prova del 4/02/2019

Esercizio 1

Domanda 1.1

$\boxed{\text{SD } 2019/20}$

$2\cos(50t + \frac{\pi}{6})$

Si consideri un segnale sinusoidale

$$r(t) \; = \; 2\cos(50\,t)\cdot 1(t)$$

e si supponga di campionarlo con una pulsazione di campionamento pari a

aliasing $\longrightarrow$

$$\Omega_s \; = \; 50 \text{ rad/s}$$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$ ← periodo di campionam.

Mostrare che l'**aliasing** indotto dalla scelta del periodo di campionamento produce nel segnale campionato una **componente continua**, cioè nel segnale ottenuto dal campionamento esiste una componente di regime costante.

$r(t) \longrightarrow \; \diagup_{\Delta} \; \longrightarrow r^*(t)$

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} r(t)\,\delta(t - k\Delta)$$

$$R^*(s) = \mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} r(k\Delta)\, e^{-k\Delta s}$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta} = 50 \rightarrow \Delta = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{50}$$

quindi $r(k\Delta) = 2\cos[50\, k\Delta] = 2\cos\Big[\underbrace{\cancel{50}k \cdot \frac{2\pi}{\cancel{50}}}_{2\pi k}\Big]$

$= 2\cos(2\pi k)$ ← $\cos(2\pi k) = +1 \quad \forall k \geq 0$

$= 2$

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} r(k\Delta)\, e^{-k\Delta s} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot e^{-\frac{2\pi k}{50} s}$$

Ma per la Teoria del campionamento $z = e^{+s\Delta}$ $\longrightarrow$

$z = e^{s\Delta}$

$$\mathcal{Z}\{r(k\Delta)\} = R(z) = \sum_{0}^{+\infty} r(k\Delta)\, z^{-k} = \sum_{0}^{+\infty} 2 \cdot z^{-k}$$

$$= 2\left[\sum_{0}^{+\infty} z^{-k}\right] = 2\left[\sum_{0}^{+\infty} \left(z^{-1}\right)^{k}\right]$$

se $|z|<1$ converge a $\frac{1}{1-z^{-1}}$
[serie geometrica]

$$= 2 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \underbrace{2\left(\frac{z}{z-1}\right)}$$

è la Z-trasformata di uno scalino unitario!

$$R(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$r(k\Delta) = 2 \cdot 1(k\Delta)$$

il segnale corrispondente è uno scalino di ampiezza 2

NB quindi ammette valore di regime nonnullo

$$\lim_{k \to +\infty} r(k\Delta) = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z}\right) R(z) = 2$$

Esercizio 1

prova del 17/7/19

Domanda 1.1

Si consideri il seguente **segnale analogico a tempo continuo**

$$r(t) \;=\; 2\,\sin(2\,t)\,\cdot\,1(t) + 3\,\sin(15\,t)\cdot\,1(t)$$

e si supponga di campionarlo con una pulsazione di campionamento pari a

$$\Omega_s \;=\; 5\ \mathrm{rad/s}$$

Determinare l'espressione del **segnale campionato**. Come si può spiegare il risultato ottenuto?

In modo analogo all'esercizio precedente

$$r^*(t) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\; r(t)\cdot\delta(t-k\Delta) \qquad \Delta = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{5}$$

$$R^*(s) = \sum_{0}^{+\infty}{}_k\; r(k\Delta)\,e^{-k\Delta s} = \;\ldots\;.$$

sostituisco

$$r(k\Delta) = 2\sin(2k\Delta)\cdot 1(k\Delta) + 3\sin(15k\Delta)\cdot 1(k\Delta)$$

$$= 2\sin\left[2k\,\frac{2\pi}{5}\right]\cdot 1\left(k\frac{2\pi}{5}\right) +$$

$$+\,3\sin\underbrace{\left[\cancel{15}^{\,3}\,k\cdot\frac{2\pi}{\cancel{5}_{\,1}}\right]}_{\sin[6k\pi]\,\equiv\,0\;\forall k}\cdot 1\left(\frac{2\pi k}{5}\right)$$

$$= 2\sin\left[2k\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]\cdot 1\left(\frac{2\pi}{5}k\right)$$

Perché "scompare" il contributo a pulsazione 15?

Perché $\bar{\Omega} = 15$ rad/s è multiplo di Ω_s (è 3 volte Ω_s) ed i poli della trasformata di Laplace del segnale originale a tempo continuo sono esterni alla "striscia primaria". Per aliasing quei poli vengono riportati nella striscia primaria nell'origine ($s=0$) [erano poli c.coniugati in $\pm j\bar{\Omega} = \pm 3j\Omega_s$]