$\mathbb{K}[X]$ Spazio dei polinomi nell'indeterminata X sul campo $\mathbb{K}$

Es $f = 3X^3 - X^2 + \frac{1}{2}X + 1 \in \mathbb{R}[X]$

$$\underbrace{1, X, X^2, X^3, X^4, \dots}_{\text{base}}$$

$\mathbb{K}[X]$ sp. vett. non finitamente generato

$\mathbb{K}[X]_d = \{ f \in \mathbb{K}[X] \mid \deg f \leq d \} \subset \mathbb{K}[X]$

$d \in \mathbb{N}$ sottosp. vett. di $\mathbb{K}[X]$

$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]_d$, $a_i \in \mathbb{K}$

$\{1, X, X^2, \dots, X^d\}$ base per $\mathbb{K}[X]_d$

$\dim \mathbb{K}[X]_d = d+1$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \overset{def}{=} \{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \}$ spazio delle successioni reali

$$f = (f_0, f_1, f_2, \dots) \qquad e_i \in \mathbb{R}$$

$$f_i = f(i) \quad , i \in \mathbb{N}$$

$$f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{f+g} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f+g)(i) \overset{def}{=} f(i) + g(i)$$

$$(f_0, f_1, f_2, \dots) + (g_0, g_1, g_2, \dots) =$$

$$= (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\lambda f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\lambda f)(i) = \lambda f(i)$$

$$\lambda(f_0, f_1, f_2, \dots) = (\lambda f_0, \lambda f_1, \lambda f_2, \dots)$$

$\rightsquigarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sp. vett. reale

$\circledast$

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 1, 0, \dots) \\ e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots) \\ \vdots \\ e_k = (0, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow \text{ k-esimo}}{1}, 0, \dots) \\ \vdots \end{cases}$$

lin. indip.

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k = 0$$

$$\underline{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots) = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ <u>non finit. generato</u>!

$(1, 1, 1, \dots)$ non è comb. lin. di $e_1, e_2, e_3, \dots$

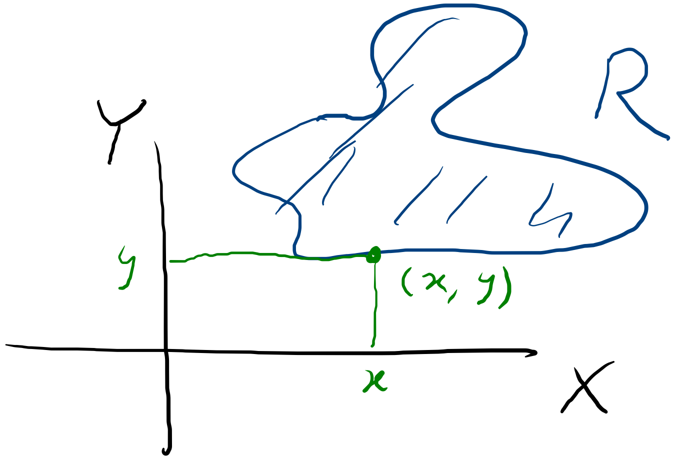
<u>non è base!</u>

Relazioni

X, Y insiemi

Def Una relazione binaria tra X e Y è un sottoinsieme

$$R \subset X \times Y$$



Se $(x,y) \in R$ scriviamo

$$x R y$$

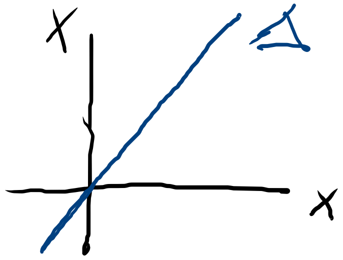
$$x R y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x,y) \in R$$

↑ notazione

Es: $=$

$$\Delta \subset X \times X$$

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$$ diagonale di $X \times X$.



R relazione su X

$R \subset X \times X$

<u>Def</u> R è detta:

1) <u>riflessiva</u> se $\forall x \in X$, xRx $\quad (\Longleftrightarrow \Delta \subset R)$

2) <u>simmetrica</u> se $xRy \Longrightarrow yRx$

3) <u>transitiva</u> se xRy e $yRz \Longrightarrow xRz$

<u>Def</u> $R \subset X \times X$ è detta relazione d'equivalenza se è: riflessiva, simmetrica e transitiva.

<u>Es</u> $=$ è relaz.. d'equivalenza

Una relazione d'equivalenza (spesso) si denota con $\sim$, $\equiv$

<u>Es</u> $x \sim y$ $\quad$ ($x \equiv y$)

Sia $\sim$ una relaz. d'equivalenza su X $\quad$ ($\sim \subset X \times X$) $\quad$ <u>rifl.</u>, simm., transit.

$$x \in X \rightsquigarrow \underline{[x]} \overset{def}{=} \{ y \in X \mid y \sim x \} \subset X$$

classe di equivalenza di x.

in relazione o equivalente a x.

$$x \in [x] \quad \forall x \in X \implies [x] \neq \emptyset \quad \forall x \in X.$$

Prop. $\sim$ relaz. d'equivalenza su X

$\forall x, y \in X$ si ha: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \iff x \sim y \iff [x] = [y]$

oppure $[x] \cap [y] = \emptyset \iff x \not\sim y$

non è equiv.

