ $L_1 = L_2$.