Corso di

Matematica Generale

- Appunti dalle lezioni -

Università degli Studi di Udine - Sede di Pordenone

Facoltà di Economia

Appunti del corso

di

Matematica Generale

Luciano Battaia

Versione del 15 febbraio 2016

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.

Dobbiamo prendere gli allievi così come sono, richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura.

Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento.

Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Indice

Premessa

Questo testo contiene sostanzialmente lo schema delle lezioni di Matematica Generale tenute, nell'anno accademico 2010/2011, presso la sede di Pordenone dell'Università degli studi di Udine, per il corso di laurea in Economia e Commercio della Facoltà di Economia. Il testo è adatto a un corso di 70 ore di lezione, comprensive di esercitazioni: la ristrettezza dei tempi a disposizione impone numerose limitazioni sia nella scelta degli argomenti sia nel grado di approfondimento degli stessi. Naturalmente si è tenuto conto, sia nella scelta degli argomenti che nella loro trattazione, delle caratteristiche specifiche del corso di laurea in cui viene utilizzato il testo. In particolare durante il corso si è fatto estesamente uso di software opportuni, sia per tracciare grafici, che per visualizzare i concetti via via esposti. In sostanza questo corso non vuole essere un corso di analisi assolutamente formale, quanto piuttosto una introduzione, il più possibile "visuale" ai concetti chiave dell'analisi, sempre comunque mantenendo il dovuto rigore. Lo stesso tipo di impostazione è stata seguita per la presentazione e la discussione delle tecniche di calcolo specifiche dell'analisi, come quelle relative alle derivate e agli integrali: la scelta è sempre stata quella di presentare e discutere in dettaglio i concetti fondamentali, implementamdo solo le regole più importanti, evitando esercizi e problemi complessi. Infatti i software di calcolo simbolico attualmente diffusi (anche freeware come Geogebra) consentono di ottenere derivate e primitive di tutte le funzioni normalmente utilizzate nelle applicazioni senza alcuna difficoltà.

La raccolta comprende solo ed esclusivamente lo schema delle lezioni svolte e non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi, trattandosi di un *diario delle lezioni*, alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione più estesa e approfondita. In ogni caso si rimanda ai testi via via consigliati per i necessari completamenti che non trovano posto in questi appunti.

Il testo contiene anche la raccolta degli esercizi svolti e/o proposti durante il corso. Alcuni argomenti teorici sono sviluppati anche negli esercizi, che fanno integralmente parte del corso.

Molte delle idee, degli argomenti e degli esempi qui proposti sono tratti, spesso integralmente, da Appunti del prof. Nando Prati che ha tenuto questo corso negli anni accademici precedenti. Lo stesso vale per la raccolta di esercizi proposti.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo di posta elettronica batmath@gmail.com.

1 Richiami di concetti di base

In questo capitolo preliminare richiamiamo, senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità, alcuni concetti di “matematica di base”, già noti dalle scuole medie superiori. Gli argomenti scelti sono quelli relativamente ai quali gli studenti del corso hanno riscontrato maggiori difficoltà.

1.1 Qualche prodotto e scomposizione notevole

In molti casi la risoluzione degli esercizi richiede l’esecuzione di prodotti di espressioni letterali al fine di semplificare le scritture o di ottenere i risultati voluti. Molti di questi prodotti sono *notevoli*, in quanto si presentano frequentemente e possono essere eseguiti rapidamente con l’uso di opportuni accorgimenti. Gli stessi accorgimenti, usati “in senso inverso”, consentono di trasformare in prodotti certe espressioni algebriche scritte sotto forma di somma, e anche questa è una tecnica necessaria per risolvere gli esercizi. Qui di seguito raccogliamo alcune delle formule più comuni, fornendo anche qualche esempio di applicazione.

1.1.1 Raccoglimento a fattor comune

Conviene considerare subito degli esempi.

Esempi.

- $6x + 2x^2y + 4xy^2 = 2x(3 + xy + 2y^2)$.
- $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$.

A volte il raccoglimento può richiedere “due tempi”.

Esempi.

- ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b).

Come si vede questo tipo di processo richiede un po’ più di fantasia!

1.1.2 Prodotto di una somma per una differenza

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \,. \tag{1.1}$$

Questa formula consente di eseguire velocemente il prodotto indicato e, letta in senso inverso, di trasformare la differenza di due quadrati in un prodotto.

Esempi.

- $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.
- $(-x - 2)(-x + 2) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$.
- $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$.

1.1.3 Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,. \tag{1.2}$$

Esempi.

- $(x+2y)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$.
- $(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(3y) + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$.
- $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Le tecniche precedenti, e quelle che presenteremo successivamente, possono anche essere combinate tra loro.

Esempi.

- $x^3 + 6x^2 + 9x = x(x^2 + 6x + 9) = x(x+3)^2$.
- $(x+y-z)(x+y+z) = [(x+y)-z][(x+y)+z] = (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2$.

1.1.4 Cubo di un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\,. \tag{1.3}$$

Esempi.

- $(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3\cdot 2x(y)^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$.
- $(x^2-3y)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2 3y + 3x^2(3y)^2 - (3y)^3 = x^6 - 9x^4y + x^2y^2 - 27y^3$.

1.1.5 Somma o differenza di due cubi

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\,, \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\,. \tag{1.4}$$

Esempi.

- $(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)$.
- $(8x^3 + 27y^3) = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$.

Si noti che, a differenza del caso dei quadrati, si può scomporre sia la *somma* che la *differenza* di due cubi. Si noti anche che i due trinomi tra parentesi dopo la scomposizione *non* sono dei quadrati, perchè *non c'è* il doppio prodotto.

1.2 Richiami sui radicali

In molte situazioni è utile saper semplificare espressioni contenenti radicali, senza approssimarli fin da subito con espressioni decimali. Un semplice esempio chiarirà il perché di questo fatto.

Supponiamo di dover calcolare $(\sqrt{2})^8$. Se teniamo conto delle proprietà delle potenze e dei radicali otteniamo $(\sqrt{2})^8 = \left((\sqrt{2})^2\right)^4 = 2^4 = 16$, senza alcuna approssimazione. Se invece approssimiamo $\sqrt{2}$ con 1.4, commettiamo un errore di poco più di un centesimo, trascurabile in molte situazioni. Calcolando però l'ottava potenza otteniamo (circa) 14.76, al posto del risultato corretto 16: un errore decisamente troppo grande! Naturalmente usando un maggior numero di cifre dopo la virgola per approssimare la radice quadrata di 2 le cose si sarebbero rimesse a posto, ma non sempre succede così, e il problema della correttezza delle approssimazioni numeriche è molto complesso.

Richiamiamo qui, fornendo anche qualche esempio, solo alcune delle tecniche di base utili per operare con i radicali, segnalando che i *radicandi* saranno sempre considerati *positivi* e che saremo principalmente interessati al caso di radici quadrate o al massimo cubiche.

$$\sqrt[n]{a^n} = a\,, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{(definizioni).} \tag{1.5}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad \text{(radice di un prodotto).} \tag{1.6}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{(radice di un quoziente)} \tag{1.7}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(potenza di un radicale).} \tag{1.8}$$

$$\sqrt[n]{a^{np}} = a\,\sqrt[n]{a^p} \quad \text{(``portare fuori o dentro'' dal segno di radice).} \tag{1.9}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(semplificazione di un radicale).} \tag{1.10}$$

Ricordiamo poi che *non* è valida alcuna proprietà relativamente alla radice di una somma: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Per quanto riguarda poi le operazioni di somma e prodotto coinvolgenti radicali si possono sommare solo radicali simili, mentre per moltiplicare due radicali bisogna "ridurli allo stesso indice".

Esempi.

- $5\sqrt{8} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2^2 2} + 3\sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$.
- $3\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{2} = 3\sqrt{3^2 3} - \sqrt{2^2 3} + \sqrt{2} = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} = 7\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
- $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3}\,\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 4} = \sqrt[6]{32}$.

1.3 Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è il *quoziente di due polinomi*. Per esempio

$$\frac{x^3 + xy + y^2 + 2}{x^2 - y}$$

è una frazione algebrica.

Le operazioni sulle frazioni algebriche si eseguono esattamente come le operazioni sulle frazioni numeriche. Saremo interessati a qualche semplificazione, somma o prodotto di frazioni algebriche (in casi molto semplici!).

Esempi.

- $\dfrac{x^2+x}{x^2-1} + \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} + \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x+x+2}{x-1} = \dfrac{2x+2}{x-1}$.
- $\dfrac{3x(x+2)}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{3x\cancel{(x+2)}}{x+1} \cdot \dfrac{x-1}{\cancel{x+2}} = \dfrac{3x(x-1)}{x+1} = \dfrac{3x^2-3x}{x+1}$.
- $\dfrac{x^2-1}{x^3+1} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)} = \dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

2 Insiemi, numeri, funzioni

2.1 Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo “un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*”, ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire “un insieme è un insieme”. Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: A, B, ...

La scrittura

$$x \in A \tag{2.1}$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge “x appartiene ad A”. La (2.1) si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della (2.1) si scrive

$$x \notin A\,, \tag{2.2}$$

che si legge, naturalmente, “x non appartiene ad A”. La (2.2) si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo $\forall$ (“*per ogni*”),

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (\forall x\; x \in A \Leftrightarrow x \in B) \tag{2.3}$$

dove la doppia freccia “$\Leftrightarrow$” si legge “*se e solo se*”.

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con $\emptyset$, privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi, per esempio $A = \left\{\, 0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone} \,\right\}$.
2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A = \{\, x \mid x \text{ è un numero naturale pari} \,\}$.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{\, 3, 6, 9, 12, \dots \,\}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{\, 2, 3, \dots \,\}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P, dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15\,485\,863 \in P$, e per verificare che $2^{43\,112\,609} - 1 \in P$ (uno dei più grandi[1] primi conosciuti alla fine del 2009, con ben 12 978 189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un *sottoinsieme* di B, o che è *contenuto* in B, o anche che B è un *soprainsieme* di A, o che *contiene* A, e scriveremo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A\,. \tag{2.4}$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$A \subset B, \text{ oppure } B \supset A \tag{2.5}$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A$, $\forall A$. Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{\, a \,\} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli $\in$ e $\subset$ (o $\subseteq$): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con $\mathscr{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{\, a, b \,\}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\, \emptyset, \{\, a \,\}, \{\, b \,\}, A \,\}\,.$$

2.2 Operazioni tra insiemi

Definizione 2.1 (Unione di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* unione*, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi*[2].

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\}\,. \tag{2.6}$$

Esempio. Se $A = \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}$ e $B = \{\, 2, 3, 4 \,\}$, allora $A \cup B = \{\, 0, 1, 2, 3, 4 \,\}$.

Definizione 2.2 (Intersezione di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* intersezione*, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.*

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\}\,. \tag{2.7}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{\, 2, 3 \,\}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

[1] A coloro che si chiedono quale possa essere l'interesse concreto a scoprire numeri primi sempre più grandi, segnaliamo che tutti gli algoritmi crittografici oggi usati, in particolare nel web, sono basati sull'uso di numeri primi con parecchie centinaia di cifre.

[2] I simboli $\vee$, *vel*, ed $\wedge$, *et*, sono normalmente usati in logica e nella teoria degli insiemi. Significano, rispettivamente, "*o*, *oppure*" ed "*e contemporaneamente*".

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione e si possono verificare per utile esercizio.

$$\begin{aligned} A \cup A = A; &\quad A \cap A = A; \\ A \cup B = B \cup A; &\quad A \cap B = B \cap A; \\ A \cup \emptyset = A; &\quad A \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cup B \supseteq A; &\quad A \cap B \subseteq A; \\ A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B; &\quad A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,. \tag{2.8}$$

Si noti che le proprietà distributive sono due: dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione. Nel caso della somma e prodotto tra numeri vale solo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $a(b + c) = ab + ac$.

Definizione 2.3 (Differenza di insiemi)**.** *Dati due insiemi A e B, si chiama loro* differenza*, e si indica con $A \setminus B$, o anche con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.*

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}\ . \tag{2.9}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A \setminus B = \{\, 0, 1 \,\}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ si chiama anche *complementare di B rispetto ad A* e si indica con $\complement_A B$, o semplicemente con $\complement B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi: questo evita di avere problemi tipo quelli del paradosso[3] del barbiere. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con (x, y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y:

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1\,.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{\, a, b \,\} = \{\, b, a \,\} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a)\,.$$

Definizione 2.4 (Prodotto cartesiano)**.** *Dati due insiemi A e B si chiama loro* prodotto cartesiano*, o semplicemente* prodotto*, l'insieme, indicato con $A \times B$, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B:*

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{\, (a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \,\}\ .$$

[3] Questo famoso paradosso, formulato da Bertrand Russell agli inizi del 1900, è uno dei più importanti della storia della logica. Si può sintetizzare come segue: *In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. La domanda che ci poniamo è: il barbiere rade se stesso?*

È una conseguenza immediata della definizione che $A \times B \neq B \times A$. Nel caso particolare che $A = B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A \times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte si scriverà A^n in luogo di $A \times A \times \cdots \times A$.

2.3 Numeri

Gli "oggetti base" su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono i seguenti:

$$\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\,.$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il "presentare" questi insiemi.

- $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri *naturali* che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo". Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

  $$\mathbb{N} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n,\ \dots \,\}\ .$$

  L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.
- $\mathbb{Z}$ (il simbolo usato è legato alla parola tedesca *zahl*, cioè *numero*, *cifra*) è l'insieme dei numeri *interi*, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei "numeri naturali con segno" (attenzione però al fatto che $+0 = -0 = 0$, ovvero al fatto che 0 non ha segno!):

  $$\mathbb{Z} = \{\, \dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots \,\}\ .$$

  Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un *successivo*.
- $\mathbb{Q}$ (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, *ratio* in latino) è l'insieme dei numeri *razionali*, ovvero delle *frazioni* con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, occorre tenere conto che due frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali, rappresentano lo stesso numero. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):

  $$\mathbb{Q} = \{\, {}^{m}\!/\!_{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \,\}\ .$$

  I numeri razionali si possono anche scrivere come *numeri decimali*, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di *successivo* di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):

  $$\text{se } a = \frac{m}{n} \text{ e } b = \frac{p}{q}\,,\ \text{ allora il numero } c = \frac{a+b}{2} \text{ è razionale ed è compreso tra } a \text{ e } b.$$
- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri *reali*. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come π, ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse

difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare "all'estrema destra", e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall'insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell'ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in $\mathbb{N}$ non si può sempre fare la sottrazione, mentre in $\mathbb{Z}$ e successivi si, in $\mathbb{Z}$ non si può sempre fare la divisione, mentre in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si (tranne per zero, ovviamente!).

Occasionalmente avremo la necessità di utilizzare anche l'insieme dei numeri complessi, che si indica con $\mathbb{C}$ e che è un soprainsieme dell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il vantaggio principale di questo insieme numerico è che in esso si può sempre estrarre la radice quadrata, anche dei numeri negativi.

