22 ottobre

Esercizio

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Dim Ovviamente sappiamo $|L_1 - L_2| \geq 0$. Sappiamo anche che $|L_1 - L_2| = 0 \Rightarrow L_1 - L_2 = 0$ $\Leftrightarrow L_1 = L_2$

Qui dobbiamo dimostrare che

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |L_1 - L_2| = 0.$$

Supponiamo per assurdo che esista una coppia $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ con $|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ e con $|L_1 - L_2| > 0$.

Sappiamo che $\exists \quad \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$ con $0 < \varepsilon_0 < |L_1 - L_2|$

(Ad esempio, supponiamo che $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ con $0 < \varepsilon_0 < |L_1 - L_2|$. Oppure, basterebbe ad esempio scegliere

$$\varepsilon_0 = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0 \,)$$

Ma siccome

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{segue}$$

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon_0 < |L_1 - L_2|$$

$$\Longrightarrow 0 < |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2| \quad \text{assurdo.}$$

---

2) Se

$$|L_1 - L_2| < 2\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

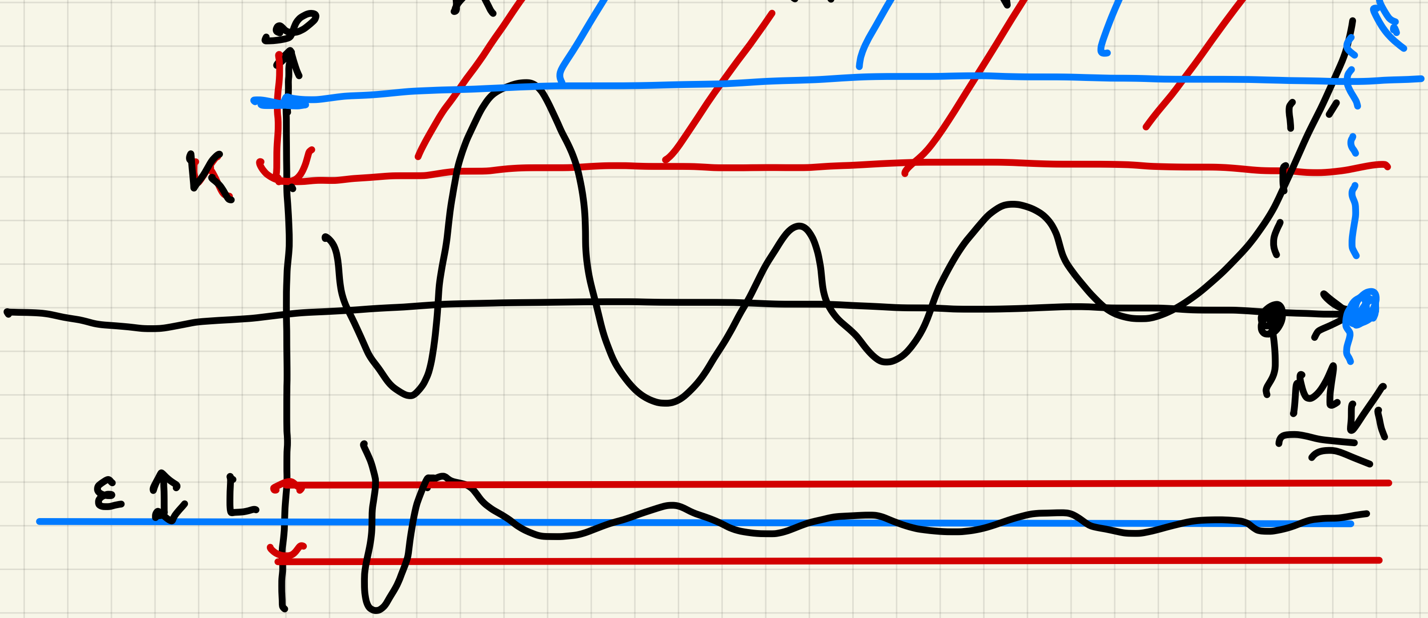
$$\Longrightarrow \quad |L_1 - L_2| < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

