Forma canonica di Jordan

definizioni ed esempi

Sistemi Dinamici

a.a. 2020/2021

Echivalența de matrici $\quad A_{n\times n} \quad B_{n\times n}$

Def $\quad A \sim B$ dc $\exists\, T : \operatorname{rank}(T) = n$

similitudine $\quad T^{-1} A T = B$

$\sim$ rel. echivalență $\quad TBT^{-1} = A$

$A \sim A$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B,\ B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\boxed{Th}$ $A \sim B \Longrightarrow$ stessi autovalori

$\lambda_A, \bar{v}_A$: $(A - \lambda_A I)\bar{v}_A = 0$ $A\bar{v}_A = \lambda_A \bar{v}_A$

$A \sim B \to A = T^{-1} B T$

$$(T^{-1} B T - \lambda_A T^{-1} T)\bar{v}_A = 0$$

$$[T^{-1}(B - \lambda_A I)T]\bar{v}_A = 0$$

$(T \cdot)$ $T^{-1}(B - \lambda_A I)(T\bar{v}_A) = 0$

$$(B - \lambda_A I)\hat{v}_B = 0 \qquad \hat{v}$$

Def 1 A diagonalizzabile

$$A \sim \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

se autovalori tutti distinti

$\Downarrow$

è diagonalizzabile

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile

$$\Updownarrow$$

A con autovalori tutti distinti $\Longrightarrow$ $\exists$ base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A

$$\begin{array}{cccc} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \lambda_n \\ T = & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots v_n \end{array}\right]} \end{array}$$

$$\underbrace{A v_i = \lambda_i v_i}$$

$(\lambda_i, \bar{v}_i)$

$$A\underbrace{\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_n\end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix}\lambda_1\bar{v}_1 & \lambda_2\bar{v}_2 & \cdots & \lambda_n\bar{v}_n\end{bmatrix}$$

m

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$$

(T^{-1}) $\quad AT = T\Lambda$

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

Es)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ -1 & 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = +2$$

$$V_1 = \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_2 \to \mu_2 = 2$

$\dim V_2 = 2$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{dfz}\ J_0$

$\boxed{Es}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)$$

$$V_1 = \ker(A - I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_2 = \ker(A - 2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

NON diagonalizzabile

$\lambda_2 = 2 \quad \mu_2 = 2 \quad \dim V_2 = 1$

Procedimento per trovare la matrice di trasformazione T per ottenere la forma canonica di Jordan

molteplicità algebrica

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

$\# \, n$

p autovalori distinti

$$m_1 + m_2 + \dots m_p = n$$

$A_{n \times n}$

Se [caso ⓐ]

$\forall \lambda_i$ $\underline{\dim V_i} = \dim \ker(A - \lambda_i I) = m_i$

$i = 1, 2 \ldots p$

$\hookrightarrow$ molteplicità geometrica

allora la matrice A è diagonalizzabile

$$T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_p \end{bmatrix}$$

$$V_i = \ker(A - \lambda_i I)$$

(b) $\exists j : \lambda_j : \dim\ker(A - \lambda_j I) < m_j$

allora $\exists T :$

$$T^{-1} A T = \begin{bmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ 0 & & J_2 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

Def 1 rango generalizzato di ordine k

$$\rho_k \triangleq \text{rank}(A - \lambda I)^k \qquad k \geq 1$$

λ autovettore

$$\mu_k \triangleq n - \rho_k \qquad n \to A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\underline{\nu_k \triangleq \mu_k - \mu_{k-1}} \qquad (\mu_0 \equiv 0)$$

