Prop (Veneredì) V sp. vett. generato da $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_r\} \subset V$ lin. indip.

$\Longrightarrow \quad r \leq n.$

Corollario V sp. vett. finitamente generato, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base per V.

Se $\{w_1, \dots, w_r\} \subset V$ sono linearmente indip. allora $r \leq n$.

Se $\{u_1, \dots, u_s\} \subset V$ sono generatori allora $s \geq n$.

Corollario Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_r\}$ sono due basi di V allora $n = r$.

$r \leq n$ e $n \leq r \Longrightarrow r = n$

Def La dimensione di V è il numero di vettori di una base di V.

Si denota con $\dim V$.

Es. $\mathbb{K}^n$ base canonica

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

$$\boxed{\dim \mathbb{K}^n = n}$$

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$

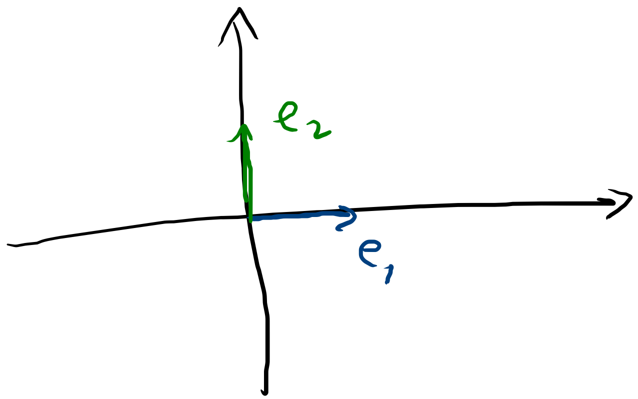
$\mathbb{K}$ $\mathbb{K}$-sp. vett. $\rightsquigarrow \dim \mathbb{K} = 1$

$\dim O = 0$ $\qquad O = \{0\}$

$\uparrow$

sp. vett. nullo

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$



Teorema Se V sp. vett. finit. generato e $W \subset V$ sottosp. vett.

$\Longrightarrow$ W finitamente gen. e $\dim W \leq \dim V$.

Dim Sia $n = \dim V$

Se $W = \{0_V\}$ $\Rightarrow$ $\dim W = 0 \leq n$

Altrimenti $\exists$ $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0_V$

Se $\underset{\underset{L(w_1)}{\shortparallel}}{\langle w_1 \rangle} \neq W$ allora prendo $w_2 \in W - \langle w_1 \rangle$

Se $\underset{\underset{L(w_1, w_2)}{\shortparallel}}{\langle w_1, w_2 \rangle} \neq W$ $\rightsquigarrow$ $w_3 \in W - \langle w_1, w_2 \rangle$

... w_k $\qquad$ $w_1, \ldots, w_k$ lin. ind.

Infatti se $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k = 0_V$

Sia i il massimo indice t.c. $\underline{\lambda_j = 0}$ $\forall j > i$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, 0, 0 \dots$

$(i \leq k)$

<u>Se $i \geq 1$</u> $\Longrightarrow$ $w_i = \underline{-\lambda_1 w_1 - \dots - \lambda_{i-1} w_{i-1}}$

$\Longrightarrow w_i \in \underline{\langle w_1, \dots, w_{i-1} \rangle}$ contraddizione.

Quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. $\Longrightarrow$ <u>lin. indip.</u>

<u>$k \leq n = \dim V$</u>

$\Longrightarrow$ W finit. gen. e <u>$\dim W \leq \dim V$</u>

Es $W \subset \mathbb{K}^n$ sottosp. vett. $\Rightarrow$ dim $W \leq n$ e vale $=$ $\Leftrightarrow$ $W = \mathbb{K}^n$

Cor Se $W \subset V$ sott. vett. e dim W = dim V $\Longleftrightarrow$ $W = V$.

Dim ($\Leftarrow$) ovvio

($\Rightarrow$) per assurdo supponiamo dim W = dim $V = n$ e $W \subsetneq V$

$\rightsquigarrow$ $\{w_1, \dots, w_n\}$ base di W

$\rightsquigarrow$ $w_{n+1} \in V - W$

$\rightarrow$ $\{w_1, \dots, w_n, w_{n+1}\}$ lin. indip. $\circledast$

Contraddizione

Teorema del complet. della base

V sp. vett. finit. gen., $\{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ vettori lin. indip.