<u>Dim</u> Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\frac{\varepsilon}{2} > 0$

$$\Longrightarrow \quad |L_1 - L_2| < 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Def (di $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) Sia $f : X \to \mathbb{R}$, con $\sup X = +\infty$. Si dice che $+\infty$ è il limite di f a $+\infty$ infinito, e si scrive $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, se si ha

$$\forall K \quad \exists M_K \text{ t.c. } x > M_K \text{ e } x \in X \Rightarrow f(x) > K$$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Esempio Sia $b > 1$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} b^n = +\infty.$$

Dim Siccome $b > 1$ segue che $a := b-1 > 0$.

$$b = 1+a$$

$$b^n = (1+a)^n \geq 1 + na$$

Sia $K \in \mathbb{R}$ arbitrario. Risolviamo

$$1 + na > K \iff n > \frac{K-1}{a}$$

Se $n > \frac{K-1}{a}$

$$b^n \geq 1 + na > K$$

Conclusione: abbiamo dimostrato che

$$\forall K \ \exists M_K \text{ t.c. } n > M_K \Longrightarrow b^n > K$$

$$M_K = \frac{K-1}{a}$$

Esercizio. Definire $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Regole dei limiti

In $\overline{\mathbb{R}}$ consideriamo una naturale estensione di somma e prodotto.

($+\infty - \infty$ indefinito)

$$a + (+\infty) = +\infty \quad \text{se } a > -\infty$$

$$a + (-\infty) = -\infty \quad \text{se } a < +\infty$$

($+\infty \cdot 0$ indef.)

$$a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$0 \cdot (\pm\infty)$ è indefinito

$+\infty - \infty$ " "

Teor Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$,
e siano $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora abbiamo le seguenti regole

1) (Reg. somma) $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)+g(x)\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x) = a+b$$

(salvo che $(a,b) = (+\infty, -\infty)$ o $(-\infty, +\infty)$)

2) (R. prodotto)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \lim_{x\to+\infty} g(x) = ab$$

(salvo nel caso $(a,b) = (\pm\infty, 0)$ o $(0, \pm\infty)$)

3) Supponiamo $g(x) \neq 0 \ \forall x$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{a}{b}$$

(salvo $b = 0$, $(a,b) = (\pm\infty, \pm\infty)$)
4 casi distinti

$$\frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \quad \frac{1}{+\infty} = +\infty$$ o non è definito

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - x^2 + 1\right) \text{" = "} (+\infty)^3 - (+\infty)^2 + 1$$

$$= +\infty - \infty + 1 \quad \textit{indefinito}$$

$$x^3 - x^2 + 1 = x^3\left(1 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= +\infty\left(1 - \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

In generale $\lim_{x\to+\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\right)$ $a_n \neq 0$

$$= \lim_{x\to+\infty} a_n x^n = a_n \cdot (+\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6 + x - 1}{-x^5 + x^3 + 6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^6}{-x^5}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -2x = -2\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6+x-1}{-x^5+x^3+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6}{-x^5}$$

$$\frac{2x^6+x-1}{-x^5+x^3+6} = \frac{2x^6\left(1+\frac{x}{2x^6}-\frac{1}{2x^6}\right)}{-x^5\left(1+\frac{x^3}{-x^5}+\frac{6}{-x^5}\right)}$$

$$= \frac{2x^6}{-x^5} \frac{\left(1+\frac{1}{2x^5}-\frac{1}{2x^6}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^5}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^6}{-x^5}\right) \frac{\left(1+\frac{1}{2x^5}-\frac{1}{2x^6}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6}{-x^5} \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x^5}-\frac{1}{2x^6}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^6}{-x^5} = -\infty$$

<u>Esercizio</u> Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ con

$\sup X = \infty$ e sia $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$

Esercizio Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ con $\sup X = \infty$ e sia $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) g(x)$ esiste

se e solo se $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste

e, se esistono, i due limiti sono uguali.

