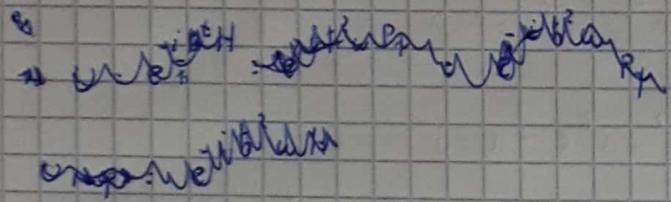


1.  $C^d$   $H = \hbar \omega P_y$

2. Lo spettro di  $P_y = |y\rangle\langle y|$  è  $\{0, \hbar\}$  dove  $\hbar$  è autovalore relativo a  $y$  e 0 autovalore relativo a  $\Phi$  ogni  $\Phi$  normale normalizzata in  $y^\perp$ . Ne segue che lo spettro di  $H$  sarà  $\{0, \hbar \omega\}$  dove  $\hbar \omega$  è autovalore relativo sempre a  $y$  e 0 autovalore il cui autospazio (degenerato) è tutto  $y^\perp$ .



3.  $U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-i t \omega P_y}$

2)  $e^{-i t \omega P_y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i t \omega P_y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i t \omega)^k}{k!} P_y^k = \text{Id} + \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-i t \omega)^k}{k!} \right) P_y$

$P_y^2 = P_y \Rightarrow P_y^k = P_y \forall k \geq 1, P_y^0 = \text{Id}$

$= \text{Id} - P_y + e^{-i t \omega} P_y$

1) In generale, dato  $A = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| \Rightarrow F(A) = \sum_{\alpha} F(a_{\alpha}) |\alpha\rangle\langle\alpha|$  per cui

Quindi dato  $P_y = \hbar |y\rangle\langle y| + \sum_{\alpha} 0 |\alpha\rangle\langle\alpha|$  dove  $|y\rangle \cup \{|\alpha\rangle\}_{\alpha \neq y}$  costituiscono una base orthonormale di  $C^d$

$\Rightarrow U = e^{-i t \omega P_y} = e^{-i t \omega \hbar |y\rangle\langle y|} = e^{-i t \omega \hbar} |y\rangle\langle y| + \text{Id} - |y\rangle\langle y|$  infatti

$\text{Id} = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{\alpha \neq y} |\alpha\rangle\langle\alpha| + |y\rangle\langle y|$  (i la completazione)

4.  $|\varphi\rangle$  tempo  $t=0$

1) La probabilità di misurare  $x$  è  $P_{x_0}(U_t |\varphi\rangle = |x\rangle) = |\langle U_t |\varphi\rangle |x\rangle|^2$

$= |\langle e^{-i t \omega P_y} \varphi | x \rangle|^2 = |\langle (\text{Id} - P_y + e^{-i t \omega} P_y) \varphi | x \rangle|^2 = |\langle \varphi | x \rangle + (e^{-i t \omega} - 1) \langle \varphi | y \rangle \langle y | x \rangle|^2$

$= (\langle \varphi | x \rangle + (e^{-i t \omega} - 1) \langle \varphi | y \rangle \langle y | x \rangle) (\langle x | \varphi \rangle + \langle x | (e^{-i t \omega} - 1) \langle y | \varphi \rangle \langle y | x \rangle)$

$= |\langle \varphi | x \rangle|^2 + (e^{-i t \omega} - 1) \langle \varphi | y \rangle \langle y | x \rangle \langle x | \varphi \rangle + \langle \varphi | x \rangle (e^{-i t \omega} - 1) \langle y | \varphi \rangle \langle x | y \rangle + (e^{-i t \omega} - 1)(e^{-i t \omega} - 1) |\langle y | \varphi \rangle|^2 |\langle y | x \rangle|^2$