2.4 Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nell'analisi. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

Definizione 2.5. *Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano* intervalli*, con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

$]a, a[$	$\emptyset$	*intervallo vuoto*
$]a, b[$	$\{ x \mid a < x < b \}$	*intervallo limitato* aperto
$[a, b]$	$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$	*intervallo limitato* chiuso
$[a, b[$	$\{ x \mid a \leq x < b \}$	*intervallo limitato* chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a, b]$	$\{ x \mid a < x \leq b \}$	*intervallo limitato* aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a, +\infty[$	$\{ x \mid x > a \}$	*intervallo superiormente illimitato* aperto
$[a, +\infty[$	$\{ x \mid x \geq a \}$	*intervallo superiormente illimitato* chiuso
$]-\infty, a[$	$\{ x \mid x < a \}$	*intervallo inferiormente illimitato* aperto
$]-\infty, a]$	$\{ x \mid x \leq a \}$	*intervallo inferiormente illimitato* chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo.
Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti*, quelli illimitati anche* semirette.

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme $\mathbb{R}$ si usa la scrittura $]-\infty, +\infty[$ e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che $a = b$ l'intervallo chiuso $[a, a]$ si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo*.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza*. L'intervallo (aperto) di centro x_0 e raggio δ è allora

$$]x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta[\,.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

2.5 Funzioni

Dati due insiemi A e B hanno grande interesse nelle applicazioni le relazioni che possono intercorrere tra di loro. Tra tutte le relazioni hanno un interesse cruciale le *funzioni*, in particolare le funzioni che collegano tra di loro insiemi di numeri reali. Vista l'importanza del concetto diamo una definizione esplicita di funzione, che riassuma quelle che sono le proprietà che ci interesseranno.

Definizione 2.6. *Dati due insiemi A e B (che per noi saranno sempre due insiemi di numeri reali), si dice* funzione *di A in B una qualunque legge che faccia corrispondere* a ogni *elemento di A* uno ed un solo elemento *di B.*

L'insieme A è detto dominio *della funzione, l'insieme B è detto* codominio*. Se x è un elemento dell'insieme A e y è l'*unico *elemento di B che corrisponde ad A, si dice che y è* funzione *di x e si scrive $y = f(x)$ (leggi: "y uguale a effe di x").*

La notazione più completa per le funzioni è la seguente:

$$f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x)\,,$$

ma spesso si scrive solo

$$x \mapsto f(x)\,,$$

se gli insiemi A e B sono già stati precisati o sono chiari dal contesto. Si può anche dire semplicemente *la funzione $y = f(x)$*, anche se i puristi potrebbero storcere il naso.

Esempio. Se A e B sono l'insieme dei numeri reali, si può considerare la funzione che a ogni numero reale x fa corrispondere il suo quadrato. In questo caso si dovrebbe scrivere

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

ma si può scrivere anche semplicemente

$$x \mapsto x^2$$

oppure (e noi lo faremo sistematicamente)

$$y = x^2\,.$$

Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce, come quello che segue.

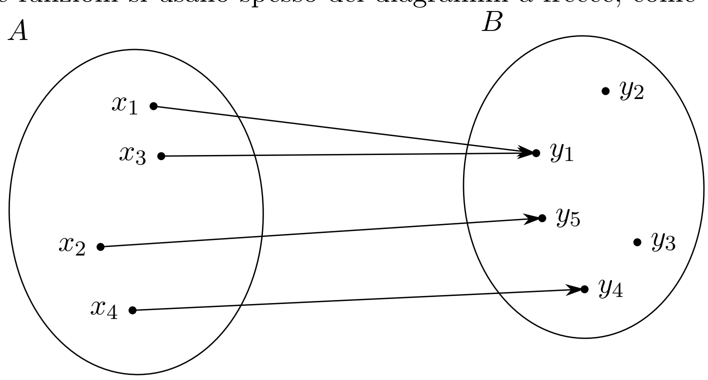


Figura 2.1 *Diagramma "a frecce" per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti)*

Si noti che *è obbligatorio* che da *ogni* punto (elemento dell'insieme) A parta *esattamente* una freccia, mentre sui punti dell'insieme B possono anche arrivare *più* frecce, oppure *nessuna* freccia. Si potrebbe dire, usando un linguaggio figurato, che A è l'insieme degli arcieri, B l'insieme dei bersagli e che ogni arciere ha a disposizione nella propria faretra solo una freccia che è costretto a lanciare, mentre non ci sono limitazioni sui bersagli da colpire: ci possono essere bersagli colpiti da più frecce, e anche bersagli non colpiti da alcuna freccia.

Ha particolare interesse nelle applicazioni la determinazione del sottoinsieme del codominio costituito da tutti i punti dove arriva almeno una freccia, cioè, formalmente, l'insieme

$$I \subseteq B = \{\, y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \,\}\,, \tag{2.10}$$

o anche, a parole, l'insieme degli y di B tali che esiste almeno un x di A, la cui immagine sia y. L'insieme I si chiama *insieme immagine*. L'insieme immagine si indica anche con $f(A)$, proprio a significare il fatto che si tratta dell'insieme delle immagini di tutte le x di A. Se C è un sottoinsieme di A, si può considerare l'insieme delle immagini di tutte le x di C (che sarà naturalmente un sottoinsieme dell'insieme immagine). Questo insieme si indica con $f(C)$.

È chiaro che rappresentazioni grafiche come quella appena vista hanno senso solo se gli insiemi in questione sono finiti: in caso contrario si dovrebbero disegnare infinite frecce, cosa chiaramente impossibile.

Si usano anche altri tipi di rappresentazione per le funzioni. Per esempio se si considera la funzione che a ogni numero naturale compreso tra 1 e 5 fa corrispondere la sua metà (funzione che ha come dominio i numeri naturali citati e come codominio i numeri razionali), si può usare una tabella a doppia entrata, in cui nella prima colonna si scrivono i numeri naturali 1, 2, ..., 5 e nella seconda colonna le *corrispondenti* metà di questi numeri.

x	$x/2$
1	$1/2$
2	1
3	$3/2$
4	2
5	$5/2$

Tabella 2.1 *Rappresentazione "tabulare" di una funzione*

Un altro tipo di rappresentazione è quello dei diagrammi a torta, molto significativo in casi speciali. Consideriamo, ad esempio, un corso universitario dove si sono iscritti 120 alunni, provenienti da varie provincie, come nella tabella che segue:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
5	70	15	10	20

Si comincerà con il calcolare le percentuali relative alle varie provincie:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
4.17	58.33	12.5	8.33	16.67

Successivamente si calcoleranno le ampiezze delle "fette di torta" da utilizzare per ciascuna provincia, tenendo conto che la torta totale ha un'apertura di 360°:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
15°	210°	45°	30°	60°

Il grafico è a questo punto immediato:

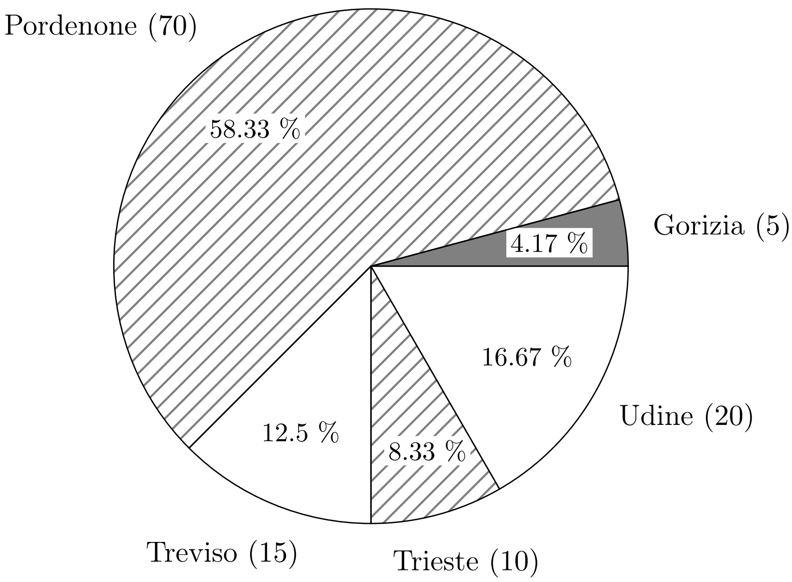


Figura 2.2 *Provenienza degli studenti del Corso . . . , ripartiti per Provincia, diagramma "a torta"*

Ancora un'altra possibilità è quella di un diagramma a barre, che proponiamo qui di seguito, senza commenti.

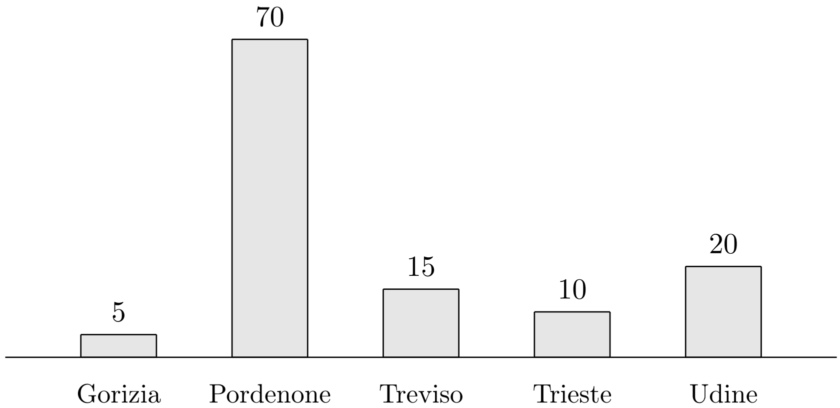


Figura 2.3 *Provenienza degli studenti del Corso . . . , ripartiti per Provincia, diagramma "a barre"*

La rappresentazione più conveniente nel caso delle funzioni tra due insiemi di numeri reali è però quella dei diagrammi o grafici cartesiani, in particolare nel caso in cui gli insiemi siano infiniti quando le rappresentazioni precedenti non sono utilizzabili. L'idea è di considerare un piano in cui si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali per semplicità) Oxy e rappresentarvi tutte le coppie (x, y) in cui x è un punto (numero) del dominio della funzione e $y = f(x)$ è il *corrispondente* valore nel codominio della funzione. Riprendendo in esame l'esempio proposto nella tabella 2.1, dobbiamo rappresentare i punti

$$A = (1, 1/2),\ B = (2, 1),\ C = (3, 3/2),\ D = (4, 2),\ E = (5, 5/2)\,,$$

ottenendo il grafico che segue.

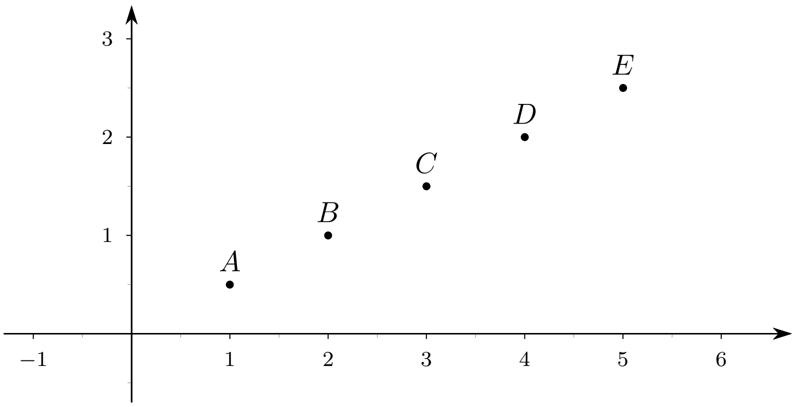


Figura 2.4 *Esempio di grafico cartesiano*

Il grafico della precedente figura 2.4 è in realtà un grafico a frecce "compattato": siccome i valori del dominio sono punti dell'asse x e quelli del codominio punti dell'asse y, possiamo sempre pensare di tracciare delle frecce che colleghino i punti del dominio con i corrispondenti del codominio, come quelle della figura 2.1, solo che è opportuno che le frecce "passino" per i punti A, B, ...:

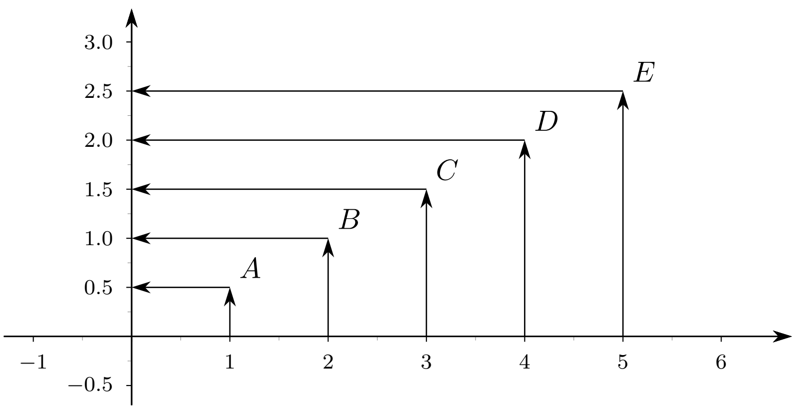


Figura 2.5 *Esempio di grafico cartesiano, con frecce*

Il grafico 2.4 "compatta" il grafico 2.5 nel senso che ne prende solo gli elementi essenziali, cioè gli "spigoli delle frecce": è evidente che dalla conoscenza degli spigoli si possono facilmente ricostruire le frecce.

Se si confronta la figura 2.4 con la tabella 2.1, ci si rende immediatamente conto dei notevoli vantaggi che il grafico presenta: da esso si può per esempio capire, "a colpo d'occhio", che al crescere di x nel dominio la corrispondente y del codominio cresce, e che tale crescita è *costante*. La cosa diventa ancora più significativa se si vuole considerare la funzione che a ogni numero reale x faccia corrispondere la sua metà: a differenza di quanto succedeva con la funzione rappresentata nella tabella 2.1, questa volta la x non varia più in un insieme finito e quindi una rappresentazione tabulare non ha alcun senso[(4)]. Un diagramma cartesiano è decisamente più significativo:

[4] Si noti comunque che la regola (legge) che collega la x alla y è la stessa del caso precedente: per assegnare una funzione *non* è sufficiente assegnare la regola di calcolo, occorre anche fissare il dominio e il codominio.

