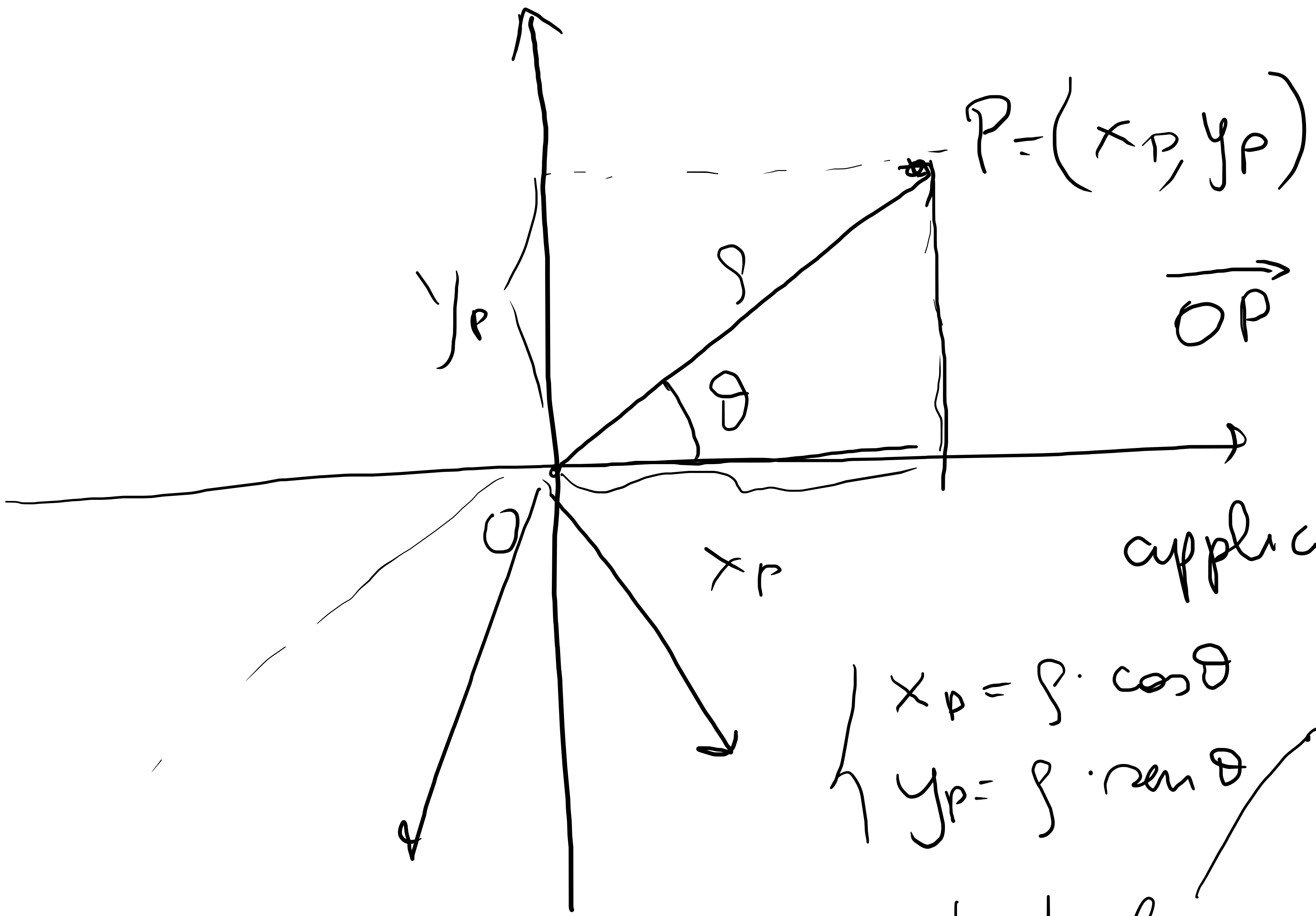


$\overrightarrow{OP}$ vettore in $\mathbb{R}^2$

(nel piano)

applicato nell'origine

$$\left\{\begin{array}{l} x_P = \rho \cdot \cos\theta \\ y_P = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{array}\right.$$

