# ESERCIZIO - MECCANICA QUANTISTICA - 4/11/2020

$\mathcal{H} = \hbar\omega P_\psi$ , $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ , $d \geq 2$

1) Spettro di $\mathcal{H}$, autovettori, degenerazione

Cerco gli autovalori: $\det(\mathcal{H} - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Considero una ONB: $\{|\psi\rangle, |\phi_i\rangle\}_{i=1}^{d-1}$ dove $\langle\psi|\phi_i\rangle = 0 \ \forall i$. In questa base $P_\psi$ è diagonale della forma $P_\psi = \mathrm{diag}(1, 0, \cdots, 0)$

$$\det(\hbar\omega P_\psi - \lambda\mathbb{1}) = 0 \implies \begin{vmatrix} \hbar\omega - \lambda & & & 0 \\ & -\lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\implies \lambda = \hbar\omega$ non degenere, e $\lambda = 0$ con degenerazione $d-1$

Gli autovettori: $(\hbar\omega P_\psi)|v\rangle = \hbar\omega|v\rangle$

$$\iff \begin{pmatrix} \hbar\omega & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega v_1 \\ \vdots \\ \hbar\omega v_d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \hbar\omega v_1 = \hbar\omega v_1 \\ 0 = \hbar\omega v_2 \\ \vdots \\ 0 = \hbar\omega v_d \end{cases}$$

$$\implies |v\rangle = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ dove posso prendere $|v\rangle = |e^{(1)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Per l'autovalore 0: $(\hbar\omega P_\psi)v = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} \hbar\omega & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \hbar\omega v_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$\implies (d-1)$ vettori della forma $v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix}$

che posso prendere come base canonica $e^{(2)}, \cdots, e^{(d)}$, dove $e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ posizione $i$

2) $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} = e^{-i\omega t}|e^{(1)}\rangle\langle e^{(1)}| + \sum_{j=2}^{d} |e^{(j)}\rangle\langle e^{(j)}|$

utilizzando il teorema spettrale

$$U_t = e^{-i/\hbar Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(i\omega t)^k P_\psi^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^k}{k!} P_\psi \qquad \text{perché un proiettore è idempotente}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^k}{k!} |\psi\rangle\langle\psi| = e^{-i\omega t} |\psi\rangle\langle\psi|$$

3a) $\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\chi\rangle) = |\langle\chi|\phi_t\rangle|^2 = |\langle\chi|U_t\phi\rangle|^2$

$$= |\langle\chi| e^{-i\omega t}\langle\psi|\phi\rangle\psi\rangle|^2 = |e^{-i\omega t}\langle\chi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

$$= |\langle\chi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

3b) $\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\psi\rangle) = |\langle\psi|\phi_t\rangle|^2 = |\langle\psi|U_t\phi\rangle|^2 =$

come in 3a sostituendo $|\chi\rangle = |\psi\rangle$

$= |\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle|^2 = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$ se $|\psi\rangle$ è normalizzato

3c) $\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\psi^\perp\rangle) = |\langle\psi^\perp|\phi\rangle|^2 = |\langle\psi^\perp|U_t\phi\rangle|^2 =$

come in 3a sostituendo $|\chi\rangle = |\psi^\perp\rangle$

$= |\langle\psi^\perp|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle|^2 = 0$ in quanto $\langle\psi|\psi^\perp\rangle = 0$