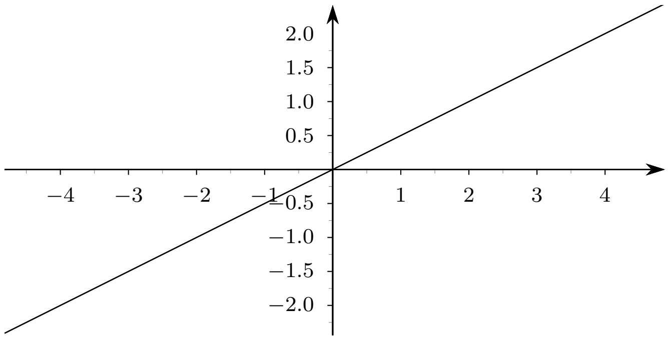


Figura 2.6 *Grafico della funzione* $y = x/2$

Naturalmente il diagramma 2.6 contiene anche i punti già rappresentati nel diagramma 2.4:

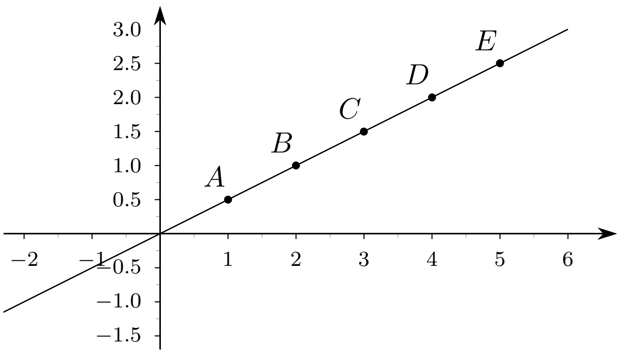


Figura 2.7 *Grafico della funzione* $y = x/2$*, con evidenziati alcuni punti*

ma contiene anche infiniti altri punti. Anche se non è chiaramente possibile rappresentare nel grafico *tutte* le coppie $(x, y) = (x, f(x))$ che visualizzano l'andamento della funzione, tuttavia la parte tracciata è sufficiente a rendere evidenti quasi tutte le proprietà che interessano.

Una buona parte di questo corso sarà dedicata proprio allo studio di strategie adatte a evidenziare le caratteristiche essenziali di una funzione (avente come dominio e codominio sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali) e a tracciarne un grafico indicativo. Un grande aiuto in questo senso può essere fornito dai numerosi software dedicati allo scopo[5], ma, come al solito, bisogna tenere conto che il computer *è una macchina finita* e quindi non può risolvere tutti i problemi. A questo proposito proponiamo un esempio "estremo", precisamente il grafico della funzione

$$f(x) = \sin 1/x\,.$$

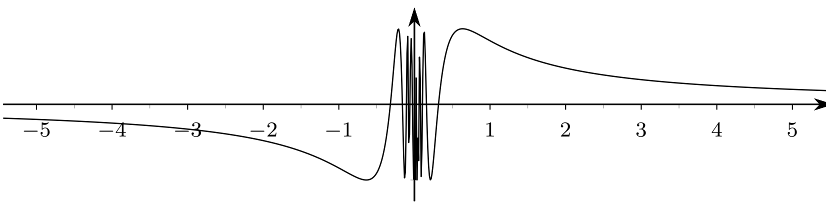


Figura 2.8 *Grafico di* $f(x) = \sin 1/x$

[5]Tra i software commerciali segnaliamo *Mathematica* e *Maple*, due pacchetti estremamente sofisticati e complessi. Tra i software non commerciali segnaliamo *Maxima* (molto simile a *Mathematica*™ anche se non ne possiede tutte le potenzialità) e *Geogebra*. Riteniamo quest'ultimo particolarmente adatto per questo corso e segnaliamo che la maggior parte dei grafici contenuti in questo testo sono ottenuti proprio con *Geogebra*.

È chiaro che, per valori di x prossimi allo zero, questo grafico è poco significativo[6]. Purtroppo nemmeno zoomate (in orizzontale) migliorano granché la situazione, come mostrano le due successive figure.

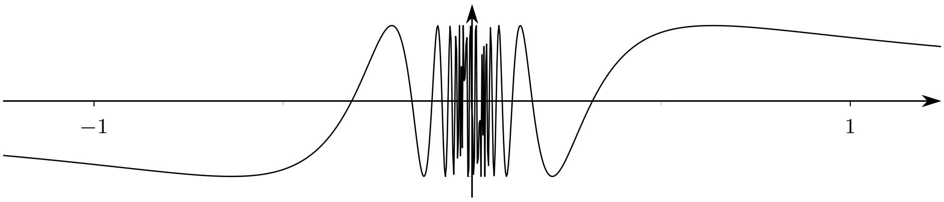


Figura 2.9 *Grafico di* $f(x) = \sin {}^1\!/x$*, con uno zoom sull'asse delle* x

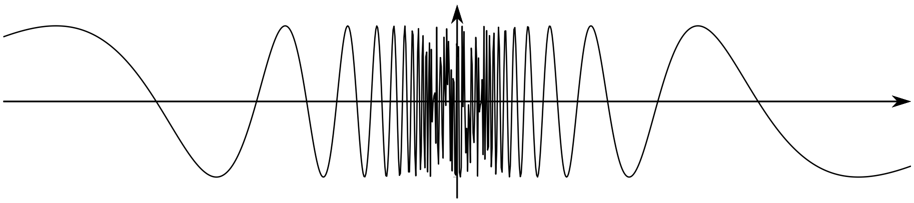


Figura 2.10 *Grafico di* $f(x) = \sin {}^1\!/x$*, con un ulteriore zoom sull'asse delle* x

Naturalmente non sempre le cose vanno così male (per fortuna!). Per la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$, per esempio, il grafico fornito da un software di calcolo è sufficientemente accurato da contenere con buona accuratezza le informazioni necessarie.

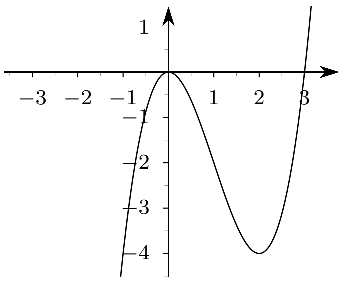


Figura 2.11 *Grafico di* $f(x) = x^3 - 3x^2$

Da questo grafico si vede subito che, al crescere della x da valori negativi fino allo 0, anche la corrispondente y cresce (e abbastanza rapidamente) fino a raggiungere il valore 0; successivamente se la x cresce da 0 a 2, la y decresce fino a raggiungere il valore -4, per poi aumentare di nuovo (e di nuovo abbastanza rapidamente) al crescere di x.

In tutti i grafici cartesiani che abbiamo fatto, tranne quelli delle figure 2.9 e 2.10, abbiamo usato la stessa unità di misura sui due assi: sistemi cartesiani siffatti sono detti *monometrici*. Di solito però nelle applicazioni la cosa non è possibile, e ne vedremo in seguito i motivi. È opportuno tenere presente che se un sistema cartesiano nel piano non è monometrico, le figure possono essere deformate. Per esempio i due grafici della figura seguente mostrano la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, in due diversi sistemi di coordinate, di cui solo il primo è monometrico.

[6] L'esempio che stiamo considerando richiede la conoscenza di elementi di trigonometria: chi non li possiede non si preoccupi, ne faremo un cenno nel seguito.

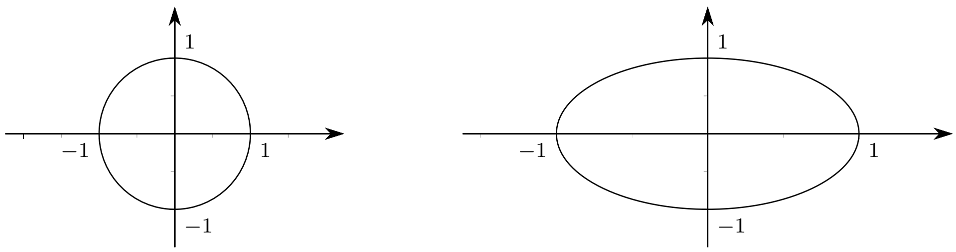


Figura 2.12 *Circonferenza di centro l'origine e raggio* 1*, in due diversi sistemi di coordinate, il primo monometrico, il secondo no*

2.6 Funzioni di due variabili - Introduzione

Un caso molto importante di funzioni con cui avremo a che fare nel seguito è quello delle funzioni in cui il dominio è un insieme di coppie di numeri reali (cioè un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$) e il codominio è l'insieme dei numeri reali: diremo brevemente *funzioni di due variabili*. Potremo usare una scrittura del tipo

$$z = f(x, y). \tag{2.11}$$

La rappresentazione grafica cartesiana di funzioni di questo tipo richiede un sistema di tre assi (che per noi saranno sempre mutuamente ortogonali): abbiamo bisogno infatti di una coppia di numeri per i punti del dominio, più un numero per i corrispondenti valori del codominio. Come vedremo, nelle situazioni che ci interesseranno, questi grafici avranno l'aspetto di superfici nello spazio. Riservandoci di approfondire a suo tempo l'argomento, proponiamo solo un grafico di esempio nella figura 2.13.

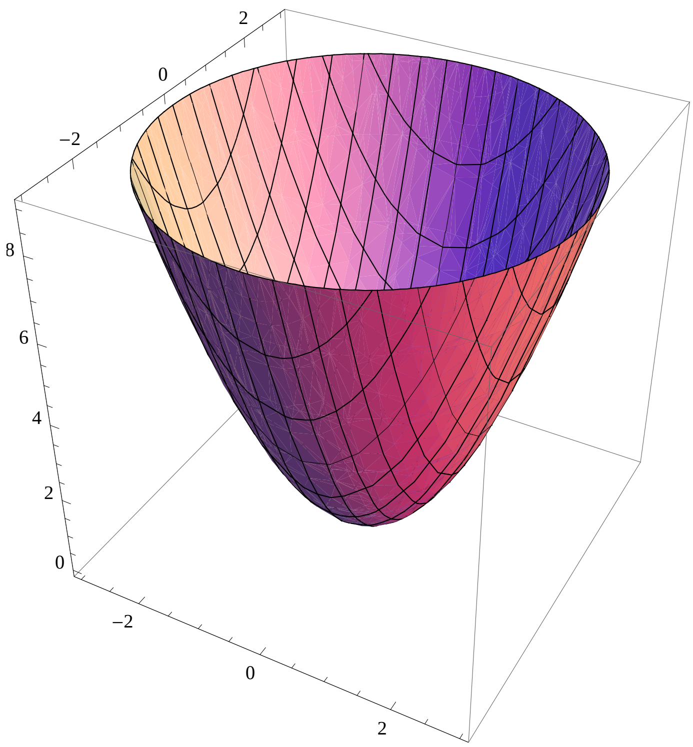


Figura 2.13 *Grafico della funzione* $z = x^2 + y^2$

2.7 Esercizi

Esercizio 2.1. *Dati gli insiemi* $A =]-\infty, 2]$, $B = \{ 1, 2 \}$ *e* $C = [0, 5[$, *determinare*

1. $(A \setminus C) \cup B$;
2. $(A \setminus B) \cup C$;
3. $(A \setminus B) \cap C$;
4. $(C \setminus B) \cap A$.

Esercizio 2.2. *Dati gli insiemi* $A = \{ 1 \}$, $B =]-1, 2[$ *e* $C =]0, +\infty[$, *determinare*

1. $(A \cup C) \cap B$;
2. $A \setminus C$;
3. $(C \setminus A) \cap B$;
4. $(C \cup B) \setminus A$;
5. $(b \setminus A) \cap C$.

Esercizio 2.3. *Discutere i seguenti quesiti, in modo sintetico ma esauriente.*

1. *Si possono trovare tre insiemi* A, B, C *tali che* $(A \cap B) \cup C = \emptyset$*?*
2. *Si possono trovare due insiemi* A *e* B *tali che* $A \cap B = A$*?*
3. *Si possono trovare tre insiemi* A, B, C *tali che* $(A \cap B) \cup C = A$*?*
4. *Se* $A \subseteq B$ *allora* $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.

3 Equazioni

3.1 Equazioni lineari in una o due incognite

La più generale equazione *lineare* (cioé di primo grado) *in un'incognita* è del tipo

$$ax = b \quad , \quad a \neq 0 \,. \tag{3.1}$$

Essa ammette sempre una e una sola soluzione[1]:

$$x = \frac{b}{a} \,. \tag{3.2}$$

Se si prescinde dalla condizione $a \neq 0$, occorre distinguere tre casi nella valutazione delle soluzioni di un'equazione come quella considerata, e precisamente:

- $a \neq 0$: l'equazione ha, come già detto, solo la soluzione b/a;
- $a = 0 \wedge b \neq 0$: l'equazione non ha alcuna soluzione;
- $a = 0 \wedge b = 0$: l'equazione ammette infinite soluzioni (tutti i numeri reali).

È molto importante tenere conto dell'osservazione contenuta nelle righe precedenti, in particolare nella risoluzione di equazioni parametriche. Chiariamo il concetto con un esempio.

Esempio. Discutere ed eventualmente risolvere l'equazione seguente:

$$(a^2 - 1)x = a + 1 \,.$$

Tenendo conto di quanto detto si conclude che:

- se $a \neq \pm 1$, l'equazione ha la sola soluzione $x = (a+1)/(a^2-1) = 1/(a-1)$;
- se $a = -1$, l'equazione ha come soluzioni tutti i numeri reali;
- se $a = 1$, l'equazione non ha soluzioni.

La più generale equazione *lineare in due incognite* è del tipo

$$ax + by = c \quad , \quad (a, b) \neq (0, 0) \,. \tag{3.3}$$

La condizione sui parametri a e b si può leggere dicendo che essi non sono mai contemporaneamente nulli. Un'equazione come questa ha sempre infinite soluzioni: si tratta di tutte le coppie che si ottengono attribuendo ad una della due incognite un valore arbitrario e ricavando l'altra dall'equazione in una incognita rimanente (purchè il coefficiente di quest'altra incognita sia diverso da zero).

Per esempio l'equazione

$$2x + 3y = 1$$

ha come soluzioni le coppie $(0, 1/3)$, $(1/2, 0)$, $(-1, 1)$, ecc.

L'equazione, pensata in due incognite, con coefficiente della y uguale a 0,

$$3x = 1, \text{ ovvero } 3x + 0y = 1 \,,$$

ha come soluzioni le coppie $(1/3, 1)$, $(1/3, 2)$, $(1/3, -5)$, ecc.

---

[1] Un importante teorema (*Teorema fondamentale dell'algebra*) ha come conseguenza che un'equazione di grado n ha, nell'insieme dei numeri reali, al massimo n soluzioni. Un'equazione del tipo 3.1 ha sempre esattamente una soluzione (come il suo grado), equazioni di grado superiore possono avere anche meno soluzioni di quanto indichi il grado (come si può vedere per esempio nelle equazioni di secondo grado).

3.2 Sistemi di equazioni lineari in due incognite

Un sistema di equazioni consiste nella determinazione delle soluzioni comuni a due (o più) equazioni. Consideriamo, ed è il caso che ci interessa, un *sistema* di due equazioni lineari (cioè di primo grado) in due incognite:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & p \\ cx+dy & = & q \end{array} \right. . \tag{3.4}$$

Anche il sistema di equazioni ha un grado che si ottiene facendo il *prodotto* dei gradi delle due equazioni: in questo caso si hanno due equazioni di primo grado e quindi il sistema è anch'esso di primo grado.

Si dice *soluzione* del sistema una coppia di reali che sia soluzione comune della prima e della seconda equazione. Un sistema come quello proposto può avere:

- una sola soluzione (e allora si dice *determinato*);
- infinite soluzioni (e allora si dice *indeterminato*);
- nessuna soluzione (e allora si dice *incompatibile*, anche se di solito si usa il termine *impossibile*).

I sistemi che hanno soluzioni (una o infinite) si dicono genericamente *compatibili*.