$(\underset{\text{intensità o modulo}}{\rho}, \underset{\text{argomento}}{\theta}) \to \underline{P}$

coordinate polari

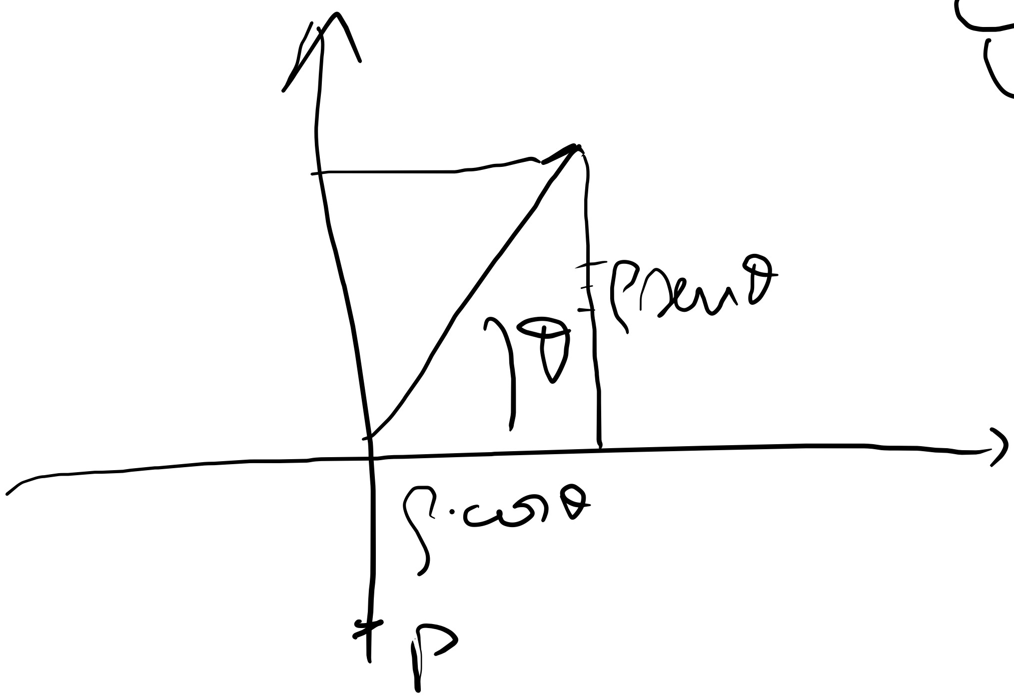
(ρ,θ) è ben definita per ogni $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O=(0,0)\}$