$k = 1, 2 \ldots g$ $\qquad g: \ \nu_g \neq 0 \ \ \nu_{g+1} = 0$

$g \to$ grado dell'autovalore

$J_i = \lambda_i I + N_i$

giustificazione

$$N_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & \end{bmatrix}$$

$(N_i)^k = ?$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

Def Dati A, λ_j si definisce

autovettore generalizzato di ordine $\bar{k}$ associato a λ_j un vettore $\bar{v} \neq 0$ tale che:

$$(A - \lambda_j I)^{\bar{k}} \bar{v} = 0 ,$$

$$(A - \lambda_j I)^{\bar{k}-1} \bar{v} \neq 0$$

Def 1 Dato $\bar{v}$ autovettore generalizzato di ordine k associato a λ_j, si definisce catena di autovettori relativa a λ_j

$$\bar{v} \qquad (A-\lambda_j I)\bar{v} \qquad \cdots\cdots \qquad (A-\lambda_j I)^{k-1}\bar{v}$$

$$v^{(k)} \qquad v^{(k-1)} \qquad\qquad v^{(1)}$$

Lemma I vettori della catena sono lin. indip.

Algoritmo per determinare la forma di Jordan di una matrice A $n \times n$

Data $A_{n\times n}$ con $p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_p)^{m_p}$

(0) λ_j $j = 1, 2 \ldots p$

$\Rightarrow$ $k = g \rightarrow$ grado di λ_j. devo determinare il grado di ogni λ_j

$\Rightarrow$ $B = \emptyset$ $\leftarrow$ per ora insieme vuoto

$v_{g+1} = 0$

qualificato dopo

(Obs)

In dettaglio

Scelgo uno degli autovalori

(a) distinti λ_j $(j=1,2,\ldots p)$: $\hat{j}$

(b) pongo $k=g$ grado di $\lambda_{\hat{j}}$

(c) considero $\mathcal{B}=\emptyset$

Inizio l'algoritmo su l'autovalore $\lambda_{\hat{j}}$

(1) – determinare $\nu_k - \nu_{k-1}$ autovettori generalizzati di ordine k, linearmente ~~in~~dipendenti fra loro e rispetto ai vettori presenti in $\mathcal{B}$

per ciascuno costruire la catena

$$v_1^{(1)} \leftarrow \cdots \leftarrow v_1^{(k-1)} \leftarrow v_1^{(k)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$v_{\nu_k-\nu_{k-1}}^{(1)} \leftarrow \cdots \leftarrow v_{\nu_k-\nu_{k-1}}^{(k-1)} \leftarrow v_{\nu_k-\nu_{k-1}}^{(k)}$$

(1 bis) se $\nu_k - \nu_{k+1} = 0$?

Nessuna catena va aggiunta a $\mathcal{B}$

(2) $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{$tutti i vettori lin. indip. di tutte le catene costruite al passo 1$\}$

(3) se $k = 1 \longrightarrow$ passo (5)

altrimenti $k \leftarrow k - 1$

(4) torna ad (1)

(5) le colonne di T relative all'autovalore $\lambda_{\hat{\jmath}}$ sono <u>tutti</u> gli elementi di β

(6) $\hat{\imath} \leftarrow \hat{\jmath}+1$ e torna a (0 bis)

I passi da 1 a 5 vanno ripetuti per tutti gli autovalori λ_j $j = 1, 2, \dots p$

Algoritmo per determinare

- il grado di un autovalore $\hat{\lambda}_j$ di una matrice $A_{n \times n}$
- il numero e la dimensione di ciascuna delle catene di autovettori generalizzati associate a $\hat{\lambda}_j$

dati A, $\hat{\lambda}_j$ ← NB è UNO degli autovalori distinti λ_j $j=1,2,\dots,r$