Consideriamo alcuni esempi.

- $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{array} \right.$: il sistema è compatibile e determinato, e ha come unica soluzione la coppia $(1,-1)$.
- $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-4y=2 \end{array} \right.$: il sistema è compatibile e indeterminato, e ha come soluzioni tutte le coppie $(2t+1,t)\ \forall t\in\mathbb{R}$.
- $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=1 \\ 2x-4y=3 \end{array} \right.$: il sistema è incompatibile.

La risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite può avvenire in maniera elementare usando il cosiddetto *metodo di sostituzione*: si ricava un'incognita in una delle due equazioni e la si sostituisce nell'altra, ottenendo un'equazione in una sola incognita, facilmente risolubile; a questo punto il gioco è fatto. Per completezza riporto i calcoli necessari a risolvere il primo dei sistemi appena visti.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y=1 \\ x-y=2 \end{array} \right. ,\quad \left\{ \begin{array}{l} y=1-2x \\ x-y=2 \end{array} \right. ,\quad \left\{ \begin{array}{l} y=1-2x \\ x-(1-2x)=2 \end{array} \right. ,\quad \left\{ \begin{array}{l} y=1-2x \\ x=1 \end{array} \right. ,\quad \left\{ \begin{array}{l} y=-1 \\ x=1 \end{array} \right. .$$

3.3 Equazioni di secondo grado in una incognita

La più generale equazione di secondo grado in una incognita è del tipo

$$ax^2+bx+c=0\,,\quad a\neq 0\,. \tag{3.5}$$

Per risolvere questa equazione si può ricorrere alla nota formula

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,, \tag{3.6}$$

che fornisce

- 2 soluzioni distinte se la quantità $\Delta=b^2-4ac$ (detta *discriminante* o semplicemente *Delta*) è maggiore di zero;

– 1 sola soluzione (si usa anche dire *due soluzioni coincidenti* oppure *una soluzione doppia*) se $\Delta = 0$;
– nessuna soluzione nell'insieme dei numeri reali se $\Delta < 0$. In quest'ultimo caso l'equazione ha 2 soluzioni nell'insieme dei numeri complessi, ma non saremo interessati a valutarle.

Esempi.

– $2x^2 - 3x - 5 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(-5)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 5/2 \\ -1 \end{array} \right.$
– $x^2 - 6x + 9 = 0 \implies x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$
– $x^2 - 2x + 2 = 0 \implies$ nessuna soluzione perché $\Delta = 4 - 4 \cdot 2 < 0$.

3.4 Qualche equazione di grado superiore

Esistono formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado (formule che usano i numeri complessi), ma non saremo interessati a considerarle. Non esistono invece formule risolutive per equazioni dal quinto grado in su. Noi ci limiteremo a considerare solo due casi molto semplici.

3.4.1 Equazioni di tipo elementare

Sono quelle del tipo

$$ax^n + b = 0\,, \quad a \neq 0. \tag{3.7}$$

Esse si risolvono portando b a secondo membro, dividendo per a e successivamente estraendo la radice n-esima, tenendo conto delle differenze tra il caso di n pari e di n dispari, come mostrano gli esempi che seguono.

Esempi.

– $2x^3 + 54 = 0 \implies x^3 = -27 \implies x = -3.$
– $3x^3 - 12 = 0 \implies x^3 = 4 \implies x = \sqrt[3]{4}.$
– $2x^4 + 15 = 0 \implies x^4 = -15/2 \implies$ nessuna soluzione.
– $3x^4 - 14 = 0 \implies x^4 = 14/3 \implies x = \pm\sqrt[4]{14/3}.$

3.4.2 Equazioni scomponibili in fattori

Per risolvere le altre equazioni di grado superiore al secondo consideriamo solo la seguente strategia: portare tutto a primo membro, scrivendo l'equazione nella forma standard

$$f(x) = 0;$$

scomporre (se possibile!) $f(x)$ nel prodotto di fattori di primo e secondo grado e successivamente applicare la *Legge dell'annullamento del prodotto*:

Teorema 3.1 (Legge dell'annullamento del prodotto)**.** *Un prodotto di due o più fattori è uguale a zero se e solo se almeno uno dei fattori è uguale a zero.*

Per capire praticamente come procedere, ragioniamo su alcuni esempi.

Esempi.

– $x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x-1) = 0 \implies x^2 = 0 \vee x - 1 = 0 \implies x = 0 \vee x = 1.$
– $x^3 - 1 = 0 \implies (x-1)(x^2+x+1) = 0 \implies x = 1$ solamente, in quanto l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ non ha soluzioni ($\Delta < 0$).
– $x^4 - 1 = 0 \implies (x^2-1)(x^2+1) = 0 \implies (x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \implies x = \pm 1.$ (Anche qui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni).

3.5 Equazioni con radicali

Le equazioni contenenti radicali sono di norma molto difficili da risolvere e non esiste una tecnica standard per trattarle. Ci occuperemo solo di un caso molto semplice, precisamente le equazioni contenenti un solo radicale, normalmente quadratico o, al massimo, cubico.

L'dea base è quella di *isolare il radicale* lasciandolo a primo membro, preferibilmente preceduto dal segno +, e portando tutto il resto a secondo membro; successivamente si *elevano ambo i membri al quadrato o al cubo*, riducendosi così a una equazione non contenente radicali. Purtroppo l'elevazione al quadrato può comportare l'aggiunta di soluzioni estranee: occorrerà dunque, a posteriori, una verifica dell'accettabilità delle soluzioni trovate. Nessun problema invece nel caso di elevazione al cubo. Si vedano gli esempi che seguono per chiarire il metodo.

Esempi.

- $\sqrt{x+2}+x=0, \quad \sqrt{x+2}=-x, \quad x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0,$
  $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$, e si verifica subito che solo la soluzione $x=-1$ è accettabile.
- $\sqrt{x+2}-x=0, \quad \sqrt{x+2}=x, \quad x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0,$
  $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\left\langle\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$, e si verifica subito che solo la soluzione $x=2$ è accettabile.
- $\sqrt{1+x^2}=x+2, \quad 1+x^2=(x+2)^2, \quad 4x+3=0, \quad x=-3/4$, soluzione accettabile.
- $\sqrt{2x^2+1}=1-x, \quad 2x^2+1=(x+2)^2, \quad 2x^2+1=1-2x+x^2, \quad x^2+2x=0,$
  $x_1=-2, x_2=0$, entrambe soluzioni accettabili.
- $\sqrt[3]{x^2-x-1}=x-1, \quad x^2-x-1=x^3-3x^2+3x-1, \quad x^3-4x^2+4x=0, \quad x(x^2-4x+4)=0,$
  $x=0\lor x=2$, entrambe accettabili.

3.6 Sistemi di equazioni di grado superiore in due incognite

Saremo interessati a sistemi, di secondo e quarto grado, di due equazioni. Poiché il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle singole equazioni, se abbiamo un'equazione di primo grado e una di secondo grado il sistema avrà grado 2; se abbiamo due equazioni di secondo grado il sistema avrà grado 4. I sistemi di secondo grado si possono risolvere abbastanza facilmente, come vedremo su esempi, quelli di quarto grado sono spesso molto complessi e considereremo solo alcuni esempi elementari.

Esempi.

- Un sistema di secondo grado.
  $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-y^2+y-1=0 \end{cases}.$
  Ricaviamo dalla prima $x=2-y$ e sostituiamo nella seconda, ottenendo $(2-y)^2-y^2+y-1=0$, ovvero $3-3y=1$, da cui $y=1$; sostituendo il valore trovato nella prima equazione, otteniamo $x=1$. Possiamo dire che la coppia di numeri $(1,1)$ è l'unica soluzione di questo sistema.
- Ancora un sistema di secondo grado.
  $\begin{cases} x+2y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}.$
  Ricaviamo dalla prima $x=-2y$ e sostituiamo nella seconda, ottenendo, dopo qualche semplificazione, $5y^2-1=0$, da cui $y=\pm 1/\sqrt{5}$; sostituendo nella prima equazione troviamo

$x = \mp 2/\sqrt{5}$. Dunque il sistema ha due soluzioni, precisamente le coppie

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

di numeri reali.

– Un sistema di quarto grado.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Possiamo procedere ricavando $x^2 = 4 - 4y^2$ dalla prima equazione per poi sostituirlo nella seconda, ottenendo, dopo qualche semplificazione, $3y^2 = 2$, da cui $y = \pm\sqrt{2/3}$. Sostituendo, con ordine, uno alla volta i due valori trovati per y nella prima equazione, troviamo, per ciascuno, due valori di x. In totale abbiamo 4 coppie di soluzioni:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

In seguito vedremo l'interpretazione grafica di questi risultati.

3.7 Esercizi

Esercizio 3.1. *Risolvere i seguenti sistemi di equazioni.*

1. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{cases}$

4 Un po' di geometria analitica

In questo capitolo richiamiamo alcuni concetti fondamentali di geometria analitica, concetti che saranno utilizzati nel seguito del corso. In vista dello studio delle funzioni reali di due variabili reali, introdurremo anche alcune idee fondamentali della geometria analitica dello spazio.

4.1 Coordinate cartesiane di punti nel piano e nello spazio

Nello spazio si può introdurre un *Sistema di coordinate cartesiane* considerando 3 rette non complanari passanti per uno stesso punto O. Tutte le proprietà metriche (cioè quelle che riguardano lunghezze, distanze, ecc.) si esprimono in maniera più semplice se le tre rette sono ortogonali, e in questo caso si parla di coordinate cartesiane *ortogonali*. Su ciascuna delle tre rette si sceglie un'unità di misura e un verso e, quindi, un sistema di ascisse. Per ragioni di semplicità si sceglie di solito la stessa unità sulle tre rette e allora si parla di sistema cartesiano *monometrico*. Nel seguito useremo sempre un sistema *cartesiano ortogonale e monometrico*. Il punto di intersezione delle tre rette si chiama *origine* del sistema di coordinate. Le tre rette, dette anche *assi*, si indicano con O_x, O_y, O_z, o, semplicemente con x, y, z, se non ci sono possibilità di equivoci. I piani O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}, o, semplicemente, xy, xz, yz, si chiamano piani coordinati. Naturalmente nel piano bastano solo due assi e in questo caso l'asse O_x si chiama anche *asse delle ascisse*, l'asse O_y *asse delle ordinate*. Un sistema del tipo detto si indica con Oxy nel piano e con $Oxyz$ nello spazio.

Una volta scelto il sistema $Oxyz$, ad ogni punto P dello spazio si può far corrispondere una terna di numeri reali (una coppia nel piano), con la costruzione indicata in figura 4.1.

Per indicare le coordinate del punto P si scrive $P(x, y, z)$ ($P(x, y)$ nel piano), o anche, a volte, $P = (x, y, z)$ ($P = (x, y)$ nel piano).

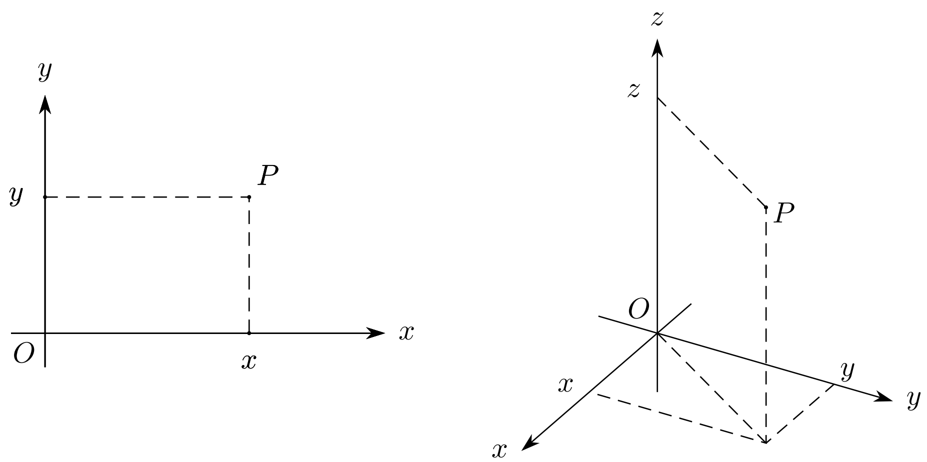


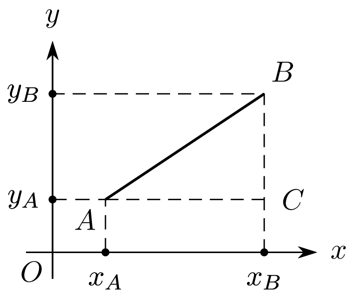
Figura 4.1 *Coordinate cartesiane di un punto nel piano e nello spazio*

4.2 Le formule fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio

Dati, nel piano riferito al sistema Oxy, due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, la *distanza tra i due punti* A, B (nell'ipotesi che il sistema di coordinate cartesiane sia ortogonale e monometrico) è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,. \tag{4.1}$$

Poiché questa formula è legata all'applicazione del teorema di Pitagora, la ortogonalità del sistema di coordinate è essenziale. Lo si può agevolmente controllare con riferimento alla figura 4.2.



$$\overline{AC} = x_C - x_A = x_B - x_A$$
$$\overline{BC} = y_B - y_C = y_B - y_A$$

Figura 4.2 *Distanza tra due punti e teorema di Pitagora*

Le coordinate del *punto medio* M del segmento AB sono invece date dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\,. \tag{4.2}$$

Tra le formule fondamentali riportiamo anche quella del *baricentro* G di un triangolo di vertici $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, che è sempre dato dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,. \tag{4.3}$$

4.3 La retta nel piano cartesiano

L'equazione generale di una retta nel piano cartesiano è

$$ax + by + c = 0 \tag{4.4}$$

dove i numeri a e b (coefficienti di x e y) non possono essere contemporaneamente nulli. Per disegnare la retta è sufficiente trovare due punti cioè due soluzioni dell'equazione.

Esempio. Rappresentare graficamente la seguente retta: $3x + 2y - 6 = 0$. Ponendo successivamente, per esempio, $x = 0$ e poi $y = 0$ si trova, rispettivamente, $y = 3$ e $x = 2$. Dunque la retta passa per i punti $(0, 3)$ e $(2, 0)$. Il grafico è il seguente.

