MATILDE PATTANARO 4/11/2020

ESERCIZIO M.Q.

1 sistema quantistico $\mathcal{H}: \mathbb{C}^d$, $d \geq 2$, evolve secondo hamiltoniana

$$H = \hbar\omega P_\psi = \hbar\omega |\psi\rangle\langle\psi|$$

dove P_ψ proietta sullo stato normalizzato $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

2) Trovare lo SPETTRO di H, i suoi autovettori e la degenerazione degli autovalori.

$$H|E_e\rangle = E_e|E_e\rangle$$

$$\hbar\omega P_\psi |E_e\rangle = E_e|E_e\rangle$$

$$\hbar\omega P_\psi |\psi\rangle = \hbar\omega|\psi\rangle$$

AUTOVALORI E_e

$$\cancel{\det(\hbar\omega P_\psi - \lambda \mathbb{I}) = 0}$$

$$E_1 = \hbar\omega \qquad deg = 1$$

$$|E_1\rangle = |\psi\rangle$$

3) operatore di evoluzione temporale associato ad H usando:

- teorema spettrale
- serie esponenziale

$$i\hbar\,\partial_t|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{U_t} |\psi_t\rangle = U_t|\psi\rangle = e^{-i/\hbar\, t\cdot H}|\psi\rangle$$

$$\overset{!}{=} \sum_{K=0}^{\infty}\left(-\frac{it}{\hbar}\right)^K \frac{H^K}{K!}$$

E_j : autovalore

$|E_j\rangle$ = autovettore

$E_1 = \hbar\omega$

- $U_t = e^{-i/\hbar\, t H} = \sum_j e^{-i/\hbar\, t E_j}|E_j\rangle\langle E_j|$
- $U_t = e^{-\frac{i}{\cancel{\hbar}} t \cancel{\hbar}\omega P_\psi} = e^{-it\omega P_\psi} = \sum_{K=0}^{\infty}(-it\omega)^K \frac{1}{K!} P_\psi^K$

$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ $\qquad P_\psi^K = P_\psi$

$$\Rightarrow U_t = e^{-i\omega t}|\psi\rangle\langle\psi| = e^{-i\omega t}P_\psi$$

n°4 $|\phi\rangle$ a $t=0$;

- $t>0 \to |x\rangle \in e^d$
- $|\psi\rangle$
- $|\psi\rangle^\perp$

$$\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\psi\rangle^\perp) = |\langle\psi^\perp|\phi_t\rangle|^2 \overset{!}{=} |\langle\psi^\perp|U_t\phi\rangle|^2$$

$$\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |x\rangle) = |\langle x|\phi_t\rangle|^2 = \overset{!}{=} |\langle x|U_t|\phi\rangle|^2$$

$$\text{Prob}(|\phi_t\rangle = |\psi\rangle) = |\langle\psi|\phi_t\rangle|^2 = |\langle\psi|U_t\phi\rangle|^2 = \overset{!}{=} |\langle\psi|e^{-i/\hbar\, tH}\phi\rangle|^2 = \langle\psi|e^{-i\omega t P_\psi}$$