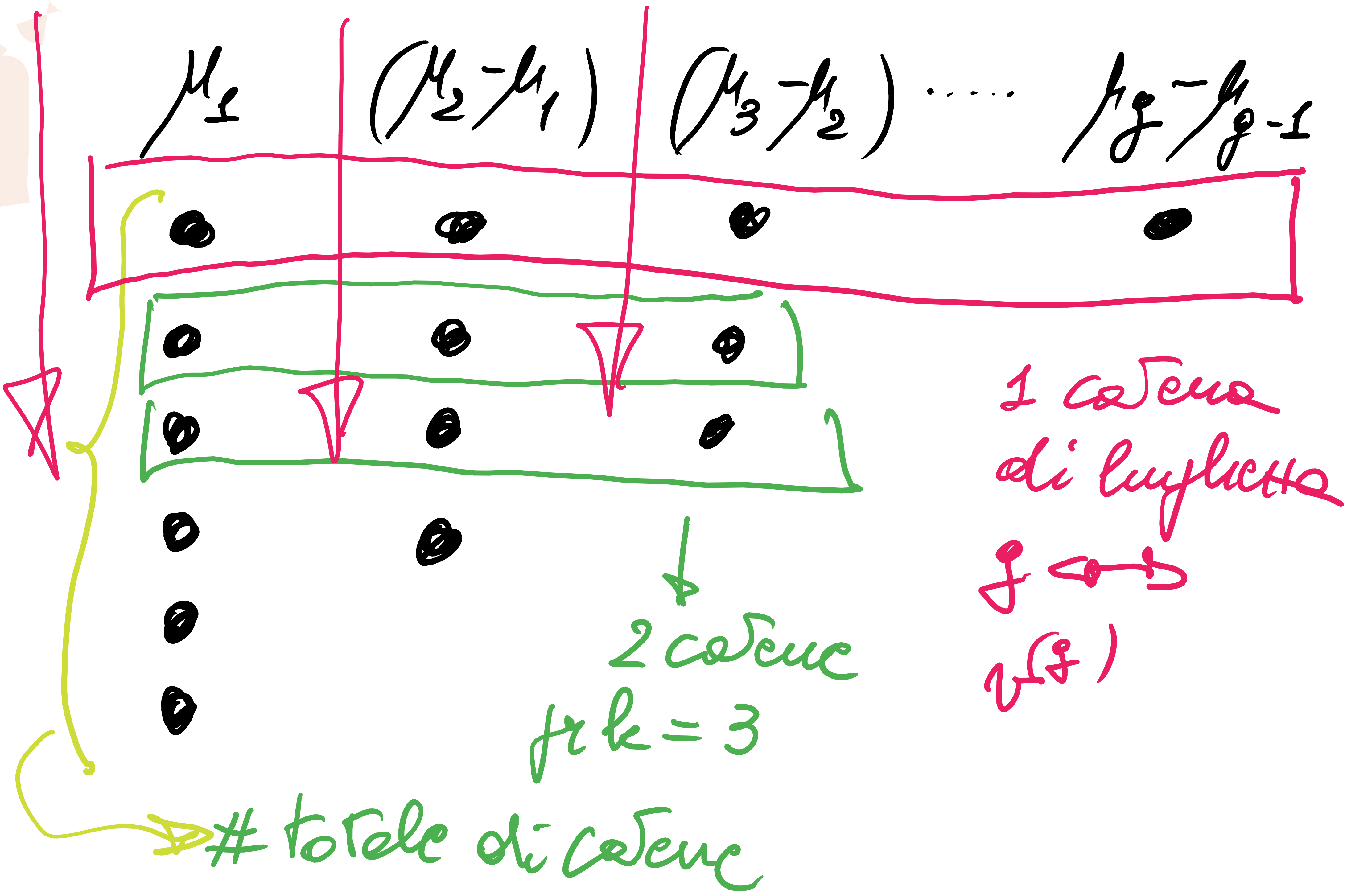
Vanno determinati:

$$\rho_k = \text{rank}\left(A - \hat{\lambda}_j \cdot I\right)^k \quad k=1,2\dots$$