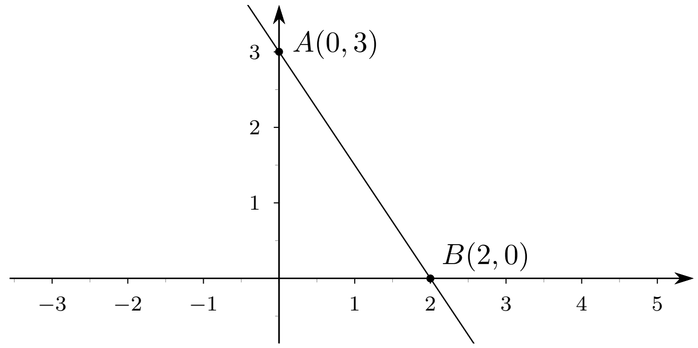


Figura 4.3 *Retta* $3x + 2y - 6 = 0$

Se $b \neq 0$ l'equazione si può trasformare nella forma

$$y = -\frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}\,,$$

che di solito si scrive

$$y = mx + q\,. \tag{4.5}$$

Il numero m si chiama *coefficiente angolare* o *pendenza* della retta, il numero q *ordinata all'origine*. Per esempio la retta della figura 4.3 si può scrivere nella forma

$$y = -\frac{3}{2}x + 2\,,$$

con $m = -3/2$ e $q = 2$. Si può osservare che

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\,, \tag{4.6}$$

e la stessa proprietà vale se si prendono due altri punti qualunque della retta. Questo rende evidente il perché del nome *coefficiente angolare*: si tratta del rapporto tra lo spostamento verticale e quello orizzontale quando ci si muove da un punto all'altro della retta. È evidente che se $m > 0$ la retta è "in salita", se $m < 0$ "in discesa", se $m = 0$ è orizzontale. Il motivo del nome *ordinata all'origine* per il numero $q = 2$ risulta evidente dalla figura 4.3. La formula (4.6) si usa di solito scrivere

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\,. \tag{4.7}$$

In sostanza la *differenza* $y_B - y_A$ si indica con Δy (leggi "*delta y*"), la differenza $x_B - x_A$ si indica con Δx (leggi "*delta x*"). Questa è una notazione molto importante e di uso comune: se si ha una qualunque grandezza, g, variabile, la differenza tra due valori della grandezza si chiama *variazione* e si indica con Δg. Se Δg è positiva si parla di *incremento*, se Δg è negativa si parla di *decremento*. Per esempio se il guadagno g della mia impresa nel 2008 è stato di 150.000 \$ e nel 2009 di 180000 \$, si ha $\Delta g = 30000$ \$, cioè un *incremento* di 30000 \$ di guadagno, in un anno.

Le rette verticali sono caratterizzate dall'avere $b = 0$ e quindi equazioni del tipo $x = k$, quelle orizzontali dall'avere $m = 0$ e quindi equazioni del tipo $y = k$.

Tenendo conto del significato geometrico del coefficiente angolare possiamo concludere che due rette non verticali sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare, mentre si dimostra che due rette, non verticali né orizzontali, sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei loro coefficienti angolari è -1, ovvero se il coefficiente angolare di una è il reciproco cambiato di segno di quello dell'altra.

Per trovare l'equazione di una retta si possono presentare le seguenti due situazioni.

1. *Retta per un punto e di pendenza nota*: se $P(x_P, y_P)$ è il punto e m è il coefficiente angolare che indica la pendenza, l'equazione richiesta è:

$$y - y_P = m(x - x_P)\,. \tag{4.8}$$

2. *Retta per due punti*: se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ sono i due punti, l'equazione richiesta[1] è:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)\,. \tag{4.9}$$

Esempi.

- Trovare la retta s passante per $(1, 2)$ e parallela alla retta $r\colon 2x - y + 5 = 0$.

  Scrivendo la retta r nella forma $y = 2x-5$ se ne valuta subito il coefficiente angolare, $m = 2$. L'equazione richiesta è allora: $y - 2 = 2(x - 1)$, che si può semplificare in $2x - y = 0$.
- Trovare la retta s passante per $(2, 1)$ e perpendicolare alla retta $r\colon x - 2y - 1 = 0$.

  Si ha: $r\colon y = {}^1\!/_2\, x - {}^1\!/_2$. Dunque il coefficiente angolare della retta r è ${}^1\!/_2$ e quindi quello della retta s sarà -2 (il reciproco cambiato di segno). L'equazione richiesta sarà dunque: $y - 1 = -2(x - 2)$, che si semplifica in $2x + y - 5 = 0$.
- Trovare la retta passante per $(2, 3)$ e $(4, -1)$.

  Applicando la formula soprascritta si trova subito: $(x - 2)(-1 - 3) = (y - 3)(4 - 2)$, che si semplifica in $2x + y - 7 = 0$.

4.4 La parabola nel piano cartesiano

4.4.1 Parabola con asse verticale

Una parabola con asse verticale ha equazione

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0\,, \tag{4.10}$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali.

- Se $a > 0$ volge la concavità verso l'alto; se $a < 0$ volge la concavità verso il basso.
- Il vertice V ha ascissa

$$x_V = -\frac{b}{2a}\,. \tag{4.11}$$

- L'ordinata del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.

4.4.2 Parabola con asse orizzontale

Una parabola con asse orizzontale ha equazione

$$x = ay^2 + by + c, \quad a \neq 0\,, \tag{4.12}$$

ed ha le seguenti caratteristiche fondamentali.

- Se $a > 0$ volge la concavità verso destra; se $a < 0$ volge la concavità verso sinistra.

[1] Conviene usare la forma che proponiamo qui, anziché quella sotto forma di frazione, comunemente proposta nei testi, in quanto quella forma *non* si applica né alle rette verticali né a quelle orizzontali, mentre la forma dell'equazione (4.9) va bene sempre.

– Il vertice V ha ordinata

$$y_V = -\frac{b}{2a}\,. \tag{4.13}$$

– L'ascissa del vertice si può trovare direttamente sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola.

Per tracciare correttamente una parabola occorre valutare il segno di a, determinare il vertice e successivamente almeno qualche altro punto, preferibilmente le intersezioni con gli assi (se ci sono). Vediamo qualche esempio.

Esempi.

– $y = 2x^2 - x - 1$. La concavità è verso l'alto, il vertice ha ascissa $1/4$ e, quindi, ordinata $-9/8$. L'intersezione con l'asse delle y si ottiene ponendo $x = 0$, da cui $y = -1$. Le intersezioni con l'asse delle x si ottengono ponendo $y = 0$, da cui $x_1 = -1/2$, $x_2 = 1$ (ottenute con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado). A questo punto il tracciamento del grafico è facile e si ottiene:

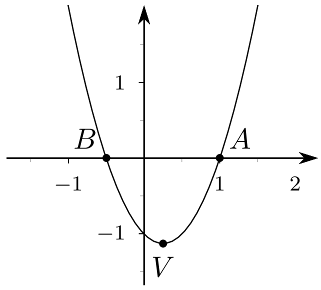


Figura 4.4 *Parabola di equazione* $y = 2x^2 - x - 1$

– $x = y^2 - 2y + 2$. La concavità è verso destra, il vertice ha ordinata 1 e, quindi, ascissa 1. L'intersezione con l'asse delle x si ottiene ponendo $y = 0$, da cui $x = 2$. Per trovare le intersezioni con l'asse delle y bisogna porre $x = 0$, ma l'equazione risultante non ha soluzioni (ha il $\Delta < 0$). Troviamo allora qualche altro punto, per esempio se $y = 2$, $x = 2$, mentre se $y = -1$, $x = 5$. A questo punto il tracciamento del grafico è semplice e si ottiene:

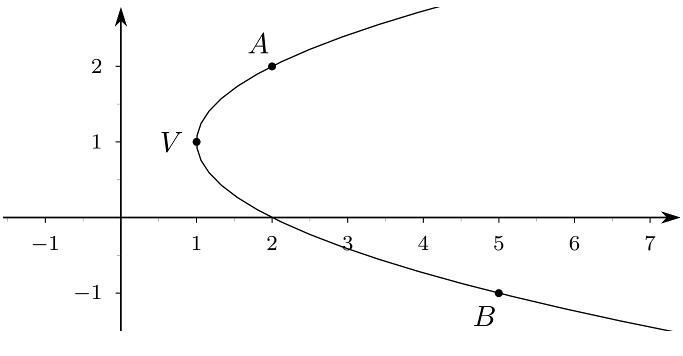


Figura 4.5 *Parabola di equazione* $x = y^2 - 2y + 2$

4.5 La circonferenza nel piano cartesiano

L'equazione generica di una circonferenza nel piano cartesiano è

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\,, \tag{4.14}$$

con la condizione che

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0\,. \tag{4.15}$$

Se la condizione (4.15) non è verificata l'equazione (4.14) non ha alcuna soluzione. Se invece la condizione (4.15) è verificata la relativa circonferenza ha centro nel punto

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \tag{4.16}$$

e raggio dato dalla formula

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}, \tag{4.17}$$

dunque se $a^2 + b^2 - 4c > 0$ si tratta di una circonferenza vera e propria, se invece $a^2 + b^2 - 4c = 0$ si tratta di una circonferenza di raggio nullo, cioè "degenerata" in un punto.

Si presti particolare attenzione al fatto che, nell'equazione (4.14), detta *forma cononica*, i coefficienti di x^2 e y^2 *devono* essere così uguali a 1. Se essi fossero uguali tra di loro ma diversi da 1, bisognerebbe prima ridursi alla forma canonica; se essi fossero diversi tra di loro *non* si tratterebbe di una circonferenza.

L'equazione (4.14) della circonferenza si può scrivere in una maniera molto utile, se si conoscono il centro e il raggio:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2\,. \tag{4.18}$$

Esempi.

- $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$: circonferenza con centro in $C(1, -2)$ e raggio $r = \sqrt{5}$. L'equazione si può scrivere nella forma $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

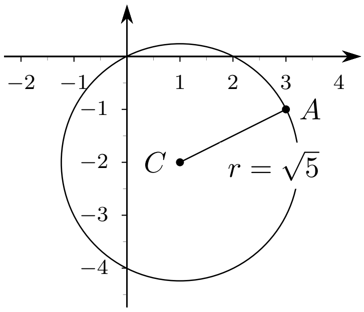


Figura 4.6 *Circonferenza di equazione* $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

- $x^2 + y^2 - x - 3y + 5 = 0$: poiché $(-1)^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 5 < 0$, l'equazione non ha alcuna soluzione.
- $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$: poiché $(-2)^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 0$, si tratta di una circonferenza *degenere*, cioè ridotta a un solo punto, il suo centro, precisamente $C(1, 2)$.
- $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 19 = 0$: innanzitutto osserviamo che i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali; per ottenere la forma canonica prevista dividiamo ambo i membri per 4, ottenendo

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + \frac{19}{4} = 0\,.$$

A questo punto osserviamo che $a^2 + b^2 - 4c = 16 + 4 - 19 = 1 > 0$. Dunque l'equazione proposta ha come grafico una circonferenza di centro $C(2, 1)$ e raggio $r = 1/2$. Il grafico è riportato nella figura 4.7.

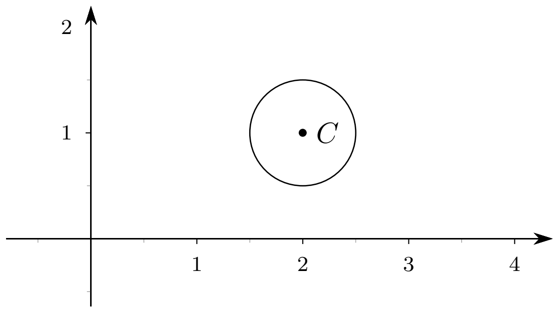


Figura 4.7 *Grafico dell'equazione* $4x^2 + 4y^2 - 16x - 8y + 19 = 0$

4.6 Ellisse ed iperbole

Ci occuperemo innanzitutto dell'equazione dell'ellisse e dell'iperbole in un caso particolare, precisamente il caso di centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati.

L'equazione generica dell'ellisse o iperbole di cui vogliamo occuparci è del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \tag{4.19}$$

Questa equazione rappresenta

1. un'ellisse se è del tipo: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = +1$;
2. un'iperbole se è del tipo: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = +1$ oppure $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$;
3. non ha alcuna soluzione se è del tipo: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

Nei primi due casi per la rappresentazione grafica si comincia col tracciare un rettangolo di centro l'origine e lati $2a$ (sull'asse orizzontale) e $2b$ (sull'asse verticale). Se si tratta di un'ellisse il suo grafico è immediato, come mostra la figura 4.8. Se si tratta di un'iperbole bisogna ancora tracciare le rette diagonali del rettangolo e poi procedere come nei grafici riportati oltre. Le due rette diagonali sono gli asintoti dell'iperbole.

I numeri a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse o iperbole rispettivamente.

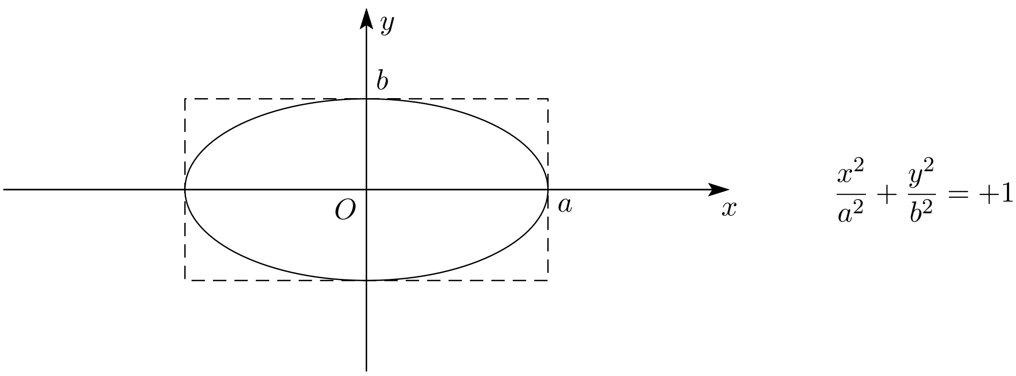


Figura 4.8 *Ellisse con centro l'origine*

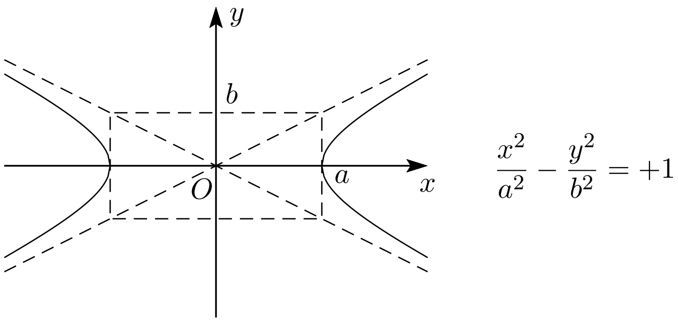


Figura 4.9 *Iperbole: primo caso*

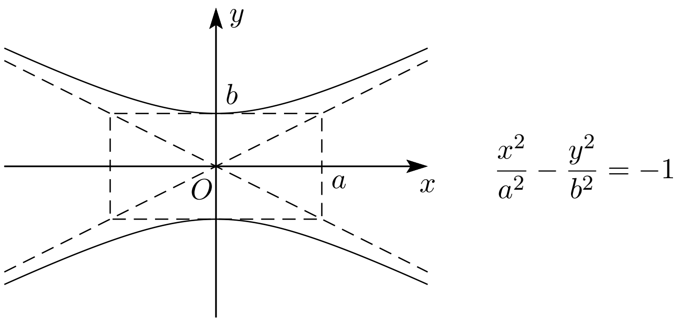


Figura 4.10 *Iperbole: secondo caso*

Esempi.