Dim $\exists\, u \in [x] \cap [y] \iff \exists\, u \in X$ t.c. $u \sim x$ e $u \sim y \iff$

$\exists\, u \in X$ t.c. $x \sim u$ e $u \sim y \iff x \sim y$

transitiva

$x \sim y \iff \forall u \in X \ (u \sim x \iff u \sim y)$

$\implies$

$\impliedby$

$$\bigcup_{x \in X} [x] = X$$

Le classi di equivalenza formano una partizione di X

(partizione di un insieme: famiglia di sottoinsiemi di X a due a due disgiunti, non vuoti, la cui unione $= X$)

Def Sia $\sim$ rel. d'equivalenza su X. Poniamo

$$X/\sim \; = \{ [x] \mid x \in X \}.$$

$X/\sim$ è detto insieme quoziente di X rispetto $\sim$.

Funzioni

Siano X, Y insiemi

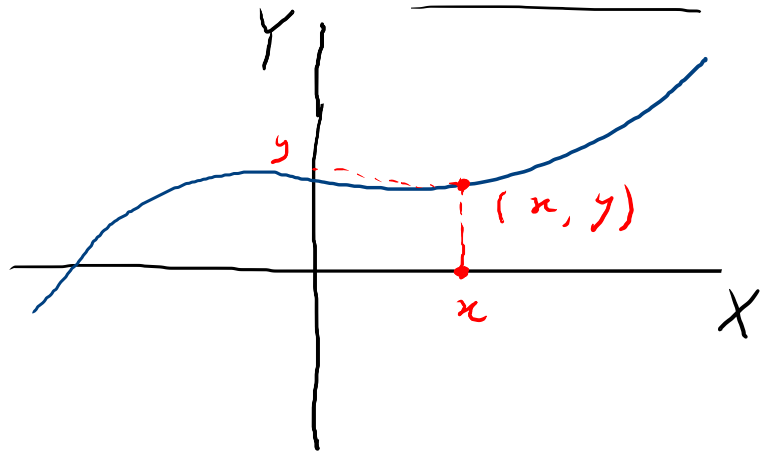
Una funzione f da X a Y è una terna

$\underline{f = (X, Y, G_f)}$ dove $G_f \subset X \times Y$ è

una relazione t.c.

$\boxed{\forall x \in X \quad \exists ! \, y \in Y \quad \text{t.c.} \quad x G_f y}$ $(\Leftrightarrow (x,y) \in G_f)$

Si denota con $\underline{f : X \longrightarrow Y}$ oppure $\underline{X \xrightarrow{f} Y}$



X è detto dominio di f

Y è detto codominio di f

G_f è detto grafico di f.

$X \neq \emptyset \Rightarrow Y \neq \emptyset$

$f : X \longrightarrow Y$

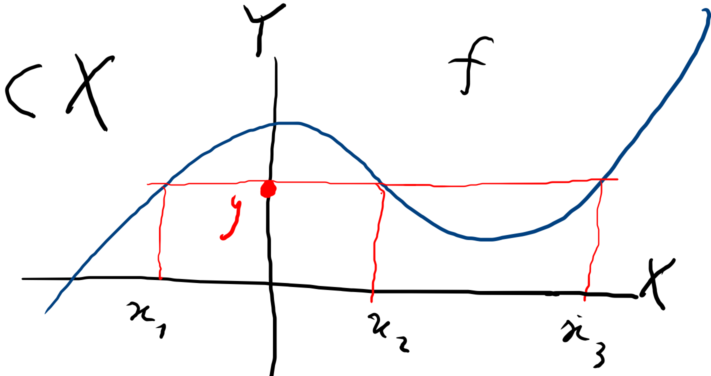
$x \in X \rightsquigarrow \exists !\, y \in Y$ t.c. $x \, G_f \, y$ Poniamo $f(x) = y$

$x \, G_f \, f(x)$ notazione

$x \in X \rightsquigarrow f(x) \in Y$

$y \in Y \rightsquigarrow f^{-1}(y) \overset{def}{=} \{ x \in X \mid f(x) = y \} \subset X$

preimmagine o immagine inversa di y



$f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, x_3\} \subset X$

$B \subset Y \rightsquigarrow f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subset X$

$A \subset X \rightsquigarrow f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \} \subset Y$

immagine di A

$\underline{\mathrm{Im}\, f} \overset{def}{=} \underline{f(X)} \subset Y$

$f : X \longrightarrow Y$ è detta

$x \in X$

$x \xmapsto{f} f(x)$

$y = f(x)$

$x \xmapsto{f} y$

1) iniettiva se $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

2) suriettiva se $f(X) = \text{Im}\, f = Y$

3) biiettiva (o biunivoca) se f è iniettiva e suriettiva.

biiezione

Date $X \xrightarrow{f} Y$ e $Y \xrightarrow{g} Z$ (X, Y, Z insiemi, f, g funzioni)

$\rightsquigarrow \quad g \circ f : X \longrightarrow Z$

$$(g \circ f)(x) \overset{def}{=} g(f(x))$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right=40, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

funzione = applicazione = mappa

X insieme, $\sim$ relaz. d'equivalenza su X

$\rightsquigarrow \quad X/\sim \; = \{[x] \mid x \in X\}$

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

<u>mappa quoziente</u>

(proiezione canonica)

π è suriettiva

<u>OSS</u> π iniettiva $\iff$ $\sim$ è <u>uguaglianza</u>

Data $f : X \longrightarrow Y$ $\rightsquigarrow$ $\sim_f$ relazione su X

funzione

$$x \sim_f y \overset{\text{def}}{\iff} f(x) = f(y)$$

$\sim_f$ è relaz. d'equivalenza ⊛

$\sim_f$ transitiva: $x \sim_f y$ e $y \sim_f z \overset{(\text{def})}{\iff} f(x) = f(y)$ e $f(y) = f(z)$

$$\implies f(x) = f(z) \overset{(\text{def})}{\implies} x \sim_f z.$$