$$\mu_k = n - \rho_k \qquad (\mu_0 = 0)$$

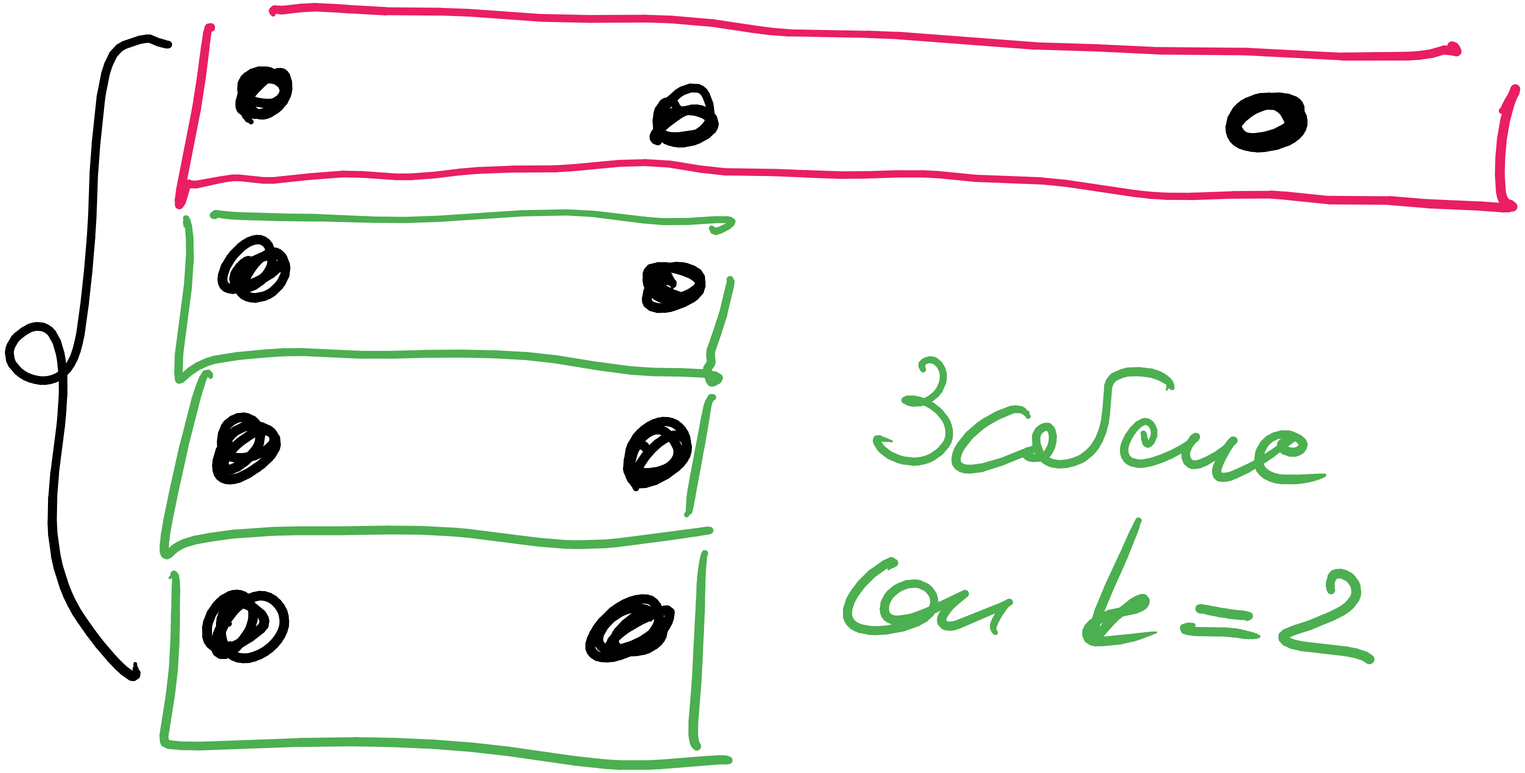
$$\nu_k = \mu_k - \mu_{k-1}$$

fino a quando $\nu_{g+1} = 0$


μ_1
$(\mu_2-\mu_1)$
$(\mu_3-\mu_2)$ .....
$\mu_g-\mu_{g-1}$
1 catena di lunghezza $g \leftrightarrow \nu(g)$
2 catene per $k=3$
totale di catene