– $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$: per ottenere la forma canonica indicata nella formula (4.19) portiamo il 5 a secondo membro e dividiamo per 5, ottenendo

$$\frac{3}{5}\,x^2 + \frac{2}{5}\,y^2 = 1\,.$$

Occorre un ulteriore passaggio per arrivare alla forma richiesta, dove è previsto solo x^2 o y^2 al numeratore e il coefficiente al denominatore:

$$\frac{x^2}{5/3} + \frac{y^2}{5/2} = 1\,.$$

Avremo dunque $a^2 = 5/3$ e $b^2 = 5/2$, ovvero

$$a = \sqrt{\frac{5}{3}}\,, \quad b = \sqrt{\frac{5}{2}}\,,$$

e l'equazione rappresenterà un'ellisse, il cui grafico è rappresentato nella figura 4.11.

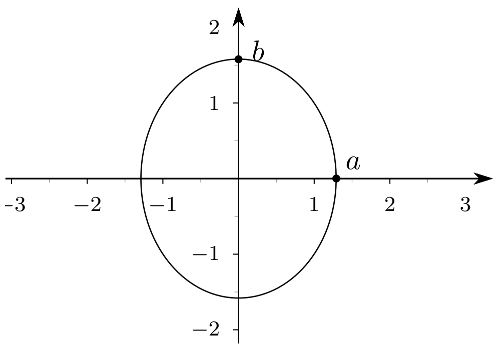


Figura 4.11 *Ellisse di equazione* $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$

– $-2x^2 + 4y^2 + 3 = 0$: procedendo come sopra indicato otteniamo, successivamente,

$$-2x^2 + 4y^2 = -3, \quad 2x^2 - 4y^2 = 3, \quad \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}y^2 = 1, \quad \frac{x^2}{3/2} - \frac{y^2}{3/4} = 1\,.$$

L'equazione rappresenta dunque un'iperbole di semiassi

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}}\,, \quad b = \sqrt{\frac{3}{4}},$$

e del primo tipo, il cui grafico è rappresentato in figura 4.12

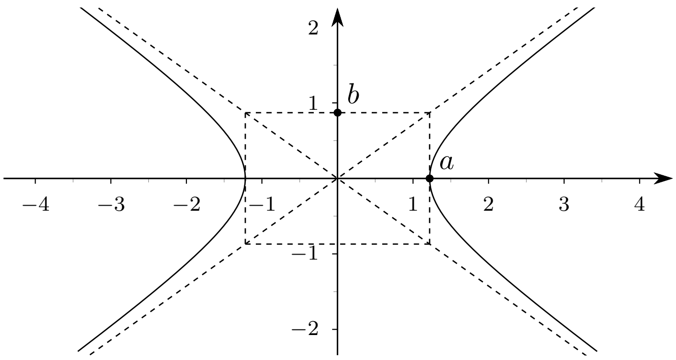


Figura 4.12 *Iperbole di equazione* $-2x^2 + 4y^2 + 3 = 0$

L'ellisse o l'iperbole, sempre con assi paralleli agli assi coordinati, possono anche avere il centro fuori dall'origine. In questo caso le equazioni, in forma canonica, sono del tipo

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} \pm \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = \pm 1\,, \tag{4.20}$$

dove $C = (x_C, y_C)$ è il centro. Le rappresentazioni grafiche si fanno come già visto per le coniche con centro nell'origine, salvo, appunto, il fatto che il centro risulta ora *traslato*.

4.7 Risoluzione grafica di sistemi in due incognite

La rappresentazione di rette, parabole, ellissi ed iperboli rende possibile una interpretazione grafica molto significativa della risoluzione di sistemi di equazioni (di primo o secondo grado) in due incognite: se si rappresentano graficamente le curve relative a ciascuna equazione del sistema, le soluzioni del sistema corrisponderanno ai punti di intersezione di queste curve, rendendo anche evidente il motivo per cui a volte si hanno soluzioni e a volte no. Vediamo la cosa su alcuni esempi.

Esempi.

– $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$.

Procedendo con la tecnica di sostituzione già nota, si trova l'unica soluzione $(1, -1)$. Se si rappresentano graficamente le due rette che corrispondono alle equazioni del sistema, si vede che esse hanno un unico punto di intersezione, $(1, -1)$ appunto.

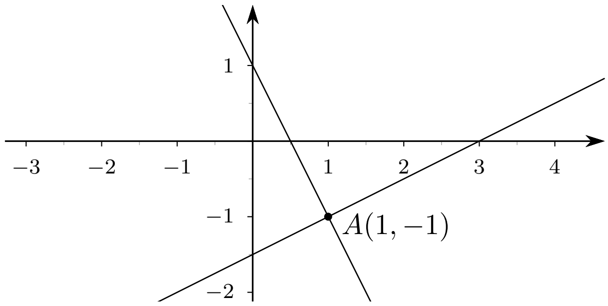


Figura 4.13 *Risoluzione grafica di un sistema di equazioni*

– $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$

Questa volta il sistema non ha soluzioni e il tutto corrisponde al fatto che le due rette che corrispondono alle due equazioni del sistema sono parallele, come mostra la figura 4.14.

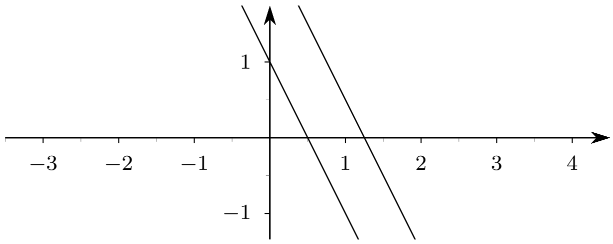


Figura 4.14 *Sistema di equazioni senza soluzioni*

– $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha come soluzioni $(0, -1)$ e $(1, 1)$ e il tutto trova conferma nelle intersezioni tra la retta e le circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema, come mostra la figura 4.15.

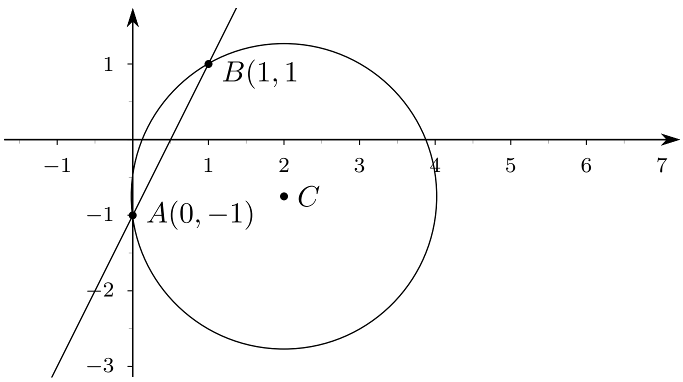


Figura 4.15 *Un sistema di secondo grado*

– $\begin{cases} 4x + 3y = 10 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha come unica soluzione $(8/5\,, 6/5)$ e il tutto trova conferma nel fatto che la retta e la circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema sono tra di loro tangenti, come mostra la figura 4.16.

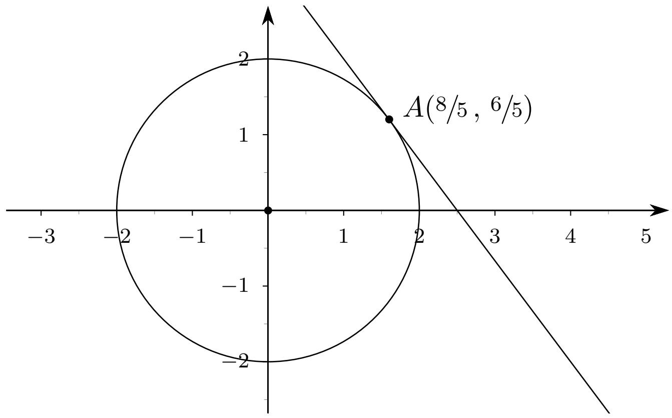


Figura 4.16 *Sistema di secondo grado con una sola soluzione*

– $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

Questa volta il sistema ha quattro soluzioni, e precisamente $(-\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, -1)$, $(\sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, -1)$, e il tutto trova conferma nel fatto che l'ellisse e la circonferenza corrispondenti alle due equazioni del sistema hanno quattro intersezioni, come mostra la figura 4.17.

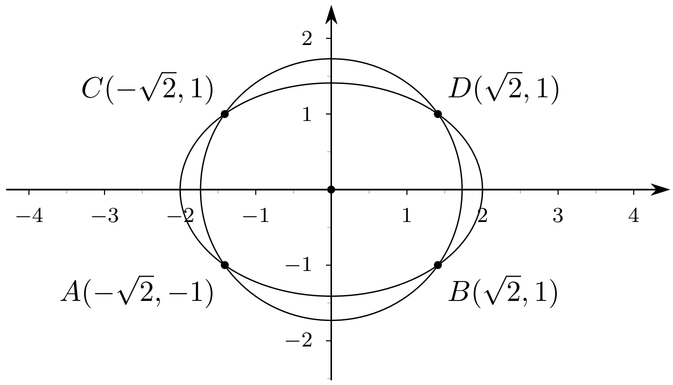


Figura 4.17 *Un sistema di quarto grado*

Le rappresentazioni grafiche che abbiamo considerato diventano ancora più importanti e significative quando si tratta di risolvere disequazioni, come vedremo successivamente.

4.8 Altri luoghi geometrici del piano

In generale se consideriamo un'equazione in due incognite, del tipo $f(x, y) = 0$, l'insieme delle sue soluzioni sarà un sottoinsieme di punti del piano cartesiano, detto anche un *luogo*.

In caso di equazioni di tipo diverso da quelle che abbiamo considerato, non è, di solito, facile trovare le caratteristiche degli insiemi di soluzioni. Qualche volta si può scomporre $f(x, y)$ in fattori e poi usare la solita legge dell'annullamento del prodotto.

Esempi.

– $xy = 0$. Si tratta dell'unione tra gli insiemi $x = 0$ e $y = 0$, cioè dell'equazione complessiva dei due assi cartesiani.
– $x^2 - y^2 = 0$. Scritta l'equazione nella forma $(x - y)(x + y) = 0$, si conclude che si tratta dell'unione delle soluzioni delle equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$, cioè l'equazione

complessiva delle due bisettrici dei quadranti. Si poteva anche, ancora più semplicemente, scrivere l'equazione direttamente nella forma $x = \pm y$, giungendo alle stesse conclusioni.
- $x^2 = 4$. Scritta l'equazione nella forma $(x-2)(x+2) = 0$, o anche, più semplicemente, $x = \pm 2$, si vede che si tratta dell'unione di due rette parallele all'asse delle y.
- $(x-y)(x-y-1) = 0$. Con la solita legge dell'annullamento del prodotto si conclude che si tratta delle due rette (tra di loro parallele) $x - y = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Si noti che eseguendo i calcoli e semplificando si ottiene l'equazione di secondo grado in due incognite $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$.

In ogni caso, data un'equazione $f(x, y) = 0$, è sempre possibile *controllare* se un dato punto è o no soluzione dell'equazione stessa: basterà effettuare una semplice sostituzione.

Esempio. Il punto $(1, -1)$ è soluzione dell'equazione $x^2 - xy - 2^x = 0$, mentre il punto $(1, 1)$ non è soluzione.

Per ragioni di completezza segnaliamo che si dimostra che il luogo dei punti che soddisfano una equazione di secondo grado in due incognite, cioè un'equazione del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,, \tag{4.21}$$

è sempre una *conica*, eventualmente una *conica degenere*, e precisamente una delle seguenti "curve":

1. una ellisse (con la circonferenza come caso particolare);
2. una parabola;
3. una iperbole;
4. una coppia di rette incidenti in un punto;
5. una coppia di rette parallele (eventualmente coincidenti);
6. un punto;
7. l'insieme vuoto.

Le seguenti equazioni forniscono un esempio per ciascuno di questi casi (la quasi totalità sono esempi già considerati nelle pagine precedenti).

1. $3x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ (ellisse, vedi la figura 4.11 della pagina 32);
2. $x^2 - y + x - 1$ (parabola);
3. $2x^2 - 4y^2 = 3$ (iperbole, vedi la figura 4.12 della pagina 33);
4. $x^2 - y^2 = 0$ (la coppia delle bisettrici dei quadranti, vedi sopra);
5. $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$ (coppia di rette parallele, vedi sopra);
6. $x^2 + y^2 = 0$ (equazione cha come soluzioni solo l'origine, in quanto la somma di due quadrati può essere zero se e solo se entrambi i numeri sono zero);
7. $x^2 + y^2 + 1 = 0$, ovvero $x^2 + y^2 = -1$ (nessuna soluzione, perché la somma di due quadrati non può essere negativa).

Questi luoghi si chiamano coniche perché si ottengono *sezionando* un doppio cono "indefinito" con un piano, come mostra la figura 4.18 nel caso particolare dell'iperbole, ma non intendiamo insistere oltre sull'argomento.

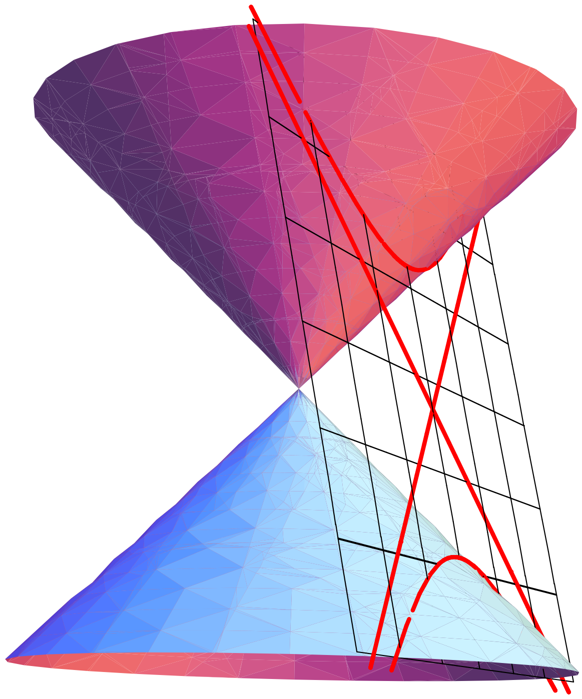


Figura 4.18 *Sezione di un cono ("indefinito") con un piano*

4.9 Esercizi

Esercizio 4.1. *Risolvere graficamente i sistemi dell'esercizio 3.1 della pagina 23.*

Esercizio 4.2. *Controllare se i punti indicati appartengono o no ai luoghi di punti individuati dalle equazioni date a fianco di ciascuno.*

1. $P(1,1)$; $\quad x^2 - xy^2 + 3x - 3 = 0$;
2. $Q(-1,2)$; $\quad xy - x^2y^3 + 3 = 0$;
3. $R(0,1)$; $\quad x^{2y} - y^x - 1 = 0$;

Esercizio 4.3. *Determinare, per via grafica, le soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni in due incognite.*

1. $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x - 8 = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-4=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2-9=0 \\ x+1=0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=4 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2-1=0 \\ x^2+(y-2)^2=40 \end{cases}$;

5 Disequazioni

Una disequazione è una espressione del tipo

$$f(x) \lesseqqgtr g(x) \quad (\text{cioè } f(x) < g(x) \vee f(x) \leq g(x) \vee f(x) > g(x) \vee f(x) \geq g(x)),$$

nel caso di un'incognita, oppure del tipo

$$f(x,y) \lesseqqgtr g(x,y) \quad (\text{cioè } f(x,y) < g(x,y) \vee f(x,y) \leq g(x,y) \vee f(x,y) < g(x,y) \vee f(x,y) \geq g(x,y)),$$

nel caso di due incognite.

