ESERCIZIO DI MECCANICA QUANTISTICA    FRANCESCO DI GIORGIO

$\mathbb{C}^d \quad d\geq 2 \qquad H = \hbar\omega P_\psi$

2.

Lo spettro di $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ è $\{0,1\}$ dove 1 è autovalore relativo a $\psi$ e 0 autovalore relativo a $\varphi$ ogni $\varphi$ normalizzato in $\psi^\perp$. Ne segue che lo spettro di $H$ sarà $\{0, \hbar\omega\}$ dove $\hbar\omega$ è autovalore relativo sempre a $\psi$ e 0 autovalore il cui autospazio (degenere) è tutto $\psi^\perp$.

3

$$U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = e^{-it\omega P_\psi}$$

2) $$e^{-it\omega P_\psi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-it\omega P_\psi)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-it\omega)^k}{k!} P_\psi^k = Id + \left(\sum_{k\geq 1}\frac{(-it\omega)^k}{k!}\right)P_\psi =$$

$$P_\psi^2 = P_\psi \Rightarrow P_\psi^k = P_\psi \ \forall k\geq 1 \qquad P_\psi^0 = Id$$

$$= Id - P_\psi + e^{-it\omega}P_\psi$$

1) In generale dato $A = \sum_i a_i |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A| \Rightarrow F(A) = \sum_i F(a_i)|\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A|$ per cui

dato $P_\psi = 1|\psi\rangle\langle\psi| + \sum_i 0\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ dove $|\psi\rangle \cup \{|\psi_i\rangle\}_{i\geq 1}^{d-1}$ costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{C}^d$

$\Rightarrow U_t = e^{-it\omega}P_\psi + \sum_{i=1}^{d-1} P_{\psi_i} = e^{-it\omega}P_\psi + Id - P_\psi$ infatti:

$$Id = \sum_{i=1}^{d-1} P_{\psi_i} + P_\psi \quad \text{(è la completezza)}$$

4. $|\varphi\rangle$ tempo $t=0$

1) La probabilità richiesta sarà $P_{\varphi_t}(U_t|\varphi\rangle = |x\rangle) = |\langle U_t\varphi|x\rangle|^2 =$

$= |\langle e^{-it\omega P_\psi}\varphi|x\rangle|^2 = |\langle(Id - P_\psi + e^{-it\omega}P_\psi)\varphi|x\rangle|^2 = \cancel{\langle\varphi|x\rangle + (e^{-it\omega}-1)}\langle$

$= (\langle\varphi|x\rangle + \langle(e^{it\omega}-1)\langle\psi|\varphi\rangle\psi|x\rangle)(\langle x|\varphi\rangle + \langle x|(e^{-it\omega}-1)\langle\psi|\varphi\rangle\psi\rangle) =$

$= |\langle\varphi|x\rangle|^2 + (e^{it\omega}-1)\langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|x\rangle\langle x|\varphi\rangle + \langle\varphi|x\rangle(e^{-it\omega}-1)\langle\psi|\varphi\rangle\langle x|\psi\rangle +$

$+ (e^{it\omega}-1)(e^{-it\omega}-1)|\langle\psi|\varphi\rangle|^2|\langle\psi|x\rangle|^2$

Scansionato con CamScanner