Allora $\exists\ v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ t.c.

$\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ è base per V.

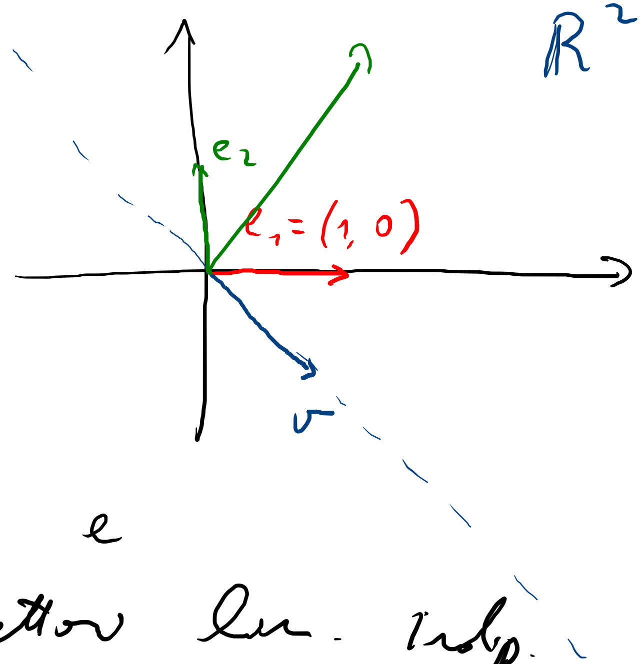
Dim Se $r < \dim V =: n$ allora $\exists\ v_{r+1} \in V - \langle v_1, \dots, v_r \rangle$

$\Longrightarrow \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ lin. indip. $*$

$\longrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ base.

Es $v = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$

$\{v, e_1\}$ base per $\mathbb{R}^2$



Cor Se $\dim V = n$ e

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ sono vettori lin. indip.

$\Longrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ base per V.

Prop. Se $\dim V = n$ e $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ generano V allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base per V.

Dim se $\{v_1, \dots, v_n\}$ per assurdo fossero lin. dip. $\Rightarrow$ uno di loro è comb. lin. degli altri $\Rightarrow$ V generato da $n-1$ vettori contraddizione.

Es $v_1 = (3, 4)$, $v_2 = (5, -12) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow$ lin indip $\Rightarrow$ base per $\mathbb{R}^2$

Es $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1) \in \mathbb{R}^3$

lin. indip. $\Rightarrow \exists\, v_3 \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\{v_1, v_2, v_3\}$ base per $\mathbb{R}^3$

$v_3 = (7,0,2)$

$(1,0,0)$

Corollario (del teor. di completamento della base)

Se $W \subset V$ sottospazio vett. $\Rightarrow \exists\, U \subset V$ sottosp. vett.

t.c. $V = W \oplus U$ (cioè $W \cap U = \{0_V\}$ e $V = W + U$)

fin. gen.