$0 \le \theta < 2\pi$

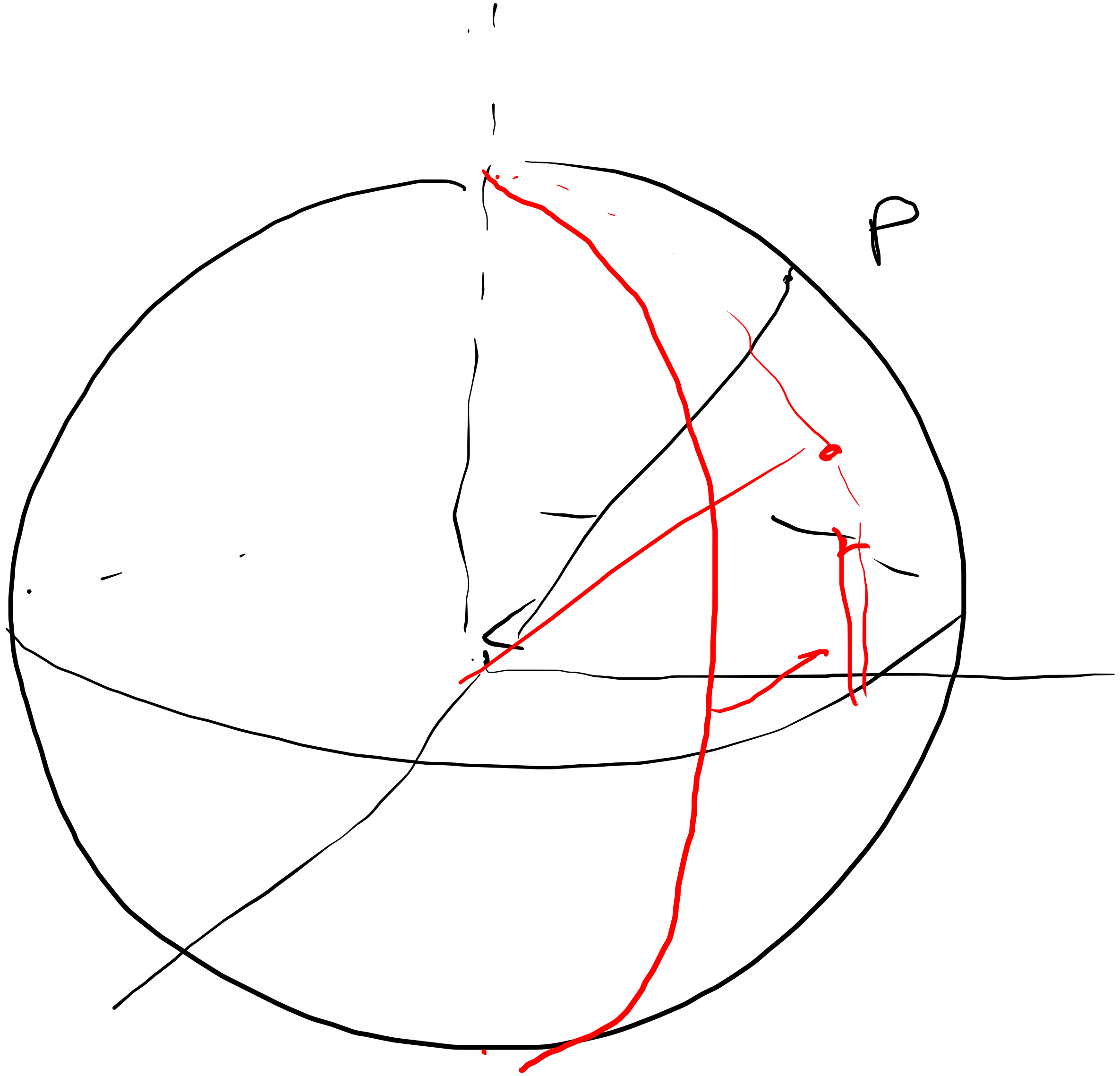
$$\rho = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} > 0 \quad \text{se } P \neq O$$

