23 ottobre

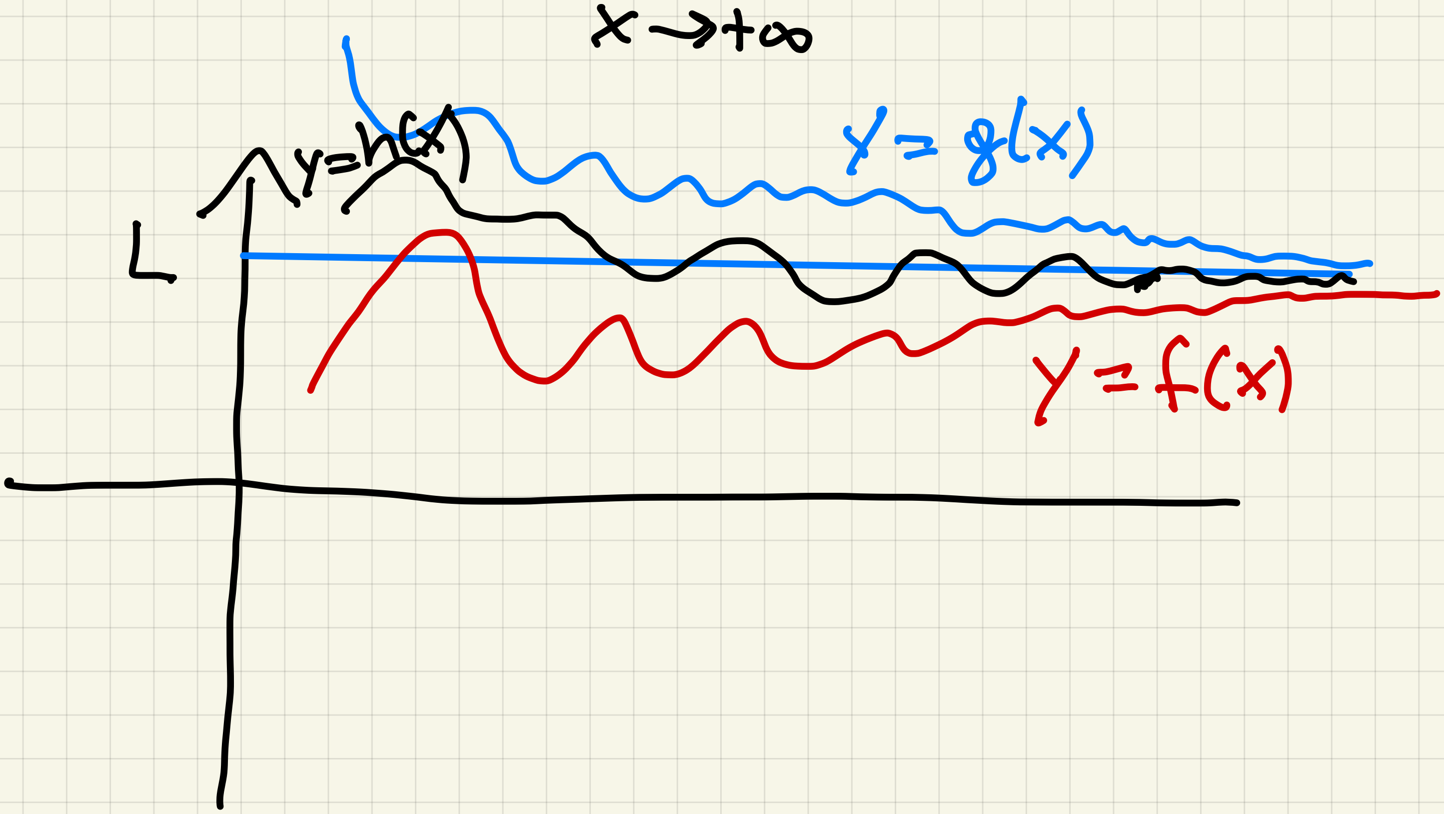
Teor (dei Carabinieri) Siano $f, g, h: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$.

Supponiamo $f(x) \le h(x) \le g(x)$ $\forall x \in X$.

Allora se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

si ha $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$.



<u>Dim</u> (con $L \in \mathbb{R}$).

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ risp. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$

significano

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_1(\varepsilon)$ t.c. $x > M_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

risp.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_2(\varepsilon)$ t.c. $x > M_2(\varepsilon) \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$.

Poniamo $M_3(\varepsilon) = \max\{M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon)\}$.

