Teorema: f differenziabile $\Rightarrow$ f continua

$x^0 \in A$ $\quad$ f differenziabile in x^0 significa che esiste $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}_{\varphi(x)} = 0$$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = \varphi(x) \cdot \|x - x_0\| + df(x_0)(x - x_0)}$$

f continua in x^0 significa $\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} [\overset{\to 0}{\varphi(x)} \overset{\to 0}{\|x - x_0\|} + \overset{\to 0}{df(x_0)(x - x_0)}] = 0$$

Poniamo $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$ $\quad$ Allora

f differenziabile $\Rightarrow$ f derivabile lungo ogni direzione e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$$

limitata

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{|t|}{t}\,\underbrace{\varphi(x_0+tv)}_{\to 0} + df(x_0)(v)\right] = df(x_0)(v)$$

$$f(x)-f(x_0) = \varphi(x)\,\|x-x_0\| + df(x_0)(x-x_0) \qquad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$$

$x = x_0+tv$

$$f(x_0+tv)-f(x_0) = \varphi(x_0+tv)\cdot\underbrace{\|tv\|}_{\|v\|=1} + df(x_0)(tv)$$

$$= |t|\,\varphi(x_0+tv) + t\,df(x_0)(v)$$

Ho caso funzione anche per campi vettoriali

La matrice associata al $df(x_0)$ è

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = Jf(x_0)$$

Se il campo è scalare $(M=1)$ $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

si ha $Jf(x_0) = (\quad , \quad , \quad , \quad)$ matrice riga

$df(x_0)$ è una forma lineare $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Ricordiamo che ogni forma lineare si può rappresentare come

$\langle v, x \rangle$

$\uparrow$ vettore fissato

$$v = \nabla f(x_0)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \right)^T$$

questo vettore si dice il gradiente di f in x_0 e si indica con il simbolo (nabla)

$$\nabla f(x_0)$$

⚠ solo le funzioni differenziabili hanno gradiente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

$$\cancel{\nabla f(0,0) = (0,0)^T}$$

Il gradiente è definito se f è un campo scalare differenziabile.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle}$$

Es: $f(x,y) = x^2 + y^3$ $\quad (x_0, y_0)^T = (1,2)^T$ $\quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), v \rangle = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$\nabla f(x,y) = (2x, 3y^2)^T$ $\quad \nabla f(1,2) = (2, 12)^T$

Sia f differenziabile in x_0; diremo approssimante lineare di f in x_0 la funzione

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0)$$

$$\langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0)^T \rangle$$

$$(x_0,y_0)^T$$

In particolare se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'equazione

$$df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)$$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

è l'equazione del piano tangente il grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))^T$

Ej: $f(x,y) = x^2 + y\,\mathrm{sen}(xy)$ $\qquad (1,1)^T$

$f(1,1) = \underbrace{1 + \mathrm{sen}(1)}$

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + y^2\cos(xy),\ \mathrm{sen}(xy) + xy\cos(xy)\right)^T$$

$$\nabla f(1,1) = \left(\underline{2 + \cos(1)},\ \mathrm{sen}(1) + \cos(1)\right)^T$$

$$z = 1 + \mathrm{sen}(1) + \left(2 + \cos(1)\right)(x-1) + \left(\mathrm{sen}(1) + \cos(1)\right)(y-1)$$

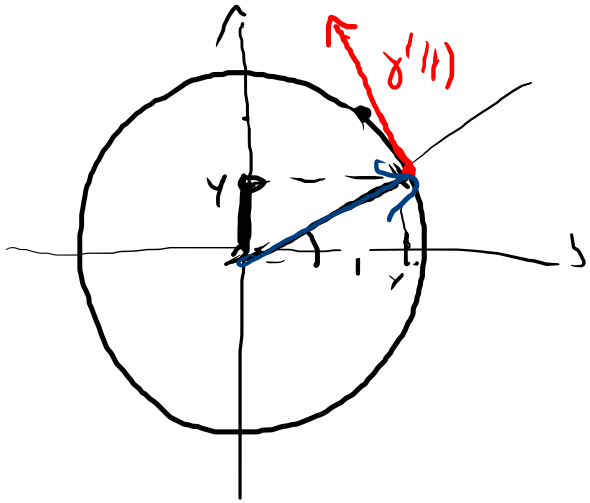
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad \nabla f$

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \mathcal{J}\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix} \overset{def.}{=} \boxed{\gamma'(t_0)}$

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$

$\gamma' : I \to \mathbb{R}^3$ $\quad \gamma'$ è il vettore tangente la curva

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)^T$ $\qquad \gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)^T$

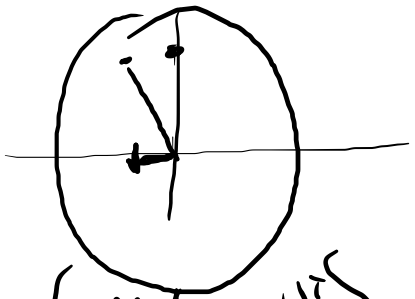


$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t,\ \cos t)^T$$

$$\begin{array}{cc} -y & x \end{array}$$

$$\gamma(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t)^T$$

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$



$$\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = \langle (\cos t, \operatorname{sen} t)^T, (-\operatorname{sen} t, \cos t)^T \rangle = 0 \quad \forall t$$

$$\sigma(\varphi, \vartheta) = \left(\operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta,\ \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta,\ \cos\varphi \right)^T \qquad \sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$J\sigma(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta & \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Regole di differenziabilità