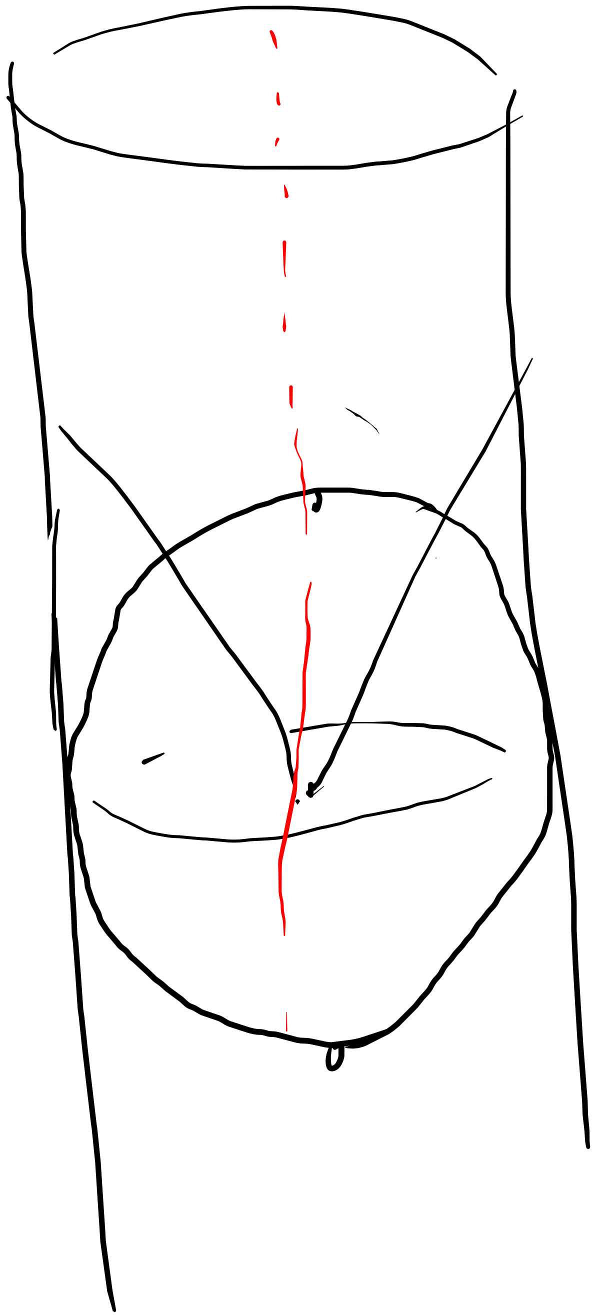
$$\theta = ? \qquad \frac{y_P}{x_P} = \frac{\cancel{\rho} \cdot \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho}\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

