

FADDEEV - POPOV QUANTIZATION of NON-ABELIAN GAUGE THEORIES

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Matter}}(\psi, D\psi; \phi, D\phi)$$

$$a = 1, \dots, \dim G$$

Idealmente: calcolare p.i. $\int DA e^{iS[A]}$ e poi introducendo convenienti estere, mi calcolo il propagatore come l'inverso dell'op. nel termine quadratico

$$\mathcal{L} \supset \int dx A_{\mu}^a \Omega^{ab\mu\nu} A_{\nu}^b$$

\uparrow Ω Ω^{-1}

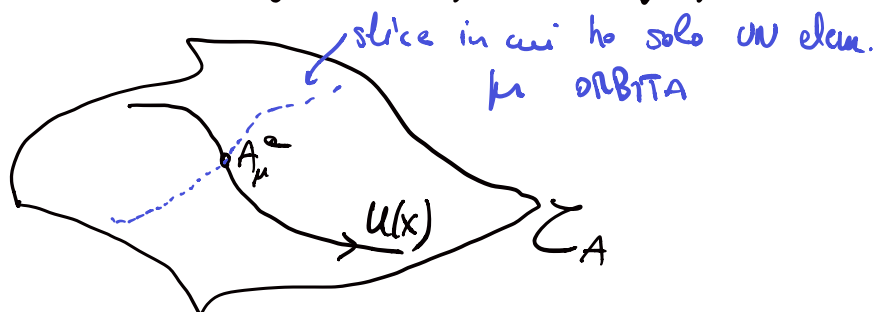
Ma Ω NON È INVERTIBILE: questo è dovuto al fatto che Ω ha degli zero-mod. ($\text{ker} \Omega \neq 0$)

\leftrightarrow è legato alla ridondanza nelle coord. A_{μ}^a

Se riusciamo a integrare nel p.i. sulla class. di equiv. $[A_{\mu}^a]$ invece che su tutte le config. A_{μ}^a , allora il problema scompare perché tutti i vettori in $\text{ker} \Omega$ sono equivalenti a 0.

$$[A_{\mu}^a] = \{ A_{\mu}^{a'} \mid A_{\mu}^{a'} \text{ è il traf. di } A_{\mu}^a \text{ sotto gauge} \}$$

\equiv ORBITA



Per individuare o rappresentare in classe di equiv. prendo una funz. $G(A)$ e impongo

$$G(A) = 0 \quad \leftrightarrow \quad G^a(A) = 0$$

↖ e rap. Adj (obvious finere \neq diag vettori A_μ^a)

($G(A)$ non deve essere gauge invariante)

Usiamo il seguente trucco (FP)

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right)$$

$$A_\mu^{\alpha a} = A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a \quad A_\mu \rightarrow g A_\mu$$

Prendiamo $G(A)$ lineare in $A \Rightarrow \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}$ NON DIPENDE DA α !

$$\left[\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta A} \frac{\delta A^\alpha}{\delta \alpha} \right]$$

$\Rightarrow \Delta_{FP}(A) \equiv \det \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}$ è INDIP. da α , ma dipende da A (a differenza del caso Abeliano)

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A^\alpha)) \Delta_{FP}(A) e^{iS[A]} \quad \leftarrow \text{gauge invariante}$$

$$= \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A^\alpha)) \Delta_{FP}(A^\alpha) e^{iS[A^\alpha]}$$

Ora facciamo un cambio di VARIABILI di INTEGRAZIONE: def. la

una variabile $B = A^\alpha$
 ↑
 una variabile funzione di A

Fortunatamente, la misura è invariante sotto quest' cambio
 (cioè lo Jacobiano è = 1): $DB = dA^\alpha = \int_1^1 dA$

$$= \int DB \int d\alpha \delta(G(B)) \Delta_{FP}(B^{-\alpha}) e^{iS[B]}$$

$$\Delta_{FP}(B^{-\alpha}) = \det \frac{\delta G((B^{-\alpha})^{\tilde{\alpha}})}{\delta \tilde{\alpha}} = \det \left(\frac{\delta G(B^{\alpha'})}{\delta \alpha'} \frac{\delta \alpha'}{\delta \tilde{\alpha}} \right) =$$

$$= \Delta_{FP}(B) \rho(\alpha)$$

$$\rho(\alpha) = \det \left(\frac{\delta \alpha'}{\delta \tilde{\alpha}} \right)$$

1 per "trans. infinitesime"

$$= \left(\int d\alpha \rho(\alpha) \right) \int dA \delta(G(A)) \Delta_{FP}(A) e^{iS[A]}$$

dipende da A
 a diff. delle teorie
 abeliane

qui ho sostituito
 il simbolo B
 col simbolo A
 (è una variabile
 di integrazione)

Questo P.I. non è della forma $\int d\phi e^{iS(\phi)}$
 e quindi non possiamo applicare in maniera
 diretta il metodo dei diagrammi di Feynman
 per calcolare i CORRELATORI.

- l'integrale $\int dA e^{iS[A]}$ è indep. dalle
 funzioni G (cioè dalla scelta del
 GAUGE FIXING). Inoltre anche $\int d\alpha \rho(\alpha)$
 è indep. da G.

