LEONARDO PIOVAN

$\mathcal{H}$ $\mathbb{C}^d$, $d \geq 2$ $\qquad \hat{H} = \hbar\omega P_\psi$

P_ψ proietta sullo stato normalizzato $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$

$$\hat{H} = \hbar\omega P_\psi = \hbar\omega \sum_{i=1}^{d} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{d} \hbar\omega\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

$\hbar\omega = Sp(A)$

Infatti $\quad |\phi\rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle\psi_i|\phi\rangle\,|\psi_i\rangle$

$$\hat{H}\,|\phi\rangle = \hbar\omega \sum_{i=1}^{d} \langle\psi_i|\phi\rangle\,|\psi_i\rangle = \hbar\omega\,|\phi\rangle$$

La degenerazione sarà pari a d e gli autovettori sono $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1,\dots,d}$

$$U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-it\cancel{\hbar}\omega}{\cancel{\hbar}}\right)^k \frac{1}{k!} P_\psi^k$$

$$= P_\psi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it\omega)^k}{k!} = P_\psi\, e^{-it\omega} \qquad P_\psi^2 = P_\psi$$

$$U_t|\phi\rangle = e^{-it\omega} \sum_{i=1}^{d} \langle\psi_i|\phi\rangle\,|\psi_i\rangle$$

$\mathbb{P}_x = |\langle x|U_t\phi\rangle|^2 = |\langle x|\phi\rangle|^2$

$P_\psi = |\langle\psi|U_t\phi\rangle|^2 = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$

$P_{\psi_\perp} = |\langle\psi_\perp|U_t\phi\rangle|^2 = 0$ infatti $\langle\psi_\perp|\psi_i\rangle = 0$