1) Si consideri un sistema quantistico in $\mathbb{C}^d$ $d \geq 2$, Irene Angelucci

$H = \hbar\omega P_\psi$

P_ψ proietta sullo stato normalizzato $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$

2) Trovare lo spettro di ~~H~~ H, i suoi autovettori e la degenerazione degli autovalori.

Scelgo base $\{ |\psi\rangle, \underbrace{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_{d-1}\rangle}_{} \}$

↳ sottospazio d-1 dimensionale $\perp$ $|\psi\rangle$

$H|\psi\rangle = \hbar\omega P_\psi |\psi\rangle = \hbar\omega|\psi\rangle$

$H|\psi_i\rangle = \hbar\omega P_\psi |\psi_i\rangle = 0 \qquad i = 1, \dots, d-1$

autovettore : $|\psi\rangle$

autovalore : $\hbar\omega$

degenerazione: non c'é degenerazione

3) Scrivere esplicitamente l'operatore di evoluzione temporale associato ad H

- $U_t = e^{-it\omega} |\psi\rangle\langle\psi|$ th spettrale

- $U_t = e^{-\frac{it}{\hbar}H}$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^K \frac{H^K}{K!} \qquad H^K = (\hbar\omega)^K |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \left(-\frac{it}{\hbar}\right)^K \frac{(\hbar\omega)^K}{K!} |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$= e^{-it\omega} |\psi\rangle\langle\psi|$$

4) $|\psi_{t=0}\rangle = |\phi\rangle$ Irene Angelucci

- $\text{Prob}(|\psi_t\rangle = |\chi\rangle) = ?$ $\qquad |\chi\rangle \in \mathbb{C}^d$

$$\psi_t = U_t|\phi\rangle = e^{-it\omega}|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle$$

$$\text{Prob}(|\psi_t\rangle = |\chi\rangle) = |\langle\chi|\psi_t\rangle|^2$$

$$= |\langle\chi|e^{-it\omega}\langle\psi|\phi\rangle\,\psi\rangle|^2$$

$$= \langle\chi|e^{-it\omega}\langle\psi|\phi\rangle\psi\rangle\langle e^{-it\omega}\langle\psi|\phi\rangle\psi|\chi\rangle$$

$$= \cancel{e^{-it\omega}}\langle\psi|\phi\rangle\langle\chi|\psi\rangle\,\cancel{e^{+it\omega}}\langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\chi\rangle$$

$$= |\langle\psi|\phi\rangle|^2\,|\langle\chi|\psi\rangle|^2$$

- $\text{Prob}(|\psi_t\rangle = |\psi\rangle) \overset{\text{analogamente}}{=} |\langle\psi|\phi\rangle|^2\,\underbrace{|\langle\psi|\psi\rangle|^2}_{=1}$

$$= |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

- $\text{Prob}(|\psi_t\rangle = |\psi_i\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2\,\underbrace{|\langle\psi_i|\psi\rangle|^2}_{=0,\ |\psi_i\rangle \perp |\psi\rangle}$

$i = 1, \dots, d-1$

$|\psi_i\rangle \perp |\psi\rangle$

$$= 0$$