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}A \delta(G(A)) \Delta_{FP}(A) e^{iS[A]} \text{ è INDP. da } G$$

- Possiamo moltiplicare e dividere il p.l. in

$$\left(\int \mathcal{D}\omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nella rep. Adj}}}{e^{-\frac{i}{2\xi} \int \omega^2}} \right) \quad \omega^2 \equiv \omega^a \omega^a$$

Ci specializziamo al caso delle GAUGE DI LORENTZ:

$$G(A) = \partial^\mu A_\mu - \omega \quad G^a(A) = \partial^\mu A_\mu^a - \omega^a$$

$$\frac{\int \mathcal{D}\omega e^{-\frac{i}{2\xi} \int \omega^2}}{\int \mathcal{D}\omega e^{-\frac{i}{2\xi} \int \omega^2}} \int \mathcal{D}A \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega) \Delta_{FP}(A) e^{iS[A]}$$

A meno di fattori overall il p.l. diventa

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\omega e^{-\frac{i}{2\xi} \int \omega^2} e^{iS[A]} \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega) \Delta_{FP}(A) = \\ & = \int \mathcal{D}A \Delta_{FP}(A) e^{iS[A]} - \frac{i}{2\xi} \int (\partial^\mu A_\mu)^2 \leftarrow \text{termine di gauge fixing in } \mathcal{L} \\ & \quad \quad \quad \uparrow \\ & \quad \quad \quad = \partial^\mu A_\mu^a \partial^\nu A_\nu^a \end{aligned}$$

come vedremo $\Delta_{FP}(A)$ non contribuisce al propagatore (non genera termini quadratici nella nuova lagrangiana)

Il termine quadratico in $S + S_{gf}$ è: $\left[S_{gf} \equiv -\frac{1}{2\xi} \int (\partial^\mu A_\mu)^2 \right]$

$$- \int d^4x \left(\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{\nu b} - \partial^\nu A^{\mu b}) + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu a}) (\partial_\nu A^{\nu a}) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Omega^{\alpha\mu, \beta\nu}(x, y) \cdot A_\mu^a(x) A_\nu^b(y)$$

dove $\Omega^{\mu\nu,ab}(x,y) \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \delta^{(4)}(x-y) \delta^{ab} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \delta^{(4)}(x-y) \delta^{ab} =$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \delta^{ab} \int d^4p \left(\eta^{\mu\nu} (p^2 - i\epsilon) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\nu \right) e^{ip(x-y)}$$

Prendiamo l'inverso di Ω , e otteniamo il PROPAGATORE di Feynman per il BOSONE DI GAUGE

$$D_{F\mu\nu}^{ab}(x,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\eta_{\mu\nu} + \left(\xi - 1\right) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \delta^{ab} \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} e^{ip(x-y)}$$

$\xi = 1$: Feynman-Hellmann

$\xi = 0$: Landau

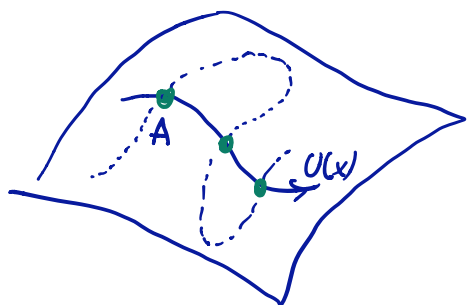
COPIE DI GRIBOV

Cosa vuol dire fissare "bene" la gauge? (Salto di G(A))

Risposta: $G(A)=0$ dovrebbe produrre una superficie che interseca ogni orbita di gauge trasversalmente e SOLO in un PUNTO (e tale pto deve esistere)!

L'esistenza di tale superficie dipende dalle proprietà globali (topologiche) dello spazio \mathcal{L}_A/Ω_*

Ci saremo problemi prendo la surf. $G(A)=0$ intorno
 le orbite in più di un pt



ci sono conf. gauge-equiv.
 sulla surf. $G(A)=0$

Detto altrimenti α $G(A)=0$ allora esistono
 delle funz. $\alpha(x)$ che risolvono l'equazione

$$G(A^\alpha) = 0$$

⇓

Integrare su tutti i pt della
 surf. $G(A)=0$ produce un
 overcounting dei gradi di libertà.

$$G(A^\alpha) = \underbrace{G(A)}_{=0} + \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \Big|_{\alpha=0} \cdot \alpha + \dots$$

||
 0 cioè $\Delta_{FP} = 0$
 (cioè \exists zero-modes)

Questo problema è noto come l'**AMBIGUITÀ** di **GRIBOV**.

→ È evitabile in teorie Abeliane, ma è inevitabile
 in le gauge non-simplici nelle teorie non-Abeliane.

$G(A) = \partial^\mu A_\mu = 0$ più zero-modi α sono tali che

$$\partial^\mu D_\mu \alpha = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\square \alpha + \left[\underbrace{(\partial^\nu A_\nu)}_{=0}, \alpha \right] + [A_\mu, \partial^\mu \alpha] = 0$$

[In Ramond
 es. in SU(2)]

Se A_μ è molto piccolo, allora questa eq. non ha soluzioni ($\alpha \rightarrow 0$
 in $|x| \rightarrow \infty$)
 (QED non ha copie di Gribov in $G = \partial^\mu A_\mu$)

⇒ l'ambiguità di Gribov non inficia i conti perturbativi.