$\boxed{\mathcal{E}_s}$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$



coppia $k=3$

4 coppie

3 coppie con $k=2$

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_1 = \operatorname{rank}(A-2I) = 2$$

$$\mu_1 = 3-\rho_1 = 1$$

$$\rho_2 = \operatorname{rank}(A-2I)^2 = 1$$

$$\mu_2 = 3-1 = 2$$

$\boxed{\text{continuazione esempio}}$

$\mu_1 \qquad \mu_2-\mu_1$

1 catena per $k=2$

$$\rho_3 = 1$$

$$\mu_3 = 1 \qquad \mu_3-\mu_2 = 0$$

$v^{(2)} \in \ker(A-2I)^2$

$\notin \ker(A-2I)$

$$\ker(A-2I)^2 = \ker \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\cancel{v}$

$v^{(2)}$

$$v^{(1)} = (A - \lambda I)\, v^{(2)} \Leftarrow v^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{d=2}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & v^{(1)} & v^{(2)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathcal{B}_{d=1}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Es. Determinare la forma canonica di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^4$$

un solo autovalore con molteplicità 4

valutazione di $\rho_k = \text{rank}(A-2I)^k$ e di μ_k

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = 2$

$\mu_1 = 4-2 = 2$ $\quad \nu_1 = 2$

Troveremo 2 catene quindi 2 mini-blocchi di Jordan all'interno del blocco di Jordan associato a $\lambda = 2$

μ_1

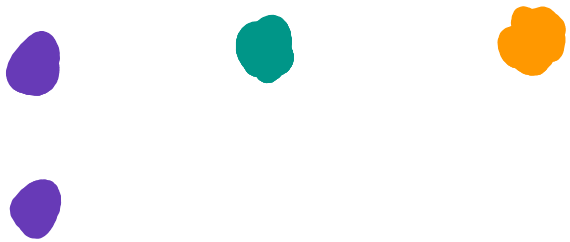
$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = 1 \qquad \begin{cases} \mu_2 = 4-1 = 3 \\ \mu_2 - \mu_1 = 1 \end{cases}$$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1$

$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho_3 = 0 \qquad \begin{cases} \mu_3 = 4 \\ \mu_3 - \mu_2 = 1 \end{cases}$$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$



chiaramente

$\rho_4 = \rho_3 = 0$

quindi

grado $g \longrightarrow g = 3$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$

catena di lunghezza 3 da generare partendo da un autovettore generalizzato di ordine 3

$$(A-2I)^3 v^{(3)} = 0$$

catena di lunghezza 1 da generare partendo da un autovettore di ordine 1

$$(A-2I)v = 0$$

$$\ker(A-2I) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2I)^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-2I)^3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Il vettore $\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è autovettore generalizzato di ordine 3

Infatti $\begin{cases} (A-2I)^3 \bar{v} = 0 \\ (A-2I)^2 \bar{v} \neq 0 \end{cases}$

NB verificare che è l'unico autovettore generalizzato di ordine 3!

La catena cercata vale

$$(A-2I)\,\bar v^{(2)} = \bar v^{(1)} \longleftarrow (A-2I)\,\bar v^{(3)} = \bar v^{(2)} \longleftarrow \bar v^{(3)}$$

$$\underset{\bar v^{(1)}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \longleftarrow \underset{\bar v^{(2)}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \longleftarrow \underset{\bar v^{(3)}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

La seconda catena di lunghezza 1 è costituita da un autovettore generalizzato di ordine 1 che DEVE essere INDIPENDENTE da quelli che formano l'altra catena

$$\bar{w}^{(1)} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di Trasformazione

$$
T = \begin{array}{cccc}
\left[\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \\
\bar{w}^{(1)} \quad \bar{v}^{(1)} \quad \bar{v}^{(2)} \quad \bar{v}^{3}
\end{array}
$$