Risolvere una disequazione significa trovare *tutti* i numeri, o *tutte* le coppie di numeri, che rendono vera la disuguaglianza.

Esempi.

- $3x^2 - 2x > 1$: il numero 2 è soluzione, il numero 0 non è soluzione.
- $x^2 - 2y^2 \geq x + y$: la coppia $(2,0)$ è soluzione, la coppia $(2,1)$ non è soluzione.

È importante notare subito che, nel caso di disequazioni in una incognita, *di solito*, si hanno infinite soluzioni, al contrario delle equazioni che, sempre di solito, hanno un numero finito di soluzioni. L'insieme di tutte le soluzioni si riesce di solito a rappresentare in maniera semplice utilizzando i sottoinsiemi di numeri reali di cui abbiamo parlato nel capitolo 2, al paragrafo 2.4. Molto convenienti, come vedremo, sono le rappresentazioni grafiche.

Nel caso di disequazioni in due incognite la rappresentazione grafica diventa praticamente indispensabile, in quanto non è di solito possibile esprimere analiticamente in maniera semplice l'insieme delle soluzioni.

5.1 Disequazioni di primo grado

5.1.1 Il caso di un'incognita

Una disequazione di primo grado in un'incognita si può sempre ridurre a una delle forme

$$ax + b > 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b < 0, \quad ax + b \leq 0\,. \tag{5.1}$$

Conviene sempre ridursi al caso in cui $a > 0$, eventualmente cambiando il segno ad ambo i membri,[1] dopodiché si procede portando b a secondo membro e dividendo per a.

Esempi.

- $3x + 2 \leq 0$: $3x \leq -2$, $x \leq -2/3$, ovvero $x \in]-\infty, -2/3]$, insieme che si rappresenta graficamente come nella figura seguente.

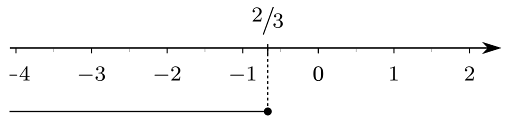


Figura 5.1 *La disequazione* $3x + 2 \leq 0$

[1] Attenzione: cambiando il segno è *obbligatorio* cambiare anche il verso della disequazione

– $2x+8 < 7x-1$: $-5x < -9$, $5x > 9$, $x > 9/5$, ovvero $x \in]9/5, +\infty[$, insieme che si rappresenta graficamente come nella figura seguente.

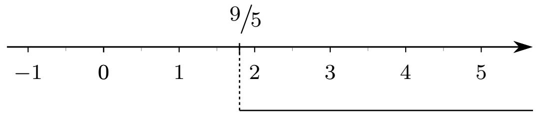


Figura 5.2 *La disequazione* $2x + 8 < 7x - 1$

Si noti come nel primo caso il punto $-2/3$ era compreso nell'insieme delle soluzioni, nel secondo caso invece il punto $9/5$ non è compreso: è opportuno abituarsi a evidenziare questa differenza anche nel grafico, per esempio usando un "pallino pieno" nel primo caso come abbiamo fatto noi.[2]

5.1.2 Il caso di due incognite

Una disequazione di primo grado in due incognite si può sempre porre in una delle forme

$$ax + by + c > 0, \quad ax + by + c \geq 0, \quad ax + by + c < 0, \quad ax + by + c \leq 0. \tag{5.2}$$

Se teniamo conto che $ax + by + c = 0$ ha come grafico una retta nel piano, e che una retta divide il piano in due semipiani, potremo concludere che una disequazione di primo grado in due incognite ha come soluzioni tutti i punti di uno dei due semipiani, comprendenti o meno la retta origine, a seconda della presenza o no del segno di $=$ nella disequazione. Per sapere quale dei due semipiani scegliere, conviene considerare un punto in uno dei due (fuori dalla retta origine dunque) e controllare numericamente se la disequazione è verificata per quel punto.

Esempi.

– $2x - y + 1 > 0$. Si rappresenta graficamente la retta $2x - y + 1 = 0$. Si prende poi il punto $(0, 0)$, che non sta sulla retta: sostituendo le sue coordinate nella disequazione si vede subito che esse la soddisfano, dunque la disequazione è verificata da *tutti* i punti che stanno nello stesso semipiano di O, esclusa la retta origine.

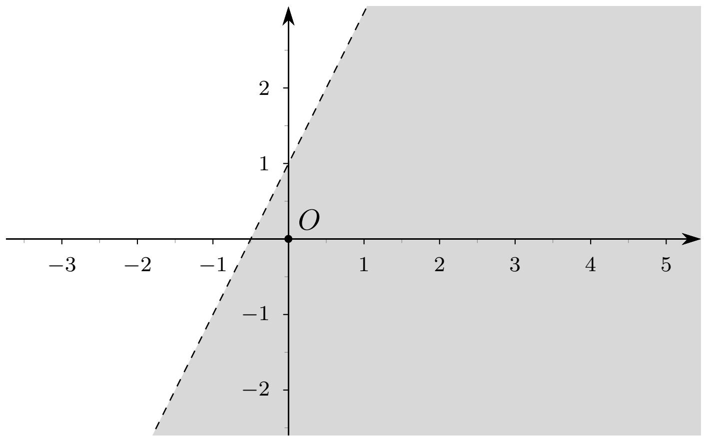


Figura 5.3 *La disequazione* $2x - y + 1 > 0$

– $2x + y + 1 \geq 0$. Procedendo come prima si trova l'insieme di soluzioni rappresentato in figura 5.4.

[2] È ovvio che ciascuno può utilizzare il tipo di visualizzazione che preferisce, o a cui è stato abituato: l'importante è essere chiari e coerenti.

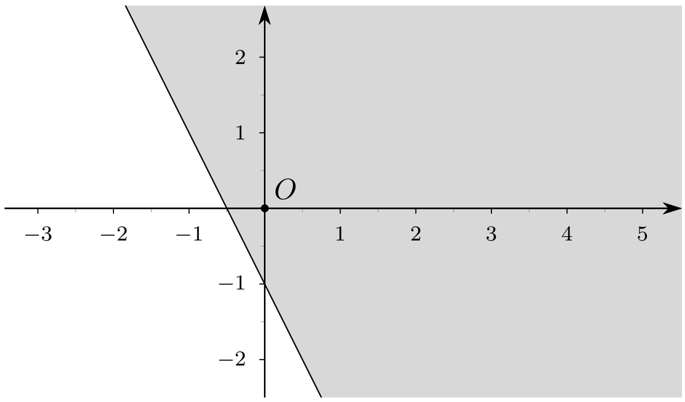


Figura 5.4 *La disequazione* $2x + y + 1 \geq 0$

5.2 Disequazioni di secondo grado

5.2.1 Il caso di un'incognita

Una disequazione di secondo grado in un'incognita si può sempre mettere in una delle forme sintetizzate nella formula seguente:

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0\,. \tag{5.3}$$

Il modo migliore per risolverla è quello di considerare la parabola $y = ax^2 + bx + c$ e poi valutare dal grafico quali sono le x che corrispondono alle parti di parabola che stanno sopra o sotto l'asse delle ascisse, a seconda del verso della disequazione. Gli esempi che seguono chiariranno il metodo.[3]

Esempi.

– $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Il grafico di figura 5.5 rende evidente che le soluzioni sono $x \leq -1/2$ oppure $x \geq 1$, ovvero

$$x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[.$$

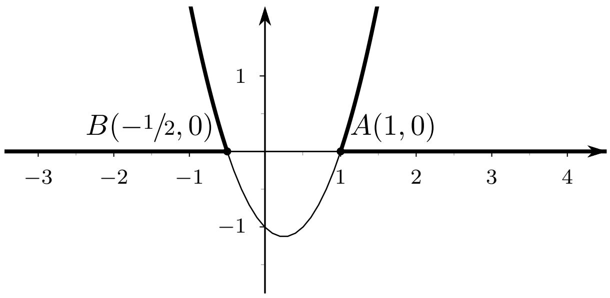


Figura 5.5 *La disequazione* $2x^2 - x - 1 \geq 0$

Questo insieme di soluzioni può essere rappresentato graficamente come segue, e come si deduce subito dalla figura 5.5 stessa.

[3]Ci sono anche delle regole legate al segno di a e al tipo di discriminante dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, detta *equazione associata* alla disequazione. Purtroppo la memorizzazione di queste regole avviene quasi sempre in maniera scorretta, con conseguenti errori nella risoluzione. A nostro avviso la tecnica grafica è di gran lunga preferibile.

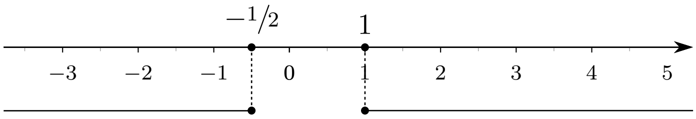


Figura 5.6 *Le soluzioni della disequazione* $2x^2 - x - 1 \geq 0$

- $-2x^2 + x - 1 \geq 0$. Il grafico di figura 5.7 rende evidente che la disequazione non ha nessuna soluzione. Si noti come invece le disequazioni $-2x^2+x-1 \leq 0$ e $-2x^2+x-1 < 0$ avrebbero avuto come insieme delle soluzioni tutti i numeri reali.

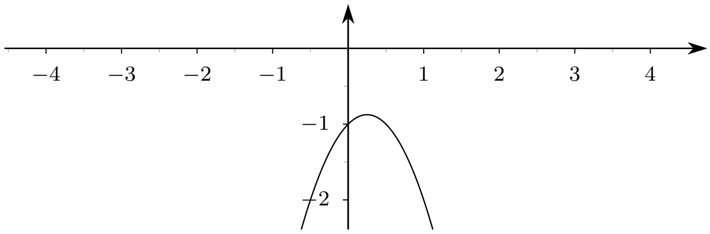


Figura 5.7 *La disequazione* $2x^2 + x - 1 \geq 0$.

- $x^2+2x+1 \leq 0$ Dal grafico di figura 5.8 si deduce facilmente che la disequazione è verificata solo per $x = -1$: il trinomio $x^2 + 2x + 1$ non è infatti mai negativo e può essere nullo solo in corrispondenza di $x = -1$.

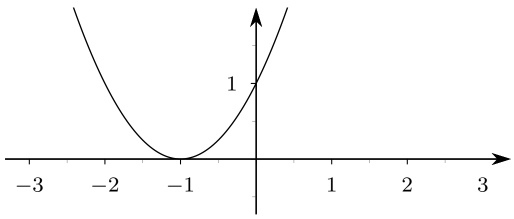


Figura 5.8 *La disequazione* $x^2 + 2x + 1 \leq 0$

5.2.2 Il caso di due incognite

La situazione è molto simile a quanto già visto per il caso delle equazioni di primo grado: rappresentata nel piano cartesiano la parabola, circonferenza, ellisse o iperbole corrispondente alla equazione in due incognite associata alla disequazione, si constata che il piano viene diviso in due regioni (sono, solo in apparenza, tre nel caso dell'iperbole). In una delle due regioni la disequazione è verificata, nell'altra no, e la ricerca della regione giusta si fa scegliendo un punto e controllando numericamente se in corrispondenza ad esso la disequazione è verificata o meno.

Esempi.

- $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0$. Si traccia la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$; successivamente si controlla che sostituendo le coordinate di un punto interno (per esempio il centro, $(1, 1)$, che sicuramente è interno) la disequazione è verificata. La disequazione sarà dunque verificata per tutti gli altri punti interni e per la circonferenza stessa, visto che la disequazione è del tipo "$\leq$".

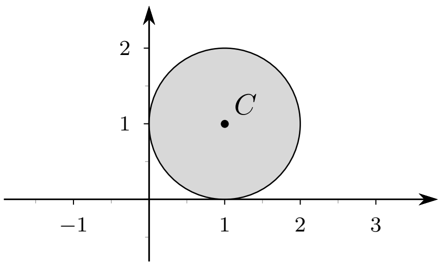


Figura 5.9 *La disequazione* $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0$

– $x^2 - \dfrac{y^2}{4} < 1$. Procedendo come sopra e provando con il punto $(0,0)$, si trova che la disequazione è verificata nella zona compresa tra i due rami dell'iperbole $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$, esclusa l'iperbole stessa, visto che nella disequazione manca il segno di $=$.

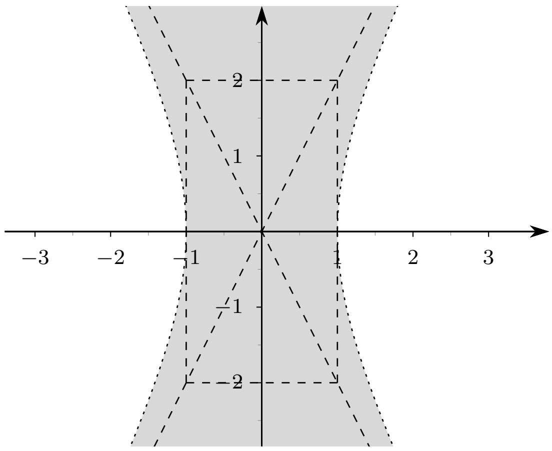


Figura 5.10 *La disequazione* $x^2 - \dfrac{y^2}{4} < 1$

5.3 Sistemi di disequazioni

Esattamente come nel caso dei sistemi di equazioni, risolvere un sistema di disequazioni significa trovare le soluzioni comuni. Poiché, a differenza delle equazioni, le soluzioni di una disequazione sono normalmente infinite, sarà generalmente più complesso trovare le soluzioni comuni, e le rappresentazioni grafiche potranno essere di grande aiuto.

5.3.1 Sistemi in una incognita

Esempio. $\begin{cases} 2x - 1 \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}$.

Si risolvono separatamente le due disequazioni ottenendo $x \leq 1/2$ per la prima e $x < 1 \vee x > 4$ per la seconda. A questo punto si costruisce un grafico come nella figura 5.11, dal quale è facile dedurre che le soluzioni del sistema sono costituite dall'insieme

$$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

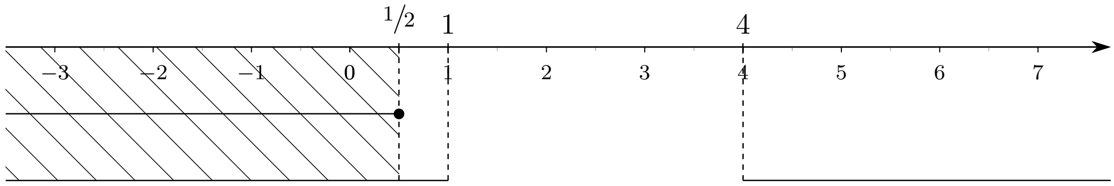


Figura 5.11 *Grafico per un sistema di disequazioni in una incognita*

5.3.2 Sistemi in due incognite

Per i sistemi in due incognite si procede in maniera simile, rappresentando nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni di ciascuna delle disequazioni e poi trovando le parti comuni. Come già per le equazioni non sarà possibile in generale esplicitare analiticamente l'insieme delle soluzioni: la soluzione grafica sarà essenziale.

