$X \quad \sim$ rel. d'equiv. $\rightsquigarrow \quad X/\sim \; = \{ [x] \mid x \in X \}$

$\pi : X \longrightarrow X/\sim$ mappa quoziente

$x \longmapsto [x]$ (o proiezione canonica sul quoziente)

$f : X \longrightarrow Y \quad \rightsquigarrow \quad \sim_f$ rel. d'equivalenza indotta su X

diagramma commutativo

$$x \sim_f y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \underline{f(x) = f(y)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$x \mapsto f(x)$

$[x]$

$\bar{f}$ funzione indotta

$$\boxed{\bar{f}([x]) \overset{def}{=} f(x)}$$

Se $x' \in [x] \quad (\Longleftrightarrow [x'] = [x]) \Longrightarrow x \sim_f x'$

$\Longleftrightarrow f(x') = f(x)$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_4"'] \arrow[dr, "f_2 \circ f_1", "f_3 \circ f_4"'] & B \arrow[d, "f_2"] \\
C \arrow[r, "f_3"'] & D
\end{tikzcd}
$$

diagramma commutativo $\iff$ tutti i percorsi danno lo stesso risultato

$$f_2 \circ f_1 = f_3 \circ f_4$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$g \circ f : X \longrightarrow X$

$f \circ g : Y \longrightarrow Y$

Se $g \circ f = id_X$
g è inversa sinistra di f

Se $f \circ g = id_Y$
g è detta inversa destra di f.

Dato un insieme $X \rightsquigarrow id_X : X \longrightarrow X$

$$x \longmapsto x$$

↑ funzione identica o identità di X

OSS inversa destra / sinistra non sempre esiste e se esiste non è detto che sia unica.

Prop. $f : X \longrightarrow Y$ ammette

1) inversa destra $\Longleftrightarrow$ f è suriettiva $\boxed{\Longleftarrow}$ (insidiosa)

2) inversa sinistra $\Longleftrightarrow$ f è iniettiva (semplice)

3) inversa destra e sinistra $\Longleftrightarrow$ f è biiettiva

in tal caso l'inversa destra è uguale all'inversa sinistra ed è unica. Si chiama inversa di f (è unica).

$$\boxed{f : X \longrightarrow Y \text{ è invertibile (ammette inversa)} \Longleftrightarrow f \text{ biiettiva}}$$

L'inversa di f (se esiste) si denota con $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ (biiettiva)

$f^{-1} \circ f = id_X \qquad f \circ f^{-1} = id_Y$.

Def

X è detto insieme infinito se $\exists\, X' \subsetneq X$ e $\exists$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X' \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

$f : X \longrightarrow X'$ funzione biiettiva ($\Longleftrightarrow \exists\, f : X \longrightarrow X$ iniettiva ma non suriettiva.)

$X' \subset X \rightsquigarrow i_{X'} : X' \hookrightarrow X$

$i_{X'}(x) = x$

appl. d'inclusione

$f : X \longrightarrow Y$

$A \subset X$, $B \subset Y$

$f(A) \subset B$

$\rightsquigarrow\ f|_{A,B} : A \longrightarrow B$ restrizione di f ad A e B.

$f|_{A,B}(x) = f(x)$ $\qquad (f| \quad)$

Es. $\mathbb{N}$ è infinito

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 2n$$

$f(n) = f(m) \Longrightarrow 2n = 2m \Longrightarrow n = m$ (iniettiva)

f non suriettiva ($\nexists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) = 1$).

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ biiettiva

$f(x) = 2x$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} x$

inversa

$X' \subset X$ e X' infinito $\Longrightarrow X$ infinito

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = e^x$.

Sia V spazio vett. su $\mathbb{K}$ $\left(\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \ldots \right)$

$U \subset V$ sottospazio vett. di V

$U \rightsquigarrow \sim_U$ rel. d'equiv. su V

$$v \sim_U w \overset{def}{\iff} v - w \in U$$

1) riflessiva: $v - v = 0_V \in U \implies v \sim_U v \quad \forall v \in V$

2) simmetrica: $v \sim_U w \iff v - w \in U \iff w - v \in U \iff w \sim_U v$

3) transitiva: $v_1 \sim_U v_2$ e $v_2 \sim_U v_3 \implies \underbrace{v_1 - v_2}{} \in U$ e $\underbrace{v_2 - v_3}{} \in U \implies$

$$\implies \underbrace{(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3)}{} = \underbrace{v_1 - v_3}{} \in U \implies v_1 \sim_U v_3.$$

$$\rightsquigarrow \quad V/\sim_U =: \underline{V/U} \quad (\text{notazione})$$

$$\pi : V \longrightarrow V/U \qquad \boxed{\pi(v) = v + U}$$
$$v \longmapsto [v]$$

$$w \in [v] \iff w \sim_U v \iff w - v \in U$$
$$w - v = u \in U$$
$$\boxed{w = v + u}, \ u \in U$$

$$[v] = \{ v + u \mid u \in U \} =: \underline{v + U} \quad (\text{notazione})$$

Le classi d'equivalenza rispetto a $\sim_U$ sono sottosp. affini di V.

