

Esercizio 1

prova del 9/02/2019

Domanda 1.1

[50 2019/20]

$2 \cos(50t + \frac{\pi}{6})$

Si consideri un segnale sinusoidale

$r(t) = 2 \cos(50t) \cdot 1(t)$

e si supponga di campionarlo con una pulsazione di campionamento pari a

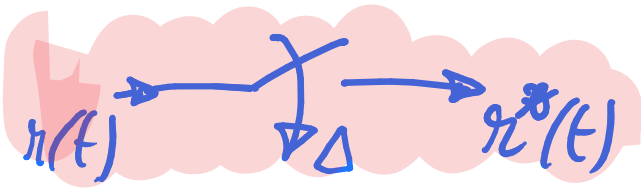
aliasing



$\Omega_s = 50 \text{ rad/s}$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$ periodo di campionamento

Mostrare che l'aliasing indotto dalla scelta del periodo di campionamento produce nel segnale campionato una componente continua, cioè nel segnale ottenuto dal campionamento esiste una componente di regime costante.



$r^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} r(t) \delta(t - k\Delta)$

$R^*(s) = \mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} r(k\Delta) e^{-k\Delta s}$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{\Delta} = 50 \rightarrow \Delta = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{50}$

quindi $r(k\Delta) = 2 \cos[50 k \Delta] = 2 \cos[50 k \cdot \frac{2\pi}{50}]$

$= 2 \cos(2\pi k)$ $\cos(2\pi k) = +1 \quad \forall k \geq 0$

$1 = 2$

$R^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} r(k\Delta) e^{-k\Delta s} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \cdot e^{-\frac{2\pi k}{50} s}$

Ma per la teoria del campionamento $z = e^{+s\Delta}$

$$z \{r(k\Delta)\} = R(z) = \sum_0^{+\infty} k r(k\Delta) z^{-k} = \sum_0^{+\infty} k 2 \cdot z^{-k}$$

$$= 2 \left[\sum_0^{+\infty} k z^{-k} \right] = 2 \left[\sum_0^{+\infty} k (z^{-1})^k \right]$$

se $|z| < 1$ convergenza $\frac{1}{1-z^{-1}}$
[serie geometrica]

$$= 2 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = 2 \left(\frac{z}{z-1} \right)$$

è la z-transformata
di uno scalino
unitario!

$$R(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1}$$

\Downarrow

$$r(k\Delta) = 2 \cdot 1(k\Delta)$$

il segnale campionato
è uno scalino di ampiezza
2

NB quindi ammette valore di regime non nullo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r(k\Delta) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) R(z) = 2$$

Esercizio 1

prova del 17/7/19

Domanda 1.1

Si consideri il seguente segnale analogico a tempo continuo

$$r(t) = 2 \sin(2t) \cdot 1(t) + 3 \sin(15t) \cdot 1(t)$$

e si supponga di campionarlo con una pulsazione di campionamento pari a

$$\Omega_s = 5 \text{ rad/s}$$

Determinare l'espressione del segnale campionato. Come si può spiegare il risultato ottenuto?

In modo analogo all'esercizio precedente

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - k\Delta)$$

$$\Delta = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi}{5}$$

$$R^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k\Delta) e^{-k\Delta s} = \dots$$

substituisco

$$x(k\Delta) = 2 \sin(2k\Delta) \cdot 1(k\Delta) + 3 \sin(15k\Delta) \cdot 1(k\Delta)$$

$$= 2 \sin\left[2k \frac{2\pi}{5}\right] \cdot 1\left(k \frac{2\pi}{5}\right) +$$

$$+ 3 \sin\left[\cancel{15}^3 k \cdot \frac{2\pi}{\cancel{5}}\right] \cdot 1\left(\frac{2\pi k}{5}\right)$$

$$\sin[6k\pi] \equiv 0 \quad \forall k$$

$$= 2 \sin\left[2k \left(\frac{2\pi}{5}\right)\right] \cdot 1\left(\frac{2\pi}{5} k\right)$$

Perché "scompare" il contributo a pole $\omega = 15$?

Perché $\bar{\omega} = 15 \text{ rad/s}$ è multiplo di ω_s (è 3 volte ω_s) ed i poli della trasformata di Laplace del segnale originale a tempo continuo sono estenuati "striscia primaria". Per questo quei poli vengono riportati nella striscia primaria nell'origine ($s=0$) [ovvero poli c. coniugati in $\pm j\bar{\omega} = \pm 3j\omega_s$]