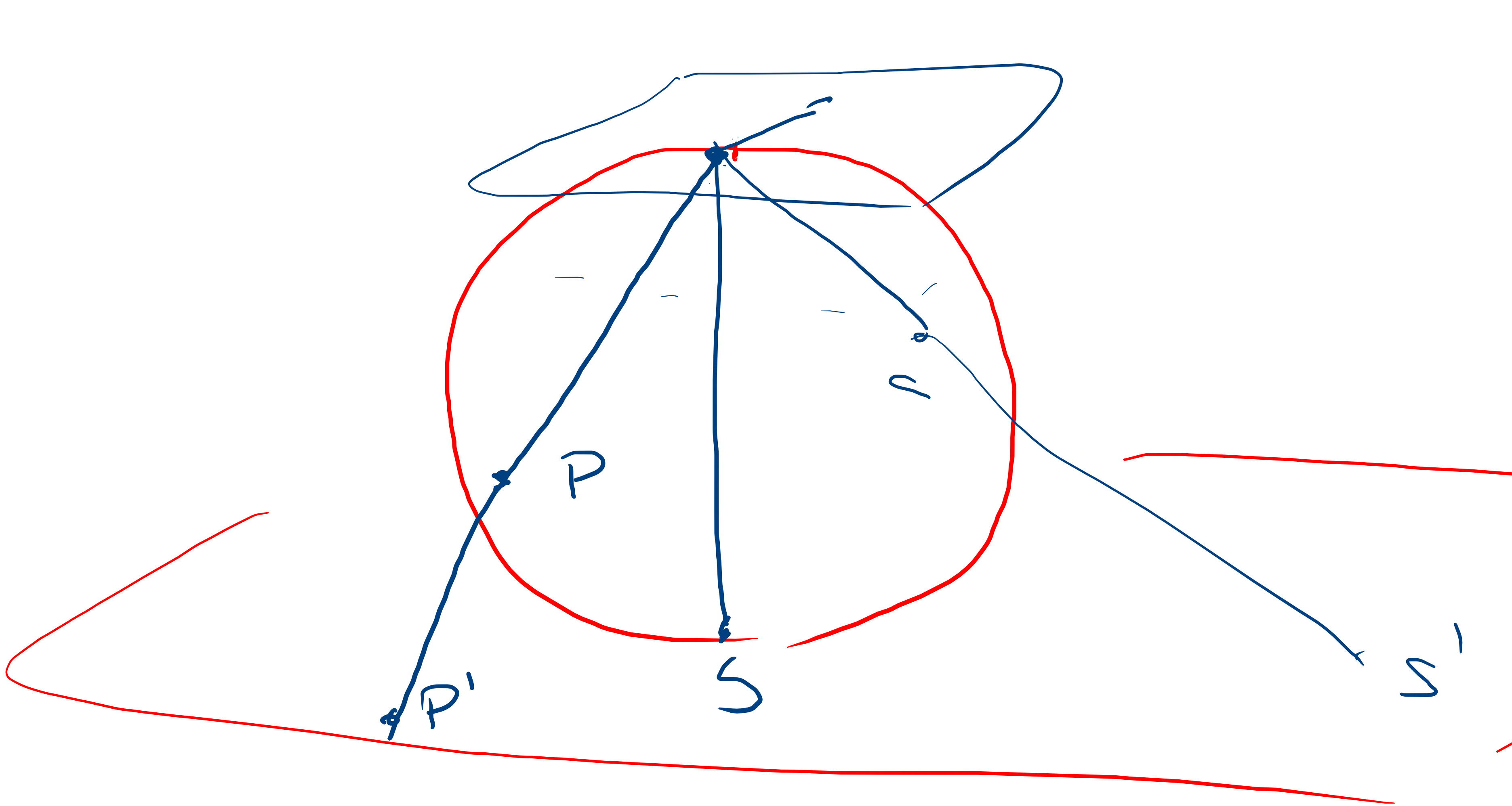
se $x_P \neq 0$

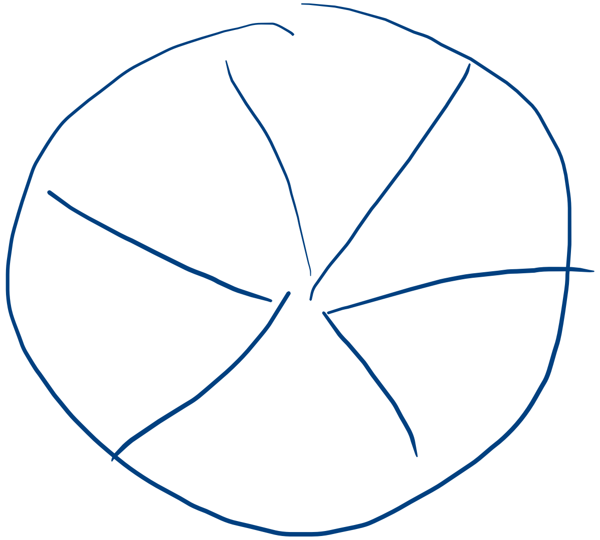


$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y_P}{x_P} & \text{se } x_P \neq 0 \\ \pi/2 & x_P = 0 \; y_P > 0 \\ -\pi/2 & x_P = 0 \; y_P < 0 \end{cases}$$


