Alessio Vardabasso

Si consideri un sistema quantistico descritto dallo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^d$ $(d \geq 2)$ che evolve secondo l'Hamiltoniana $H = \hbar\omega P_\psi$

- Oss. che $H|\psi\rangle = \hbar\omega |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle \Rightarrow |\psi\rangle$ autostato di autovalore $\hbar\omega \in \sigma(H)$ (spettro di H). Inoltre, sia $\{\phi_i\}_{i=1}^d$ una ONB di $\mathbb{C}^d$ tc $\phi_1 = \psi$, $\forall i = 2, .., d$ vale $H|\phi_i\rangle = \hbar\omega|\psi\rangle\langle\psi|\phi_i\rangle = 0 \Rightarrow |\phi_i\rangle$ è un autostato di H $\forall i = 2..d$, di autovalore $0 \in \sigma(H)$. Quindi $\sigma(H) = \{0, \hbar\omega\}$ con degen$(\hbar\omega) = 1$, degen$(0) = d-1$

- Allora l'operatore di evoluzione temporale è $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}tH} =$

$$= \sum_{i=2}^d P_{\phi_i} + e^{-\frac{i}{\hbar}t\hbar\omega} P_\psi = \sum_{i=2}^d P_{\phi_i} + e^{-i\omega t} P_\psi$$

Infatti $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{\left(-\frac{it}{\hbar}\right)^k}{k!} H^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-it\omega)^k}{k!} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-it\omega} & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$ nella base $\{\phi_i\}_{i=1}^d$

$\left(H^0 = \mathbb{1},\ H^k = \begin{pmatrix} \hbar\omega^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$ nella base di autostati $\left.\{\phi_i\}_{i=1}^d \right)$

- $\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |x\rangle) = |\langle x|\phi_t\rangle|^2 = \left|\sum_{i=2}^d \langle x|P_{\phi_i}\phi\rangle + e^{-i\omega t}\langle x|P_\psi\phi\rangle\right|^2$

$$= \left|\sum_{i=2}^d \langle x|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle + e^{-i\omega t}\langle x|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle\right|^2$$

$\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\psi\rangle) = |\cancel{e^{-i\omega t}}\langle x|\psi\rangle|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2$ perché $\langle\phi_i|\psi\rangle = 0 \ \forall i = 2..d$

Sia $|\xi\rangle \perp |\psi\rangle$, $\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\xi\rangle) = \left|\sum_{i=2}^d \langle\xi|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle\right|^2$

$$= \left|\sum_{i=1}^d \langle\xi|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle\right|^2 = \left|\sum_{i=1}^d \langle\xi|P_{\phi_i}\phi\rangle\right|^2 = \left|\langle\xi|\sum_{i=1}^d P_{\phi_i}\phi\rangle\right|^2$$

$= |\langle\xi|\phi\rangle|^2$ per completezza della ONB