$$a_n \neq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

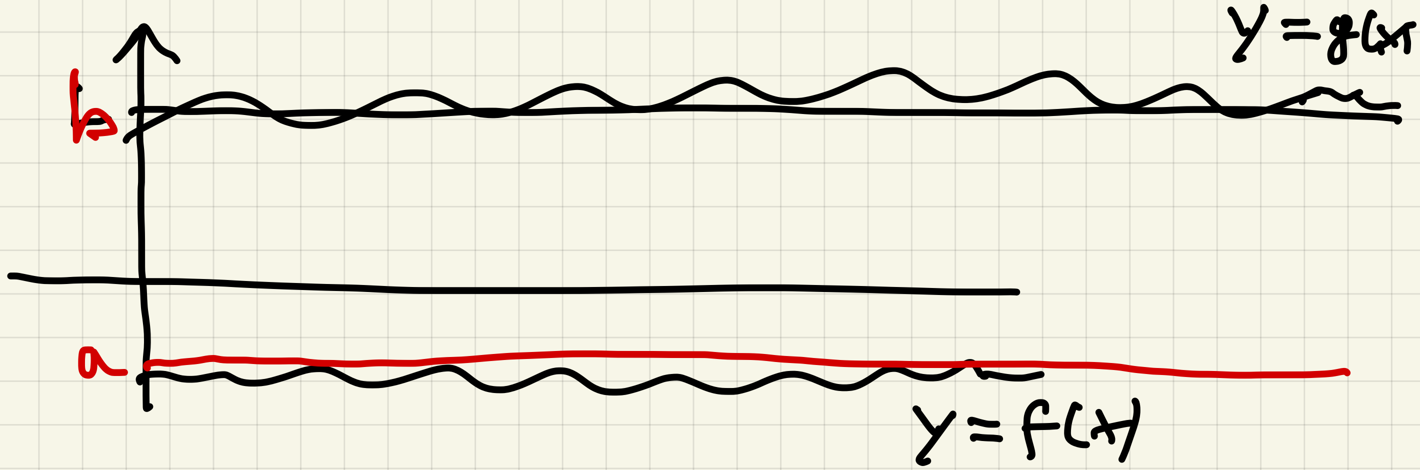
Teor (del confronto) Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$ e siano

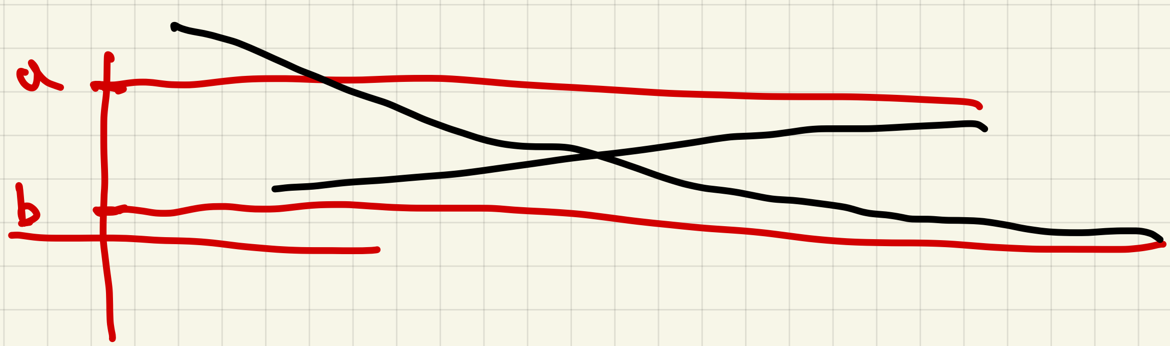
$$a = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Si abbia inoltre $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$.

Allora $\quad a \leq b$





Teor (dei Carabinieri)

Siano $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$

tali che $f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$.

Allora se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = L$,

$L \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha anche

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

Applicazione

Dimostriamo che $\lim_{n \to \infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

$\forall \; b \in \mathbb{R}_+$.

Per cominciare assumeremo $b > 1$.

Allora $b^{\frac{1}{n}} > 1$

Poniamo $a_n = b^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$.

$$\boxed{b^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n}$$

Notare che $\lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \iff \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$$\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b = (1 + a_n)^n \geq 1 + n a_n$$

$b \geq 1 + n a_n$

$$\frac{b-1}{n} \geq a_n \geq 0$$

$$\frac{b-1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \qquad 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

I Carab. implicano che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Esercizio dimostrare lo stesso con per $0 < b < 1$.