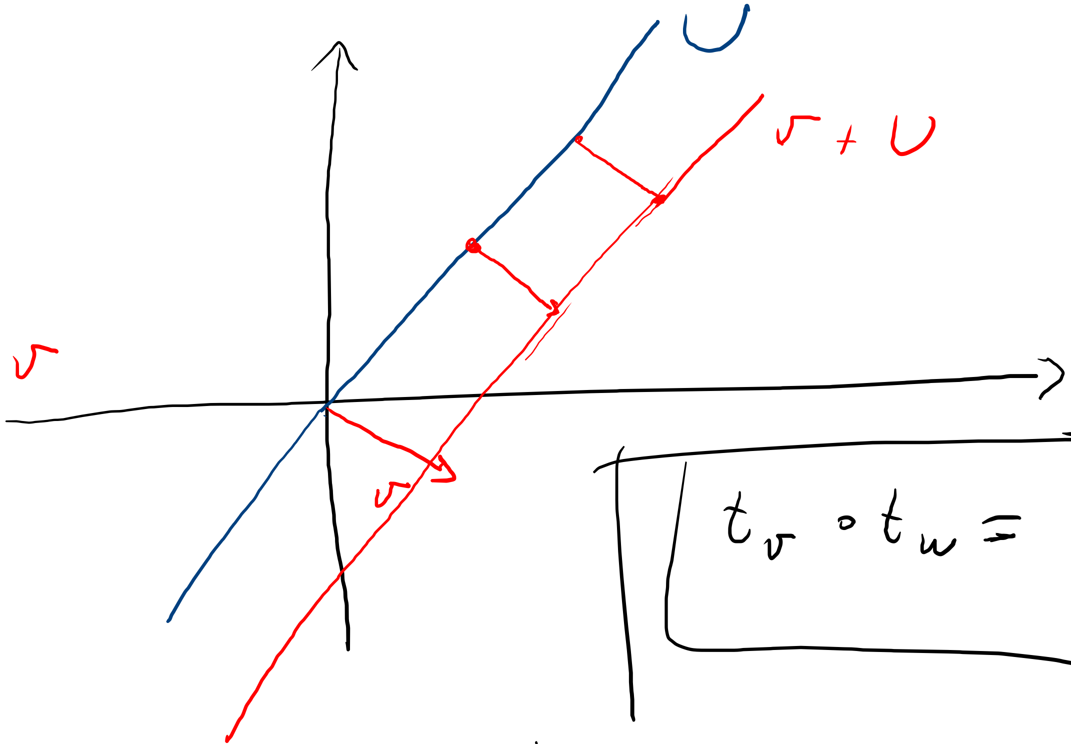
$\mathbb{R}^2$

$U = \langle v \rangle$

$v \neq 0$

$v + U$ è U traslato di v

sottospazio affine



V, $v \in V \rightsquigarrow$

$t_v : V \longrightarrow V$ traslazione (biiezione)

$t_v(w) = w + v$

$t_v(0_V) = v$ $\qquad t_v(-v) = 0_V$

$\boxed{t_{0_V} = id_V}$

$\boxed{t_v \circ t_w = t_{v+w}}$ (*)

$t_{-v} : V \longrightarrow V$ inversa di t_v

$t_{-v} \circ t_v = t_v \circ t_{-v} = id_V$ (*)

Se $U \subset V$ sottosp. vett.

Def: $t_v(U) \subset V$ sottosp. affine

Se $U \subset V$ sottosp. vett. allora si dice che U è

la giacitura dei sottospazi affini del tipo

$$t_v(U) = v + U.$$

Esercizio 2, foglio 2

$$v_1 = (1,1,0),\quad v_2 = (0,1,1),\quad \underline{v_3 = (1,0,}0) \in \mathbb{R}^3$$

$$W = L(v_1, v_2) + L(v_3) = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_3 \rangle$$

è somma diretta? SI

$$u \in L(v_1, v_2) \cap \underline{L(v_3)} = \{0\} \quad ?$$

$$u = (x, y, z)$$

$$u = \underline{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_3 v_3} = 0$$

$$(\lambda_1, \lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, \lambda_2) - (\lambda_3, 0, 0) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$u = (-1, 2, 2) \in W \quad \checkmark$

$u \overset{?}{=} t + s \quad , \quad t \in L(v_1, v_2) \quad , \quad s \in L(v_3)$

$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$\lambda_1 (1,1,0) + \lambda_2 (0,1,1) + \lambda_3 (1,0,0) = (-1,2,2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = -1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$u = u_1 + u_2$

$u_1 = (0, 2, 2)$

$u_2 = (-1, 0, 0)$

$\dim W = 3$

(Grassmann)

$\dim L(v_1, v_2) = 2$

$\dim L(v_3) = 1$

$W \subset \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow W = \mathbb{R}^3$

$$V = \mathbb{Q}^2 \oplus \mathbb{Q}^2 = \{ ((x_1, x_2), (x_3, x_4)) \mid (x_1, x_2), (x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^2 \}.$$

<u>base</u> $\{ t_1 = ((1,0),(0,0)), \ t_2 = ((0,1),(0,0)),$

$t_3 = ((0,0),(1,0)), \ t_4 = ((0,0),(0,1)) \} \in V$

5) V, W Sp Vett su $\mathbb{K}$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V, $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$$D = \{(v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m)\}$$

D genera $V \oplus W$

$\sum_{i=1}^{n} v_i = v_1 + \dots + v_n$

$u = (v, w) \in V \oplus W$, $v \in V$, $w \in W$

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$

$$u = (v, w) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0_V, w_j)$$

$\dim V \oplus W = \dim V + \dim W$