La matrice inversa è

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La forma canonica di Jordan cercata è

$$J_A = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

2 miniblocchi

mini-blocco 1x1 $\longleftrightarrow$ catena di lunghezza 1

mini-blocco 3x3 $\longleftrightarrow$ catena di lunghezza 3

Es. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^5 \cdot \lambda$

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^5 \cdot \lambda$$

2 autovalori distinti

$\lambda_1 = 0$ con $m_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$ con $m_2 = 5$

la forma canonica di Jordan conterrà sicuramente un blocco 1×1 associato all'autovalore λ_1

per determinare invece quanti e di che dimensione saranno i mini-blocchi associati a λ_2 vanno calcolati δ_k, μ_k, ν_k per $k = 1, 2, 3, 4, 5$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = \mathrm{rank}(A-2I) = 4$

$\mu_1 = 6-4 = 2$

$A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$

μ_1

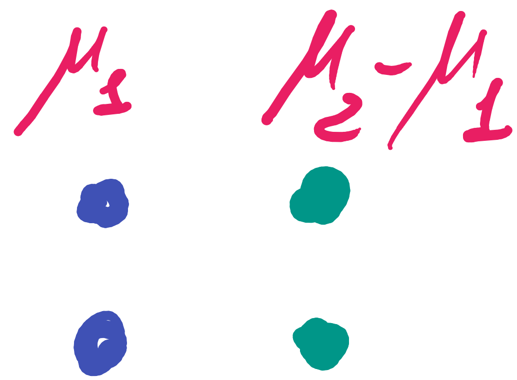
ci saranno 2 catene quindi 2 mini-blocchi

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_2 = \operatorname{rank}(A-2I)^2 = 2$$

$$\mu_2 = 6-2 = 4$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1 = 2$$



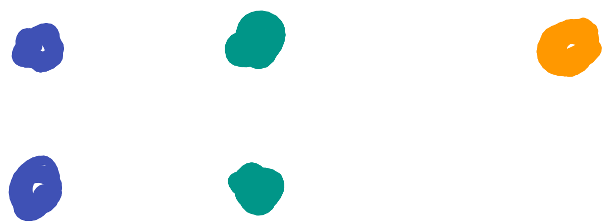
$$(A-2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +4 & -4 \end{bmatrix}$$

$\rho_3 = \text{rank}(A-2I)^3 = 1$

$\mu_3 = 6 - 1 = 5$

$\nu_3 = \mu_3 - \mu_2 = 1$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$



NB $\mu_3 = \mu_2$

Non potrà aumentare ancora

$$(A-2I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

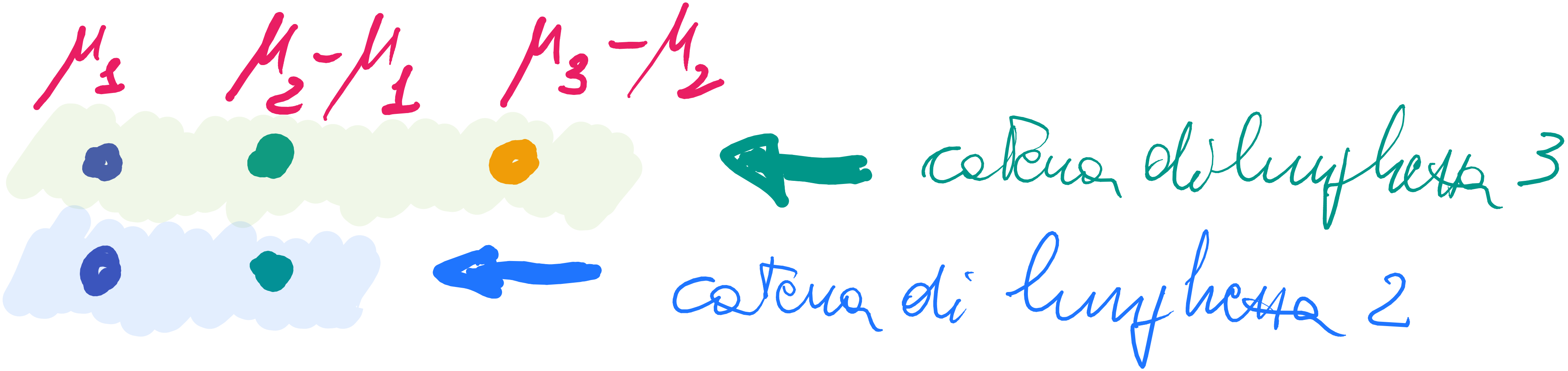
$$\rho_4 = \operatorname{rank}(A-2I)^4 = 1$$