Per $x \in X$ con $\boxed{x > M_3(\varepsilon)}$

valgono

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

Abbiamo per $x > M_3(\varepsilon)$, $x \in X$,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$$

che implica

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

$\forall x \in X$ con $x > M_3(\varepsilon)$.

Conclusione: $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$.

Se $b > 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

Per $0 < b < 1$? Se $0 < b < 1$

$$\lim_{n \to \infty} b^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{b}} \right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{dove } \frac{1}{b} > 1$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

Esempio Abbiamo visto che se $b>1$ allora $\lim_{n\to\infty} b^n = +\infty$.

Verifichiamo che per $b>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

cioè b^n cresce molto più rapidamente di n per $n\to+\infty$.
Userò la notazione $b^n >> n$ per $n>>1$.

$$\frac{b^n}{n}$$

$1 < b \implies 1 < \sqrt{b} = 1 + a$ con $a > 0$.

$$\frac{b^n}{n} = \frac{\left((\sqrt{b})^2\right)^n}{n} = \frac{\left((1+a)^2\right)^n}{n}$$

$$= \frac{(1+a)^{2n}}{n} = \frac{\left((1+a)^n\right)^2}{n}$$

$$\geq \frac{(1+na)^2}{n}$$

Qui ho usato

$(1+a)^n \geq 1 + na > 0$

$\implies \left((1+a)^n\right)^2 \geq (1+na)^2$

$$+\infty > \frac{b^n}{n} \geq \frac{(1+na)^2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+na)^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\cancel{2}} a^2}{\cancel{n}}$$

$$= +\infty$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$$

<u>Esercizio</u> Verificare che

$\forall\ N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty$$

se $b>1$, cioè $b^n >> n^N$

se $n >> 1$.

Teor (limiti di funzioni monotone)

Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

1) Sia $\sup X = +\infty$. Allora

1.1) Se f è una funzione crescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup f(X)$$

$$\left(f(X) = \{ f(x) : x \in X \} \right)$$

1.2) se f è decrescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f(X)$$

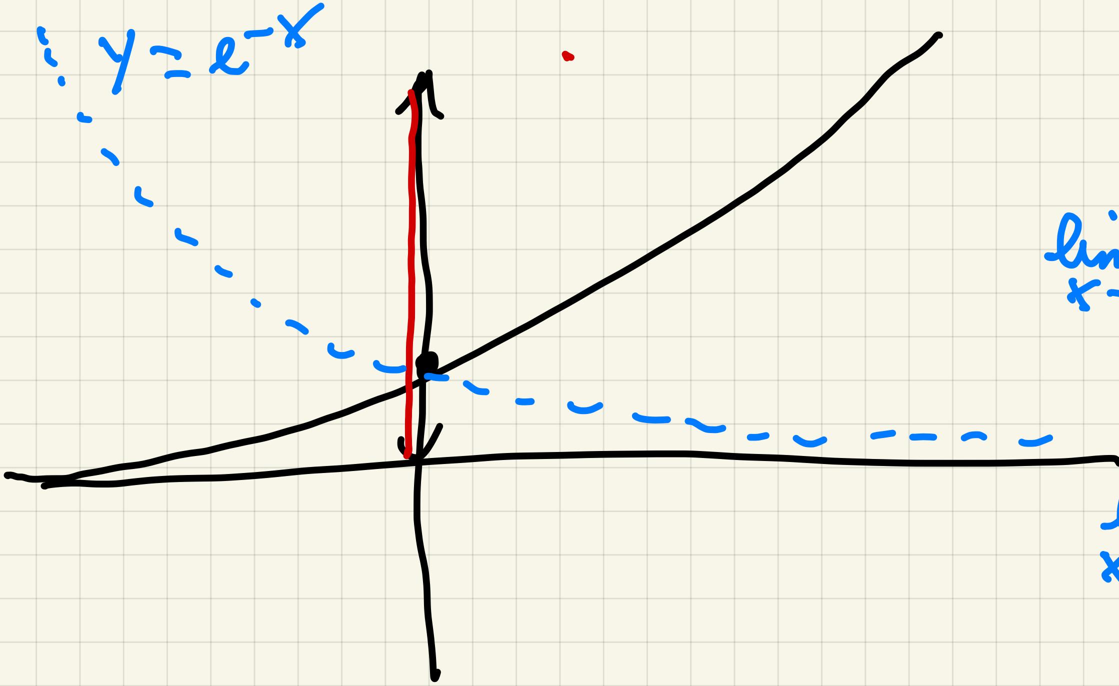
2) Se $\inf X = -\infty$ allora

2.1) Se f è crescente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf f(X)$$

2.2) Se f è decrescente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \sup f(X)$$



$y = e^x$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \inf \mathbb{R}_+ = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty$$

$$\{ e^x : x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \inf \mathbb{R}_+ = 0$$

Dim Mi limito al caso $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ per $f: X\to\mathbb{R}$ crescente, $\sup X = +\infty$.