P

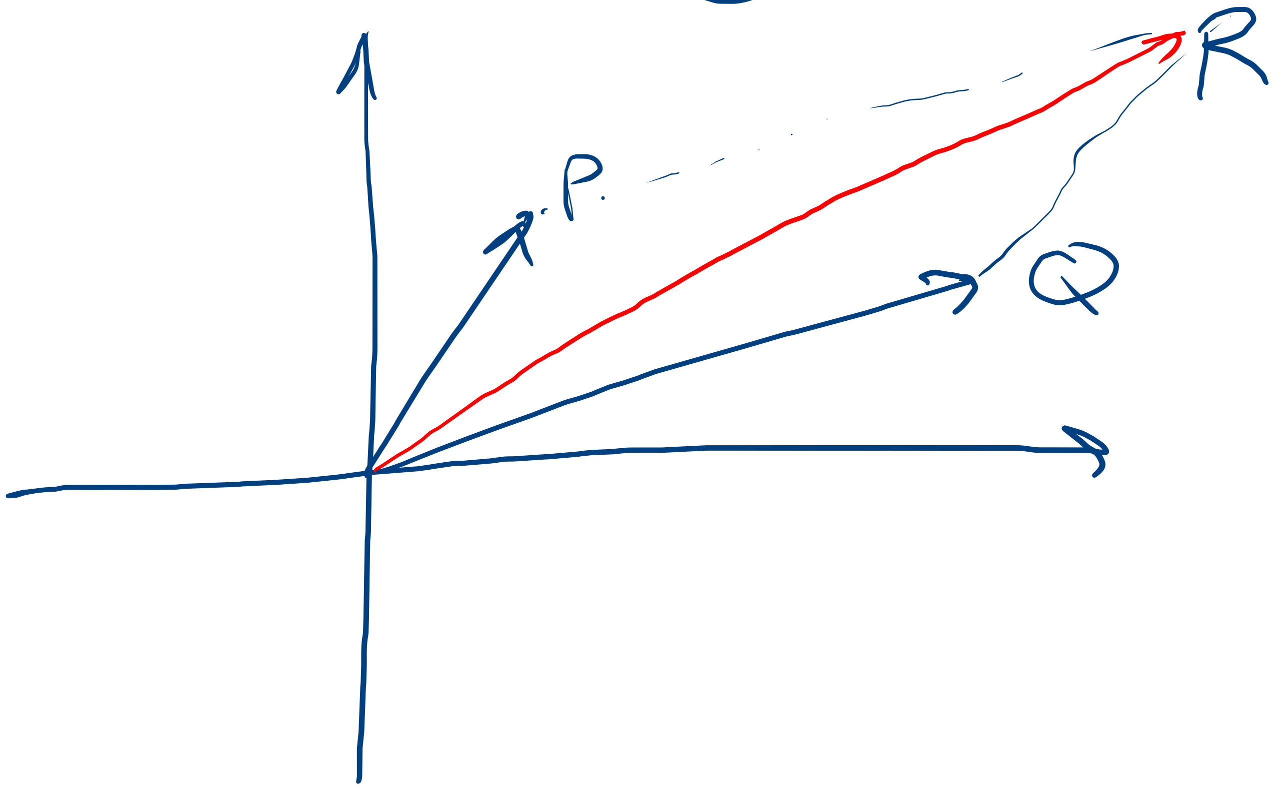



P
P'
S
S'



$$x_P = \rho_P \cdot \cos\theta_P \qquad x_Q = \rho_Q \cdot \cos\theta_Q$$

$$y_P = \rho_P \,\mathrm{sen}\,\theta_P \qquad y_P = \rho_Q \,\mathrm{sen}\,\theta_Q$$



$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} =$$

$$\rightsquigarrow \quad R = (x_P + x_Q,\, y_P + y_Q)$$

$x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q \in \mathbb{R}$!!