$$\mu_4 = 6-1 = 5$$

$$\nu_4 = \mu_4 - \mu_3 = 0$$

$\mu_1 \qquad \mu_2 - \mu_1 \qquad \mu_3 - \mu_2$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{STOP!} \\ \lambda_2 \text{ ha ordine} \\ g = 3\end{array}}$$



NB si inizia SEMPRE dalla catena di lunghezza massima per determinare le altre (cfr. algoritmo pezzi da 0 a 5) catena di lunghezza 3

deve esistere $\bar{v}^{(3)}$: $\bar{v}^{(3)} \in \ker (A-2I)^3$

$\bar{v}^{(3)} \notin \ker (A-2I)^2$

Verificare che

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{v} \in \ker (A-2I)^3$

$\bar{v} \notin \ker (A-2I)^2$

è autovettore generalizzato di ordine 3

$$\bar{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}^{(1)} = (A - \lambda I)\vec{v}^{(2)} \leftarrow \vec{v}^{(2)} = (A - \lambda I)\vec{v}^{(3)} \leftarrow \vec{v}^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Catena di lunghezza 2

$\bar{w}$: $\quad (A-2I)^2 \bar{w} = 0$

$\quad (A-2I)\bar{w} \neq 0$

Verificare che

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{w} \in \ker(A-2I)^2$

$\bar{w} \notin \ker(A-2I)$

$\bar{w}$ è autovettore generalizzato di ordine 2

$$w^{(1)} = (A - \lambda I)\, w^{(2)} \quad \Leftarrow \quad w^{(2)} = \overline{w}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

catena di lunghezza 1
associata a $\lambda_1 = 0$

$$\bar{w} : (A - \lambda_1 I)\bar{w} = 0$$

Verifica da $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è autovettore cercato matrice T di trasformazione

$$T = \left[\ \bar{w}\ \middle|\ \bar{v}^{(1)}\ \middle|\ \bar{v}^{(2)}\ \middle|\ \bar{v}^{(3)}\ \middle|\ \bar{w}^{(1)}\ \middle|\ \bar{w}^{(2)}\ \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & +2 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +2 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

forma canonica $\qquad J_A = T^{-1} A T$

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es. Determinare la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 9 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

$= \dots$

sviluppo lungo questa colonna

$$p_A(\lambda) = (-1)^{7+7} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo
lungo questa
riga $\rightarrow$

$= \ldots$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)\cdot(-1)^{6+6}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo questa riga

$$= (1-\lambda)^2\cdot(-1)^{5+5}\cdot(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 & -1 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & 1 & (2-\lambda) & -1 \\ -2 & 0 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo quella riga

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & -1 & 1 \\ 2 & (2-\lambda) & -1 \\ -2 & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

sviluppo lungo questa colonna

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 \cdot \Big\{ (-1)^{3+3} (2-\lambda) \cdot \left[-(1+\lambda)(2-\lambda) + 2 \right] +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \left[1+\lambda-2 \right] +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (1) \cdot \left[-2 + 2(2-\lambda) \right] \Big\} = \dots$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (2-\lambda)\left[\cancel{-2} - \lambda + \lambda^2 + \cancel{2}\right] + (\lambda - 1) + 2(1-\lambda) \right\}$$

$$= (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (2-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-1) + (1-\lambda)(2-1) \right\}$$

$$= (1-\lambda)^4 \cdot \left\{ (1-\lambda)\left[1 - \lambda(2-\lambda)\right] \right\}$$

$$= (1-\lambda)^5 \cdot \left\{ 1 - 2\lambda + \lambda^2 \right\} = (1-\lambda)^7$$

$$p_A(\lambda)=(1-\lambda)^7$$ ← potrebbe esserci più di un mini-blocco di Jordan

$$A-I=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}=N$$

$\operatorname{rank} N = \rho(N) = 3 \implies \mu_1 = 7 - 3 = 4$

$\nu_1 = \mu_1 - 0 = 4$

ν_1

4 catene di autovettori associate tutte all'autovalore $\lambda = 1 \implies$ 4 miniblocchi di Jordan