Consideriamo il caso $c \doteq \sup f(X) < +\infty$

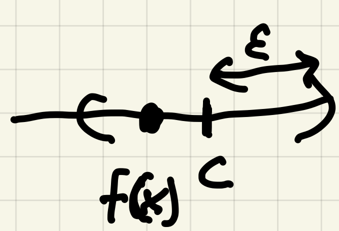
Dobbiamo dimostrare $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$.

Cioè dobbiamo dimostrare

$$* \quad \boxed{\forall \varepsilon>0 \;\; \exists\, M_\varepsilon \text{ t.c. } x>M_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-c|<\varepsilon}$$

Sia $\varepsilon>0$ qualsiasi e consideriamo $c-\varepsilon < c$. Sappiamo che esiste un elemento $y_\varepsilon\in f(X)$ con $c-\varepsilon<y_\varepsilon\le c$. Sia $x_\varepsilon\in X$ con $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$. Notiamo che per ogni $x\in X$ con $x > x_\varepsilon$ si ha

$$c-\varepsilon < f(x_\varepsilon)\le f(x)\le c$$



$$\Longrightarrow \quad |f(x)-c|<\varepsilon$$

Abbiamo dimostrato $*$ per $M_\varepsilon = x_\varepsilon$.

Numero di Neper e

Teor 1) La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è strettamente crescente.

2) ~~la~~ successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è strettamente decrescente.

Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Qui $e \in (2,3)$, è un numero irrazionale e tutte le sue potenze sono numeri irrazionali.

$$e = 2{,}718\ldots$$

Dim (parziale) Dimostriamo solo che $\left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}$ è strettamente crescente.

Sia $n \geq 2$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n\cancel{-1}\cancel{+1}}{n-1}\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} =$$

Sia $n \geq 2$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n-\cancel{1}+\cancel{1}}{n-1}\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^n}{1-\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} > \frac{1-\cancel{n}\frac{1}{n^{\cancel{2}}}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} > 1$$

$f: X \to \mathbb{R}$ $\qquad X \subseteq \mathbb{R}$

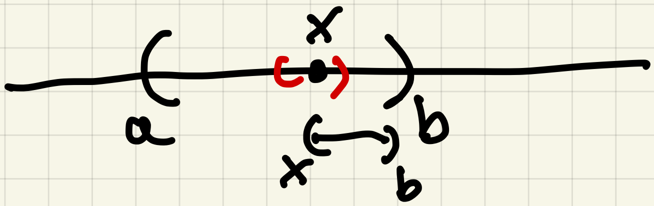
e dato un opportuno $x_0 \in \mathbb{R}$, vogliamo dare un senso a $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$.

<u>Def</u> (Punto di accumulazione) Dato $X \subseteq \mathbb{R}$ un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice un punto di accumulazione per X se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in X \text{ t.c. } 0 < |x - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Es. Se considero un qualsiasi intervallo di estremi $a, b \in \mathbb{R}$, il corrispondente insieme di punti di accumulazione dell'intervallo è $[a, b]$.

$X' =$ insieme dei punti di acc. di X.



$(a,b)' = [a,b]$

In effetti se $x \in (a,b)$ allora $x \in X'$. Infatti $\forall\, \varepsilon > 0$

$$(x, x+\varepsilon) \cap (x, b) = (x, \min(x+\varepsilon, b)) \subseteq (x,b) \subseteq (a,b)$$

esistono infiniti punti di (a,b), distinti da x, che distano da x meno di $\varepsilon \Rightarrow x \in (a,b)'$

Nella definizione di limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

abbiamo utilizzato

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, M_\varepsilon \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad E = \mathbb{R}_+} \tag{1}$$

Dimostrate che (1) è equivalente a quanto segue, se $E \subseteq \mathbb{R}_+$ con $\inf E = 0$

$$\boxed{\forall \varepsilon \in E \ \exists\, M_\varepsilon \text{ t.c. } x > M_\varepsilon \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon} \tag{2}$$