è detto PRODOTTO SCALARE di

$\overline{OP} \sim (x_P, y_P)$ e $\overline{OQ} \sim (x_Q, y_Q)$

$x_P = \rho_P \cos\theta_P$

$x_Q = \rho_Q \cdot \cos\theta_Q$

$y_P = \rho_P \cdot \operatorname{sen}\theta_P$

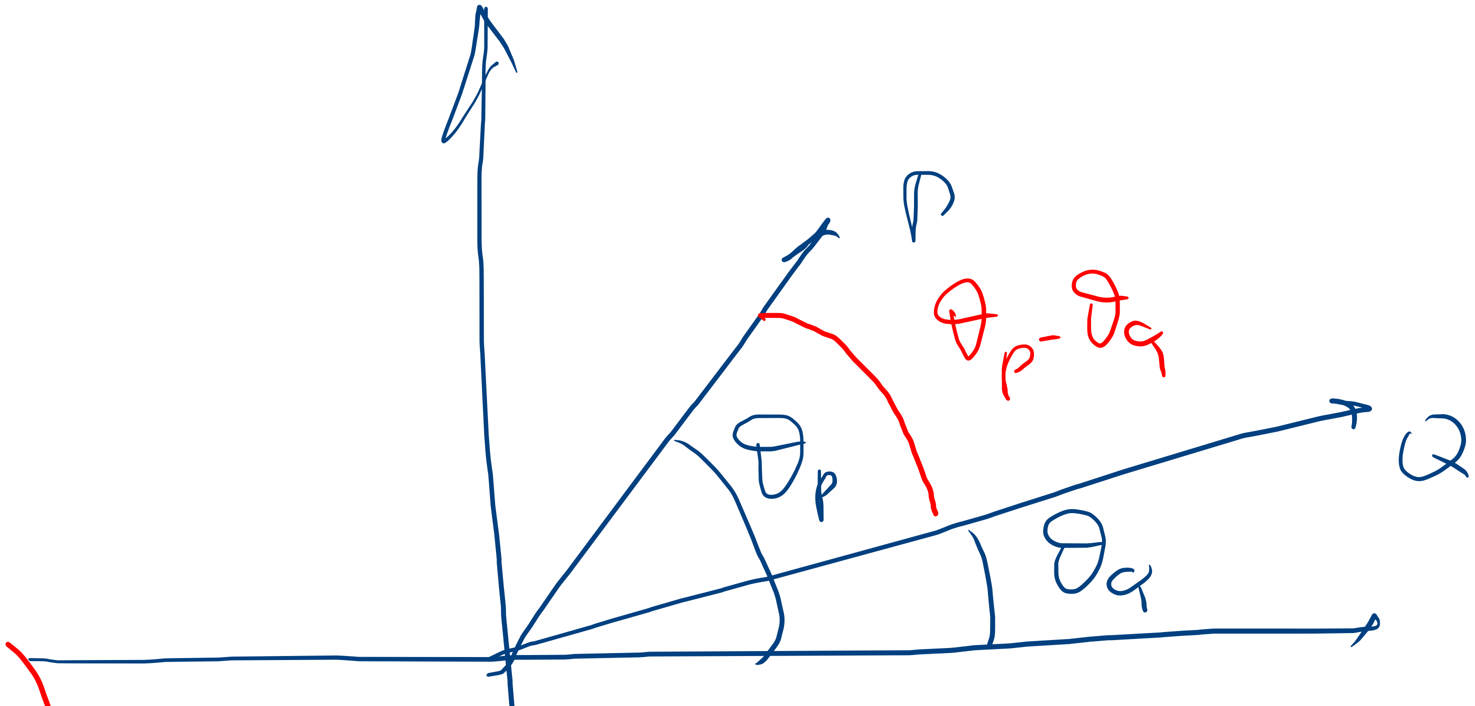
$y_Q = \rho_Q \cdot \operatorname{sen}\theta_Q$

$\underline{\rho_P \cdot \rho_Q} \cdot \cos\theta_P \cos\theta_Q +$

$+ \underline{\rho_P \rho_Q} \operatorname{sen}\theta_P \cdot \operatorname{sen}\theta_Q =$

$= \rho_P \cdot \rho_Q \cdot (\overbrace{\cos\theta_P \cos\theta_Q + \operatorname{sen}\theta_P \operatorname{sen}\theta_Q}^{\cos(\theta_P - \theta_Q)}) =$

$= \rho_P \rho_Q \cdot \cos(\theta_P - \theta_Q)$



$$\rho_p \cdot \rho_q \cdot \cos(\theta_p - \theta_q)$$

$$-1 \le \cos(\theta_p - \theta_q) \le 1$$

$$=$$

Prodotto scalare $\langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle \le \rho_p \cdot \rho_q = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} \cdot \sqrt{x_q^2 + y_q^2}$

Consideriamo $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a<b$
$(a \neq b)$

$$(a,b) = \,]a,b[\, =: \{ x \in \mathbb{R} \quad a < x < b \}$$

intervallo aperto (a, b esclusi) di estremi a e b.

$$[a,b] =: \{ x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \leq b \}$$

intervallo chiuso (a, b inclusi) di estremi a e b.

$$[a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \quad a \leq x < b \}$$

$$(a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \quad a < x \leq b \}$$

intervalli semi-aperti o semi chiusi

<u>OSS</u> Tutti gli intervalli finora considerati sono insiemi LIMITATI.

