ESERCIZIO

MECCANICA QUANTISTICA

Traccia Si consideri uno stato $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$, $d \geq 2$, di un sistema descritto da $\mathbb{C}^d$ che evolve con l'hamiltoniana $\mathcal{H} = \hbar \omega P_\psi$.

$\boxed{1}$ Lo spettro degli autovalori di $\mathcal{H}$ è dato dall'insieme

$$Sp(\mathcal{H}) = \{0, \hbar\omega\}.$$

Poniamo, infatti, che $|\psi\rangle$ sia normalizzato ($\|\psi\| = 1$) e sia $\langle\psi\rangle \subseteq \mathbb{C}^d$ il sottospazio generato da $|\psi\rangle$, cioè $\langle\psi\rangle = \{\lambda|\psi\rangle : \lambda \in \mathbb{C}\}$, e $\langle\psi\rangle^\perp = \{|\phi\rangle \in \mathbb{C}^d : |\phi\rangle \perp |\psi\rangle\}$.

Allora $\underline{\mathbb{C}^d = \langle\psi\rangle \oplus \langle\psi\rangle^\perp}$. (1)

Questo vuol dire che $P_\psi|\psi\rangle = 1|\psi\rangle$ e $P_\psi|\chi\rangle = |\chi\rangle$ $\forall |\chi\rangle \in \langle\psi\rangle$, ma $P_\psi|\phi\rangle = 0$ $\forall |\phi\rangle \in \langle\psi\rangle^\perp$.

Essendo $\mathbb{C}^d$ la somma diretta dei due spazi, si ha che, se $|\chi\rangle \in \langle\psi\rangle$, allora $P_\psi|\chi\rangle = |\chi\rangle$, mentre se $|\chi\rangle \in \langle\psi\rangle^\perp$, $P_\psi|\chi\rangle = 0$.

Scansionato con CamScanner

Dunque gli autovalori di H sono 0 e $\hbar\omega$.

Utilizzando l'ortonormalizzazione di Graham-Schmidt, posso trovare $|\psi_2\rangle, \dots, |\psi_d\rangle \in \langle\psi\rangle^\perp$ t.c.

$\langle\psi\rangle^\perp$ è generato da $|\psi_2\rangle, \dots, |\psi_d\rangle$ e questi $d-1$ vettori sono ortonormali ($\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}$)

Allora, posto $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle$, il set $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{d} \subseteq \mathbb{C}^d$

è una ONB, rispetto alla quale

$$P_\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \; 0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}}_{d}.$$

Poiché l'autospazio di $|\psi\rangle$ ha dimensione 1, $|\psi\rangle$ è non degenere.

Per la relazione (1), l'autospazio di 0, cioè il nucleo di P_ψ, $\ker P_\psi$, ha dimensione $d-1$, dunque 0 è degenere con degenerazione $d-1$.

$\boxed{2}$ L'operatore di evoluzione $\hat{U}_t$ ha espressione $\hat{U}_t = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$,

$$\hat{U}_t = e^{-i\omega t \hat{P}_\psi}.$$

(1) <u>Teorema spettrale</u> Nella base $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{d} \subseteq \mathbb{C}^d$ sopra descritta, l'operatore P_ψ è diagonale. Dunque

$$\hat{U}_t = e^{-i\omega t \hat{P}_\psi} = \sum_{i=1}^{d} e^{-i\omega t d_i} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}}_{d}$$

Scansionato con CamScanner