Federico Elisii

Esercizio:

1. Si consideri un sistema quantistico descritto dallo spazio di Hilbert $\mathbb{C}^d$, $d \geq 2$, che evolve secondo l'Hamiltoniana: $\mathcal{H} = \hbar\omega P_\psi$ dove P_ψ proietta sullo stato $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^d$ normalizzato.

Trovare lo spettro di $\mathcal{H}$, i suoi autovettori e la degenerazione degli autovalori:

$\mathcal{H} = \hbar\omega |\psi\rangle\langle\psi|$ => Equazione agli autovalori: $\mathcal{H}|\psi\rangle = \lambda_i|\psi\rangle$

$\Rightarrow \hbar\omega|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$\Leftrightarrow \hbar\omega|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

$\Leftrightarrow \lambda_i = \hbar\omega$

Se $P_\psi = P_\psi^2 \Rightarrow P_\psi^2 v = \lambda^2 v = P_\psi v = \lambda v \Rightarrow \lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$ Unici autovalori di P_ψ.

=> Autovalori di $\mathcal{H}$ sono quelli di P_ψ / x $\hbar\omega$.

Autovettori di P_ψ sono $|\psi\rangle$ e uno $\phi \perp \psi$.

$\Rightarrow \mathcal{H}|\psi\rangle = \hbar\omega|\psi\rangle$

$\mathcal{H}|\phi\rangle = 0|\phi\rangle$

Degenerazione: ?

2. Evolutore Temporale U_t?

$$U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}t\mathcal{H}} = e^{-i\omega t}|\psi\rangle\langle\psi| + 1 \cdot |\phi\rangle\langle\phi|$$