$\{x \in \mathbb{R} \quad x > M\}$ semiretta o intervallo illimitato superiormente
$(<)$ (inferiormente)

Introduciamo allora due SIMBOLI che sono $+\infty$ ("più infinito")

$-\infty$ ("meno infinito")

e li uniamo all'insieme dei numeri reali

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ campo dei numeri reali esteso.

$+\infty$ e $-\infty$ NON sono numeri reali

e NON si possono sommare sottrarre moltiplicare e dividere con numeri reali o tra di loro!!

Tuttavia assumiamo che $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x < +\infty$$

$$-\infty < x$$

In tal modo $\overline{\mathbb{R}}$ è <u>ordinato</u>.

Con questo ordinamento e per uniformità di linguaggio individueremo gli intervalli ILLIMITATI con le seguenti notazioni

$$(M, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \ M < x < +\infty\}$$

intervallo illimitato (aperto) di numeri reali di estremo M e $+\infty$.

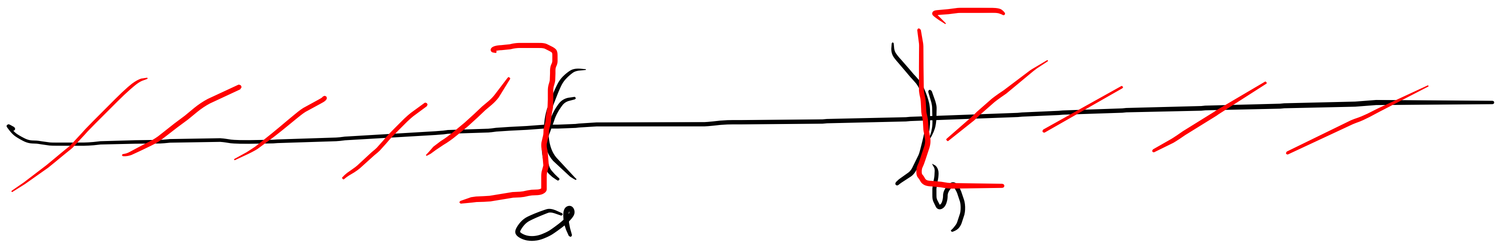
$$[M, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ M \leq x < +\infty\}$$

intervallo chiuso illimitato superiormente

$$(-\infty, M) = \{x \in \mathbb{R} \ -\infty < x < M\}$$

$$(-\infty, M] = \{x \in \mathbb{R} \ -\infty < x \leq M\}$$

Il complementare in $\overline{\mathbb{R}}$ di un intervallo aperto (limitato o non) è unione di intervalli chiusi.



Def Un intervallo CHIUSO e LIMITATO (in $\mathbb{R}$) è detto COMPATTO.

Def Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ diremo INTORNO di x_0 ogni sottoinsieme/intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente x_0. $\delta > 0$ $\delta \in \mathbb{R}$

In particolare se $x_0 \in \mathbb{R}$ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ è un intorno CENTRATO di x_0 di raggio δ e

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < \delta\}$$

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta) = \{x \in \mathbb{R} \ \ x_0-\delta < x < x_0+\delta\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ \ |x-x_0| < \delta\}$$

$$|x-x_0| = \begin{cases} x-x_0 & \text{se} \quad x \geq x_0 \\ x_0-x & \text{se} \quad x < x_0 \end{cases}$$