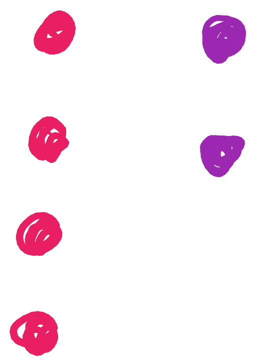
$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho(N^2) = 1$$

$$\mu_2 = 7 - 1 = 6$$

$$\nu_2 = \mu_2 - \mu_1 = 2$$

ν_1 ν_2



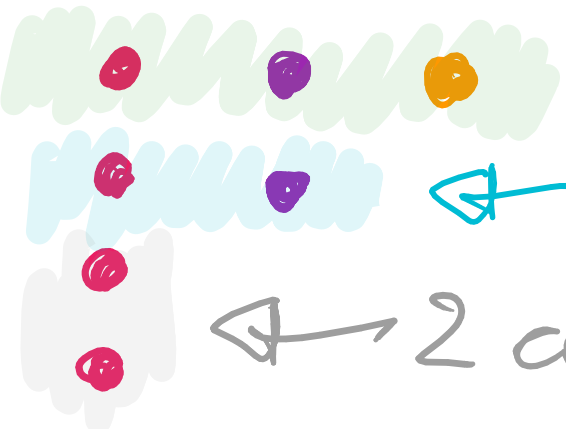
$N^3 = O_{7\times 7}$ $\qquad \rho(N^3) = 0$

$\mu_3 = 7 - 0 = 7$ ← STOP all'algoritmo! L'indice non può aumentare ancora!

$\nu_3 = \mu_3 - \mu_2 = 1$

$g = 3$ (cfr algoritmo)

$\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3$



← una catena di lunghezza 3

← una catena di lunghezza 2

← 2 catene di lunghezza 1

Catena di lunghezza 3:

$\bar{v} \in \ker(N^3)$, $\bar{v} \notin \ker(N^2)$

autovettore generalizzato di ordine 3

verificare che $\bar{v} = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$

$$\begin{cases} \bar{v} \in \ker(N^3) \\ \bar{v} \notin \ker(N^2) \end{cases}$$

la catena sarà

$$N^2\bar{v} \leftarrow N\bar{v} \leftarrow \bar{v}$$

In definitiva

$$\underset{N^2\bar{v}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \leftarrow \underset{N\bar{v}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}} \leftarrow \underset{\bar{v}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Per la catena di lunghezza 2 serve un autovettore generalizzato di ordine 2

$$\begin{cases} \bar{w} \in \ker(N^2) \\ \bar{w} \notin \ker(N) \end{cases}$$

Verifico che $\bar{w} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$:

$$\begin{cases} \bar{w} \in \ker N^2 \\ \bar{w} \notin \ker N \end{cases}$$

La catena di lunghezza 2 è allora

$$Nw \leftarrow w$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Troviamo ora le 2 catene di lunghezza 1.

Possiamo semplicemente scegliere 2 vettori in modo che

$$\begin{cases} \bar{z}, \bar{r} \in \ker N \\ \{N^2\bar{v} \quad N\bar{w} \quad \bar{z} \quad \bar{r}\} \text{ lin. indip.} \end{cases}$$

Per esempio:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

soddisfano i requisiti.

La matrice di trasformazione per la forma di Jordan allora è

$$T = \begin{bmatrix} N^2\bar{v} & N\bar{v} & \bar{v} & N\bar{w} & \bar{w} & \bar{z} & \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Define

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La forma di Jordan cercata vale:

$$J_A = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$