W, U sottosp. complementari di V

Dim $\{w_1, \dots, w_k\} \subset W$ base di W $\rightsquigarrow$

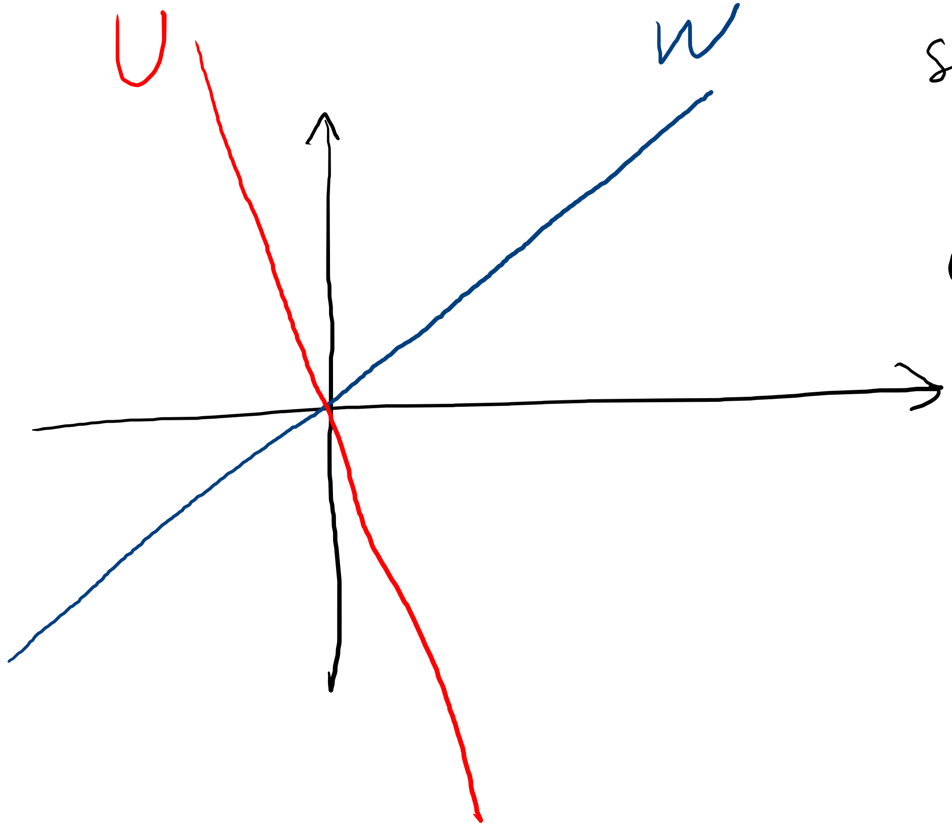
$\{u_1, \dots, u_s\} \subset V$ vett. che completano la base

$U = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$

$\{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_s\}$ base di V

Es

$\mathbb{R}^2$



Sottosp. Vett.
Complementari
(supplementari)

Formula di Grassmann Se $U, W \subset V$ sottospazi vett. finit. generati allora $U + W \subset V$ è finitamente generato e

$$\underline{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$$

(importantissima)

Dim $U \cap W \subset U \Rightarrow \underline{U \cap W}$ finit. gen.

Poniamo: $r = \dim U$, $s = \dim W$, $t = \dim(U \cap W)$

$\{v_1, \dots, v_t\}$ base di $\underline{U \cap W}$

$\rightsquigarrow \exists\, v_{t+1}, \dots, v_r$ t.c. $\{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_r\}$ base di U

$\rightsquigarrow \exists\, v'_{t+1}, \dots, v'_s$ t.c. $\{\underline{v_1, \dots, v_t}, \underline{v'_{t+1}, \dots, v'_s}\}$ base di W

$\rightsquigarrow \underline{B = \{v_1, \dots, v_t, v_{t+1},} \underline{\dots, v_r, v'_{t+1}, \dots, v'_s\}}$ è base di $U + W$?

1) B genera $U+W$ infatti se

$$v \in U+W \implies v = u + w \quad , u \in U \, , w \in W$$

$$\implies u = \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_r v_r \quad , w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_t v_t + \mu_{t+1} v'_{t+1} + \dots + \mu_s v'_s$$

$u+w$ è comb. lin. di vettori di B. ($\implies U+W$ finit. gen.)

2) B lin. indip. infatti se

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_t v_t + \lambda_{t+1} v_{t+1} + \dots + \lambda_r v_r}_{\substack{\| \\ u \,(=0)}} + \underbrace{\mu_{t+1} v'_{t+1} + \dots + \mu_s v'_s}_{\substack{\| \\ w = 0}} = 0$$

$$u + w = 0 \implies \underset{U}{u} = -\underset{W}{w} \implies w \in U \cap W \implies$$

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t = \mu_{t+1} v'_{t+1} + \dots + \mu_s v'_s$$

$$\implies \mu_{t+1} = \dots = \mu_s = 0 \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

$$\mathcal{B} = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_r}_{r \text{ vett.}}, \underbrace{v'_{t+1}, \dots, v'_s}_{s-t \text{ vettori}} \} \quad \text{base di } U + W$$

$$\Longrightarrow \dim (U+W) = r + s - t = \underset{\substack{\shortparallel \\ r}}{\dim U} + \underset{\substack{\shortparallel \\ s}}{\dim W} - \underset{\substack{\shortparallel \\ t}}{\dim(U \cap W)}$$