Esempio. $\begin{cases} x^2+y^2-2x>0 \\ x-y-2>0 \end{cases}.$

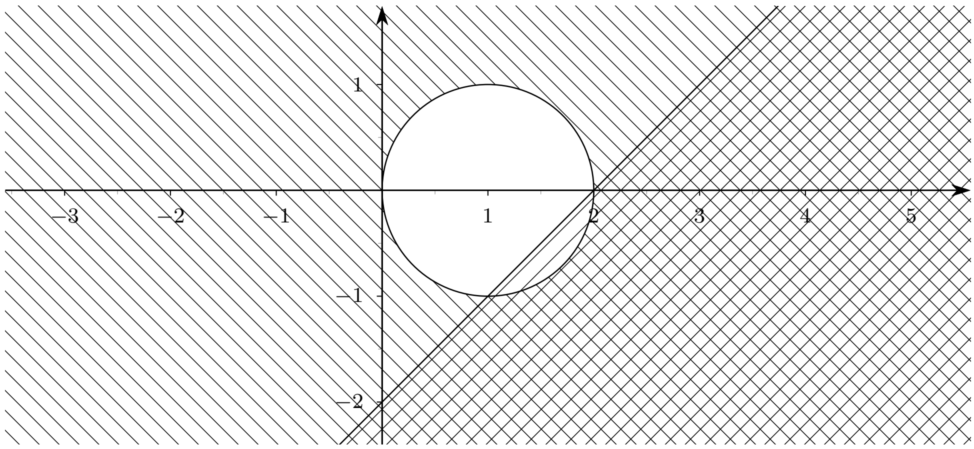


Figura 5.12 *Grafico per un sistema di disequazioni in due incognite*

L'insieme delle soluzioni è costituito dalla parte di piano dove si incrociano i due riempimenti obliqui, con l'esclusione sia dell'arco di circonferenza che delle due parti di retta.

5.4 Disequazioni scomponibili in fattori

Supponiamo di avere una disequazione (in una o due incognite) ridotta a forma normale, cioè del tipo

$$f(x) \lesseqqgtr 0, \quad f(x,y) \lesseqqgtr 0\,.$$

Se il primo membro non è di uno dei tipi già visti (cioè di primo e secondo grado) si può provare a scomporre in fattori e poi utilizzare la *regola dei segni* per risolvere la disequazione. La stessa tecnica si applica se si hanno disequazioni fratte. Precisamente si determina il *segno* di ciascuno dei fattori (insieme di positività, insieme di negatività, insieme dei punti ove si annulla) e poi si determina il segno del prodotto (o del quoziente). Per facilitare le conclusioni conviene utilizzare opportune rappresentazioni grafiche, in particolare nel caso di disequazioni in una incognita, come si vedrà sugli esempi.

Esempi.

– $(x^2 - 1)(x - 2) > 0$. Rappresentando graficamente la parabola $y = x^2 - 1$ si verifica subito che il fattore $x^2 - 1$ è positivo per $x < -1$ e per $x > 1$, è negativo per $-1 < x < 1$, si annulla per $x = \pm 1$. Per il fattore $x - 2$ è facile concludere che è positivo per $x > 2$, negativo per $x < 2$, si annulla per $x = 2$. Se si costruisce con questi dati il grafico della figura 5.13, si può concludere facilmente.

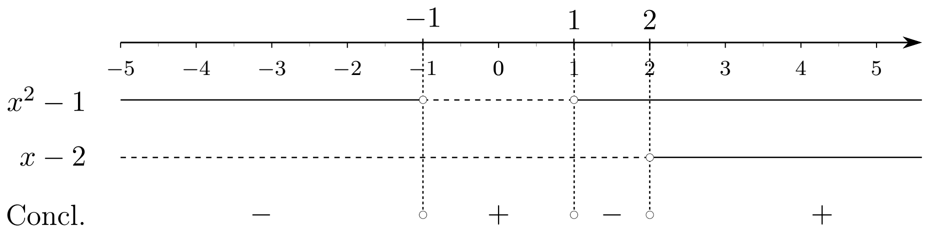


Figura 5.13 *Grafico di segno per la disequazione* $(x^2 - 1)(x + 2)$

Si noti che abbiamo usato

- una linea continua per indicare le parti dove ciascun fattore è positivo;
- una linea tratteggiata per indicare le parti dove ciascun fattore è negativo;
- uno 0 per indicare i punti dove ciascun fattore si annulla.

La prima linea serve da riferimento per riportare i vari "caposaldi", l'ultima linea contiene le conclusioni (sulla base della regola dei segni), e qui abbiamo usato esplicitamente i segni $+$ e $-$, oltre allo zero. Sulla linea dei caposaldi abbiamo riportato anche la graduazione; in realtà la cosa non è necessaria e non serve nemmeno rispettare le unità di misura, l'unica cosa che conta è l'ordine dei caposaldi.
Come già accennato, la figura 5.13 permette di concludere che la disequazione proposta è verificata per

$$x \in]-1, 1[\cup]2, +\infty[\,.$$

Si noti che per risolvere la disequazione $(x^2 - 1)(x + 2) < 0$ *avremmo potuto utilizzare lo stesso grafico*, senza alcuna variazione e avremmo concluso che $(x^2 - 1)(x + 2) < 0$ è verificata per

$$x \in]-\infty, -1[\cup]1, 2[.$$

Stesse considerazioni per le disequazioni $(x^2 - 1)(x + 2) \leq 0$ e $(x^2 - 1)(x + 2) \geq 0$ che avrebbero avuto, rispettivamente, come insieme delle soluzioni

$$]-\infty, -1] \cup [1, 2]\,,$$

e

$$[-1, 1] \cup [2, +\infty[\,.$$

– $\dfrac{x^2 - 1}{x + 2} \geq 0$. La risoluzione di questa disequazione può utilizzare lo stesso grafico della precedente (la regola dei segni per un prodotto o per un quoziente è la stessa!); l'unica differenza consiste nel fatto che bisogna prestare attenzione al fatto che il fattore $x + 2$ ora sta al denominatore è quindi *deve essere diverso da zero*. Si può introdurre uno speciale simbolo (per esempio una $\times$) per indicare che il valore $x = 2$ deve andare escluso. Per evitare errori conviene indicarlo già esplicitamente nella linea dei caposaldi. Il grafico è riportato in figura 5.14.

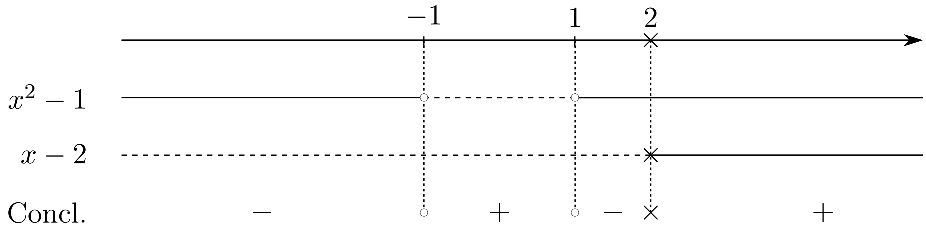


Figura 5.14 *Grafico di segno per la disequazione* $(x^2-1)/(x+2) \geq 0$

La disequazione proposta è verificata per

$$x \in [-1,1] \cup]2,+\infty[.$$

- $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-2y} \geq 0$. Si procede a trovare il segno del numeratore e del denominatore, rappresentando il risultato nel piano. Successivamente si trova il segno del quoziente con la regola dei segni, esattamente come nel caso di una sola variabile: naturalmente le soluzioni saranno un sottoinsieme del piano che, di solito, non potrà essere descritto analiticamente. Le figure 5.15 e 5.16 evidenziano gli insiemi di positività del numeratore e del denominatore rispettivamente; le regioni non evidenziate sono gli insiemi di negatività, le retta e la circonferenza sono i punti dove il numeratore e il denominatore si annullano e, naturalmente, questi ultimi andranno esclusi. In ciascuna delle figure è rappresentata anche la curva relativa all'altra, per un utile confronto. La figura 5.17 evidenzia l'insieme delle soluzioni della disequazione, da cui va esclusa l'intera circonferenza. Si noti in particolare che i due punti di intersezione tra la retta e la circonferenza non fanno parte dell'insieme delle soluzioni.

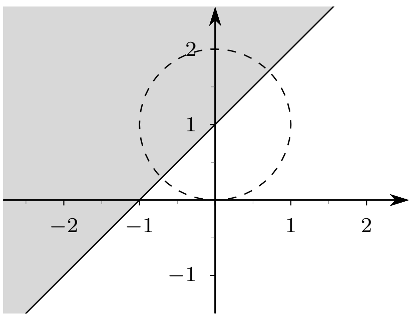


Figura 5.15 $x-y+1>0$

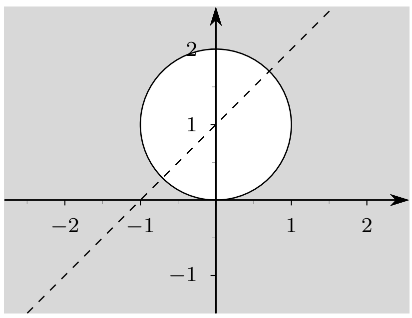


Figura 5.16 $x^2+y^2-2y>0$

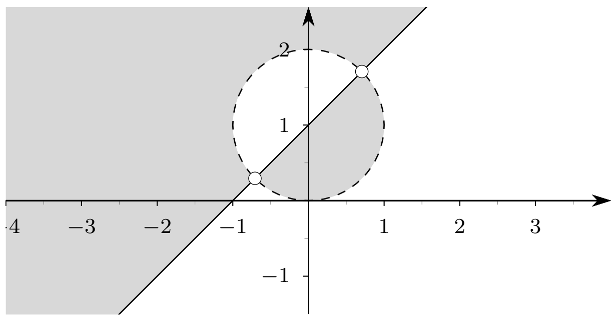


Figura 5.17 $\dfrac{x-y+1}{x^2+y^2-2y} \geq 0$

5.5 Disequazioni con radicali

Come già le equazioni con radicali, anche le disequazioni con radicali sono abitualmente di difficile risoluzione. Tra quelle con radici quadrate ci occuperemo qui solo dei due tipi più importanti e frequenti nelle nostre applicazioni:

1. $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ (oppure $\sqrt{f(x)} > g(x)$);
2. $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ (oppure $\sqrt{f(x)} < g(x)$).

Per risolvere le disequazioni del primo tipo si considera l'unione delle soluzioni di due sistemi:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \left(\text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}\right).$$

Per risolvere le disequazioni del secondo tipo si ricorre invece al seguente sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \leq g(x) \end{cases}, \quad \left(\text{oppure} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f^2(x) < g(x) \end{cases}\right).$$

Esempi.

– $\sqrt{x^2 - 9x + 14} > x - 8$. Si procede scrivendo e risolvendo i due sistemi, come indicato.

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 \geq 0 \\ x - 8 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 - 9x + 14 > (x-8)^2 \\ x - 8 \geq 0 \end{cases}.$$

Il primo sistema risulta verificato per $x \leq 2 \vee 7 \leq x < 8$, il secondo per $x \geq 8$. L'unione dei due è dunque verificata per $x \leq 2 \vee x \geq 7$.

– $\sqrt{4x^2 - 13x + 3} < 2x - 3$. Scrivendo il sistema di tre equazioni indicato sopra si trova:

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 3 \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 13x + 3 < (2x-3)^2 \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ottiene $x \geq 3$, che è la soluzione della disequazione data.

Una disequazione che presenti un solo radicale di indice dispari (in particolare di indice 3), si risolve facilmente isolando il radicale ed elevando alla potenza uguale all'indice della radice: si tratta dunque di un problema formalmente più semplice che non il caso delle equazioni con radici quadrate.

Esempio. $\sqrt[3]{x^2 + 7} > 2$. Elevando al cubo si ottiene, semplificando, $x^2 - 1 > 0$, che ha per soluzioni $x < -1 \vee x > 1$.

5.6 Esercizi

Esercizio 5.1. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $x^2 + 3x + 2 > 0$;
2. $-x^2 - 3x + 2 < 0$;
3. $4 - x^2 > 0$;
4. $x^2 - x + 6 < 0$;
5. $(x^2 + 2x - 8)(x + 1) > 0$;

6. $(x^2-2)(x+1)(1-x) \geq 0$;
7. $x(x^2+2)(2x-1) < 0$;
8. $\dfrac{x+1}{x^2+1} < 0$;
9. $\dfrac{2x-8}{1-x-x^2} > 0$;
10. $\dfrac{x^2-4}{x+3} \leq 0$;
11. $x^3-27 \geq 0$;
12. $2-x^3 < 0$;
13. $x^3(x^2-1)(2-x^2) \leq 0$;
14. $\dfrac{x-9}{x^3+1} \geq 0$;
15. $\dfrac{8-x^3}{x^3+9} \leq 0$.

Esercizio 5.2. *Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.*

1. $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x+1>0 \\ x^2+2x-8>0 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x+1<0 \\ x^2+1<0 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} 2x-8>0 \\ 1-x-x^2<0 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} (1-3x^2)(x-2)<0 \\ (2+x)(1-x)>0 \end{cases}$;
6. $\begin{cases} 3x-2<0 \\ 2x(3-x)>0 \end{cases}$;
7. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}<0 \\ \dfrac{2x+1}{x(2-3x)}>0 \end{cases}$;
8. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x}<0 \\ \dfrac{x+1}{1-x}>0 \end{cases}$.

Esercizio 5.3. *Risolvere le seguenti disequazioni.*

1. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1-x}} < 1$;
2. $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}} > x+1$;
3. $\sqrt{1-x^2} < 1-x$;

4. $\sqrt{x} < x$;

5. $\sqrt{1-x^2} > x^2$;

6. $\sqrt{x(x+1)} < 1-x$.

Esercizio 5.4. *Determinare, per via grafica, le soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni in due incognite.*

1. $\begin{cases} y-x+1>0 \\ 2x-3 \le 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x+2y-1>0 \\ 2x+3y+2 \ge 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ y+1>0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x-8>0 \\ 1-x<0 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} y-1>0 \\ y+3<0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x+y-1>0 \\ x-2y \le 0 \\ x+y<0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2+y^2-1<0 \\ x-y \le 0 \\ x+3y>0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-4>0 \\ x+y+2 \le 0 \\ x-2y-1<0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2-9<0 \\ y-x+2 \le 0 \\ x+1>0 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2+y^2-4>0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le 4 \\ y-2x<0 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2-1<0 \\ x^2+(y-2)^2 \le 40 \\ x+y<0 \end{cases}$;