Rudy Sheikh

MECCANICA QUANTISTICA
esercizio 4/11/2020

1) Sistema quantistico che evolve con $H = \hbar\omega P_\Psi$ dove $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ (NORMALIZZATO), $d \geq 2$.

2) Trovare lo SPETTRO di H, i suoi autovettori e la degenerazione degli autovalori:

$\rightarrow$ Gli autovettori $|\Psi_\alpha\rangle$ con autovalore α sono tali che $H|\Psi_\alpha\rangle = \alpha|\Psi_\alpha\rangle$

$\Rightarrow H|\Psi_\alpha\rangle = \hbar\omega|\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi_\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\Psi|\Psi_\alpha\rangle|\Psi\rangle \Rightarrow$ quindi ho che $|\Psi_\alpha\rangle$ è un autovettore $\Leftrightarrow |\Psi_\alpha\rangle = c|\Psi\rangle \rightarrow$ è PROPORZIONALE A $|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^d$.

Ma voglio che sia anche normalizzato $\Rightarrow \langle\Psi_\alpha|\Psi_\alpha\rangle = \|\Psi_\alpha\|^2 = |c|^2 = 1$

Quindi ottengo che c è una fase $\rightarrow$ quindi non è un parametro importante per la fisica che studiamo $\rightarrow$ posso tranquillamente dire che l'autovettore è quindi $|\Psi\rangle$

Considero ancora $|\Psi_\alpha\rangle = c|\Psi\rangle \Rightarrow H|\Psi_\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\Psi|\Psi_\alpha\rangle|\Psi\rangle$

ma $\langle\Psi|\Psi_\alpha\rangle = c\langle\Psi|\Psi\rangle = c \Rightarrow H|\Psi_\alpha\rangle = \hbar\omega\underbrace{c|\Psi\rangle}_{|\Psi_\alpha\rangle} = \hbar\omega|\Psi_\alpha\rangle$

Da cui ottengo che tutti gli AUTOVETTORI di autovalore $\boxed{\hbar\omega}$ sono quelli proporzionali a $|\Psi\rangle$ ovvero t.c. $\boxed{|\Psi_\alpha\rangle = c|\Psi\rangle}$ dove c è una fase overall

$\rightarrow$ Quindi autovettore $\Rightarrow |\Psi\rangle$

3) Quindi per scrivere H utilizzando il teorema spettrale basta scrivere:

$U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \Rightarrow H = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i |\Psi_i^M\rangle\langle\Psi_i^M|$ ma se autovettore è $|\Psi\rangle$ allora:

$H = \hbar\omega|\Psi\rangle\langle\Psi|$ quindi uso solo il teorema spettrale:

a) $\boxed{U_t = e^{-it\omega}|\Psi\rangle\langle\Psi| = e^{-it\omega}P_\Psi}$ ✓

Mentre sviluppando l'esponente $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{i}{\hbar}t\right)^k H^k$ ma

$H^k = (\omega\hbar)^k P_\Psi^k$ ma P_Ψ è un operatore IDEMPOTENTE $\Rightarrow P_\Psi^k = P_\Psi$ dato che $|\Psi\rangle$ è NORMALIZZATO $\Rightarrow$ b) $\boxed{U_t = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{\cancel{\hbar}}t\omega\cancel{\hbar}\right)^k\right]P_\Psi = e^{-it\omega}P_\Psi}$ ✓

UGUALI

4) $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^d$ a $t=0$ allora come evolve il sistema $t>0$ e con che probabilità?

a) $\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |x\rangle) = |\langle x|\phi_t\rangle|^2 = |\langle x|U_t\phi\rangle|^2 = |\langle x|e^{-it\omega}\langle\Psi|\phi\rangle\Psi\rangle|^2 =$

$= \underbrace{|e^{-it\omega}|^2}_{1}|\langle\Psi|\phi\rangle|^2|\langle x|\Psi\rangle|^2 \Rightarrow \boxed{\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |x\rangle) = |\langle\Psi|\phi\rangle|^2|\langle x|\Psi\rangle|^2}$

b) Se prendo l'autostato $|\Psi\rangle \Rightarrow \boxed{\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\Psi\rangle) = |\langle\Psi|\phi\rangle|^2}$

c) Se invece prendo un $|x\rangle = |\Psi_\perp\rangle$ allora ho che $\langle x|\Psi\rangle = \langle\Psi_\perp|\Psi\rangle = 0$

$\Rightarrow \boxed{\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\Psi_\perp\rangle) = 0}$