1) Differenziabilità della combinazione lineare

$f, g : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ $\quad x^0 \in A$; f g differenziabili in x^0; allora

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha f + \beta g$ è differenziabile e $\quad d(\alpha f + \beta g)(x^0) = \alpha d(f)(x^0) + \beta dg(x^0)$

2) Differenziabilità del prodotto

$f, g : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\quad (M=1)$; f g differenziabili in x^0; allora

$f \cdot g$ è differenziabile in x^0 e si ha

$$d(f\cdot g)(x^0)(v) = df(x^0)(v)\cdot g(x^0) + f(x^0)\cdot dg(x^0)(v)$$

$\forall v \in \mathbb{R}^N \qquad d(f\cdot g)(x^0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

3) Differenziabilità delle funzioni composte

$$\begin{tikzcd} A \subseteq \mathbb{R}^N \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \subseteq \mathbb{R}^M \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R}^K \end{tikzcd}$$

$x^0 \in A \qquad y^0 = f(x^0) \in B$

$Jf \quad \underset{\sim}{M\times N}$

$Jg \quad \underset{\sim}{K\times M}$

$g\circ f \quad J(g\circ f) \quad \underset{\sim}{K\times N}$

f differenziabile in x^0

g differenziabile in y^0

Allora $g\circ f$ è differenziabile in x^0 e si ha

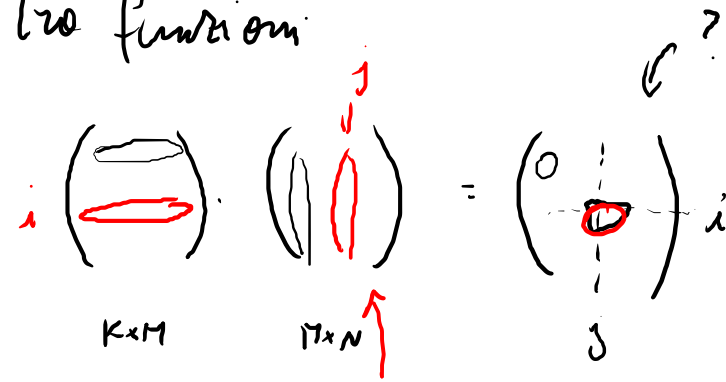
$$d(g\circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

composizione tra funzioni

$$J(g\circ f)(x_0) = Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0)$$

$k\times N$ $\quad$ $k\times M$ $\quad$ $M\times N$

prodotto di matrici



$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i(y_0)}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x_j}}$$

$y_k(x) = f_k(x)$

chain rule

$f(x)$

$g(y)$ $\quad$ $g(f(x))$

Dimostrazione

Proviamo che $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - [dg(y_0)\, df(x_0)\,(x-x_0)]}{\|x-x_0\|} = 0$

$$g(f(x)) - g(f(x_0))$$

o piccolo

$$g(y) - g(y_0) = dg(y_0)(y-y_0) + o(\|y-y_0\|)$$

$$g(y) - g(y_0) = dg(y_0)(y-y_0) + \psi(y)$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0) - dg(y_0)(y-y_0)}{\|y-y_0\|} = 0 \qquad g(y) - g(y_0) - dg(y_0)(y-y_0) = \psi(y)$$

$$\psi(y) = g(y) - g(y_0) - dg(y_0)(y-y_0)$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\psi(y)}{\|y-y_0\|} = 0$$

cioè $\psi(y) = o(\|y-y_0\|)$

$$g(y) - g(y_0) = dg(y_0)(y - y_0) + o(\|y - y_0\|)$$ ← differenziabilità della g $\quad y = f(x) \quad y_0 = f(x_0)$

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \boxed{dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0))} + o(\|f(x) - f(x_0)\|) =$$

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$ ← differenziabilità della f

$$= dg(f(x_0))\left(df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)\right) + \frac{o(\|f(x) - f(x_0)\|)}{\|f(x) - f(x_0)\|} \cdot \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0))(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \frac{dg(f(x_0))\, df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} + \frac{dg(f(x_0))(o(\|x - x_0\|))}{\|x - x_0\|} + \frac{o(\|f(x) - f(x_0)\|)}{\|f(x) - f(x_0)\|} \cdot \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0)) - dg(f(x_0))\,df(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{dg(f(x_0))\,df(x_0)(x-x_0)} + dg(f(x_0))\left(o(\|x-x_0\|)\right)}{\|x-x_0\|} +$$

$*$

$$+ \frac{o(\|f(x)-f(x_0)\|)}{\|f(x)-f(x_0)\|} \to 0 \qquad \frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} - \frac{\cancel{dg(f(x_0))\,df(x_0)(x-x_0)}}{\|x-x_0\|}$$

$*$

$$\frac{dg(f(x_0))\left(o(\|x-x_0\|)\right)}{\|x-x_0\|} = dg(f(x_0))\left(\frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|}\right) \to 0$$

$\to 0$ se $x \to x_0$

limite

$\uparrow$ continua

f è continua perché differenziabile

$$\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} = \frac{\|df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)\|}{\|x-x_0\|}$$

$*$

$$(*): \frac{\| df(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|) \|}{\|x-x_0\|} = \left\| df(x_0)\left(\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}\right) + \frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|} \right\|$$

quantità limitata!

limitata perché?

$$\left\| \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|} \right\| = 1$$

$df(x_0)$ è una funzione continua e quindi è limitata sul compatto $B(0,1)$