DETERMINANTE DI FADDEEV-POPOV e GHOSTS

P.I. : $\int \mathcal{D}A \, \Delta_{FP}(A) \, e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int (\partial^\mu A_\mu)^2}$

$$\Delta_{FP}(A) \equiv \det \frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \det \Big[\underbrace{\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu}_{\text{automorfismo in } V_{Adj} \otimes \mathbb{1}_{Lorentz} \otimes \{\text{function}\}} \Big]$$

$$\frac{\delta(\partial^\mu A^\alpha_\mu)}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta \alpha}(\partial^\mu(\cancel{A_\mu} + D_\mu \alpha))$$

Il determinante di ogni operatore può essere rappresentato da un integrale su oggetti a valori nei numeri di Grassmann :

$$\det M = \int d^n\bar{\xi} \, d^n \xi \, e^{i \bar{\xi}^T M \xi}$$

M è matrice che agisce su V_n

Abbiamo integrato su un $\xi \in V_n$

$$\Delta_{FP}(A) = \int \mathcal{D}c \, \mathcal{D}\bar{c} \, e^{i\int d^4x \, \bar{c}(x)(-\partial^\mu D_\mu) c(x)}$$

$$c, \bar{c} \in V_{Adj} \otimes \mathbb{1}_{Lorentz} \otimes \{\text{funz.}\} \otimes \{\text{Grassmann numbers}\}$$

$\Rightarrow$ c è un CAMPO SCALARE nella RAPP. AGGIUNTA a valori nei numeri di Grassmann

Questo campo AUSILIARIO ha la relazione sbagliata tra SPIN e STATISTICA $\longrightarrow$ non può essere associato a particelle FISICHE $\rightarrow$ GHOSTS di FP

P.I.: $\displaystyle\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi}\int(\partial^\mu A_\mu)^2 + i\int \mathcal{L}_{gh}}$

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}(-\partial^\mu D_\mu)c = \bar{c}^a\left(\delta^{ab}(-\partial^2) + g\,\partial^\mu f^{abc}A_\mu^b\right)c^c$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}_{gh}$ (e quindi la Lagrangiana totale) è INVARIANTE sotto

$$c \mapsto e^{i\chi}c \qquad \bar{c} \mapsto e^{-i\chi}\bar{c} \qquad \chi \text{ cost}$$

↪ la corrispondente carica conservata si chiama GHOST NUMBER Q_{gh} ; è t.c.

$$\{Q_{gh}, c\} = c \qquad \{Q_{gh}, \bar{c}\} = -\bar{c}$$

$$\text{e } \{Q_{gh}, \varphi\} = 0 \qquad \varphi = \{\text{tutti gli altri campi}\}$$

In termini dei campi

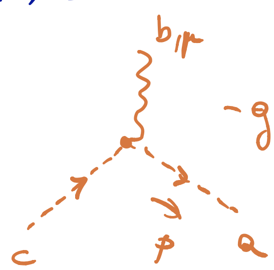
$$Q_{gh} = \int d^3x\left[-\bar{c}^a(D_0 c)^a + \partial_0\bar{c}^a c^a\right]$$

Regole di Feynman per i Ghosts:

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}^a\left(-\partial^2\delta^{ab} + g\,\partial^\mu f^{abc}A_\mu^b\right)c^c$$

$\frac{i}{k^2}$

la freccia mostra il flusso del GHOST N°



$-g f^{abc} p^\mu$

Partiamo da una teoria di gauge con Lagrangiana gauge inv.

$$\mathcal{L}_{g.i} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, D\psi)$$

fermioni in rap. R del gruppo di gauge

Il P.I. è dato da

$$\int DA\,Dc\,D\bar{c}\,D\psi\,D\bar{\psi}\; e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i} + \underbrace{\mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh}}$$

la loro forma dipende dalla scelta della funz. $G(A)$.

La Lagrangiana $\mathcal{L}$ è RINORMALIZZABILE nel senso che tutti i termini hanno MASS-DIM ≤ 4.
Per provare che la teoria è rinormalizzabile, abbiamo bisogno di mostrare che c'è un controtermine per ogni divergenza.

BRST Symmetry

$$\int DA\,Dc\,D\bar{c}\,D\psi\,D\bar{\psi}\; e^{i\int \mathcal{L}} \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh}$$

La Lagrangiana $\mathcal{L}$ ha una simmetria globale.

Per convenienza possiamo riscrivere

$$e^{\frac{i}{2\xi}\int (\partial_\mu A^\mu)^2} = \int DB\; e^{i\int(\underbrace{\frac{\xi}{2}B^2 - B^a\,\partial_\mu A^{a\mu}}_{\square})}$$

$D:\ \frac{\xi}{2}\left(B^2 - \frac{2}{\xi} B \partial_\mu A^\mu\right) = \frac{\xi}{2}\left(B - \frac{1}{\xi}\partial_\mu A^\mu\right)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$

Il camp B è un campo AUSILIARIO (non propagante)
scalare nella rapp. Adj. [Moltiplicatore di Lagrange]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar\psi(i\not{D} - m)\psi + \frac{\xi}{2}(B^a)^2 \underbrace{- B^a \partial^\mu A^a_\mu}_{-B^a G^a(A)} + \underbrace{\bar c^a(-\partial^\mu D_\mu)^{ab} c^b}_{\bar c^a \Delta_{FP}^{ab} c^b}$$

è invariante sotto la sim. (continua) di BRST:

$$\left.\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= \epsilon (D_\mu c)^a = \epsilon(\partial_\mu c^a - f^{abc} A^b_\mu c^c) \\ \delta\psi &= i g \epsilon c^a t^a_R \psi \end{aligned}\right\}$$

formalmente quelli a TRASF. di GAUGE con parametro $\epsilon c(x)$

$$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$$

$$\delta \bar c^a = -\epsilon B^a$$

$$\delta B^a = 0$$

$\leftarrow$ questo permetterebbe di rimpiazzare $\frac{\xi}{2}(B)^2$ con qualsiasi funzionale $F[B]$, mantenendo BRST-inv.

ϵ è un parametro (costi) continuo ; ϵ è un numero di GRASSMANN

Dimostriamo l'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto BRST:

$-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \mathcal{L}_{\Pi}$ è gauge inv. $\Rightarrow$ inv. sotto BRST

$\frac{\xi}{2}(B^a)^2$ è manifestam. BRST-inv.

Consideriamo poi

$$\delta\left(-B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar c^a(-\partial^\mu D^{ab}_\mu)c^b\right) =$$

$$= -\epsilon \cancel{B^a \partial^\mu (D_\mu c)^a} - \underbrace{\delta \bar{c}^a}_{-\epsilon B^a} \cancel{\partial^\mu D_\mu c^a} - \bar{c}^a \partial^\mu \delta (D_\mu c)^a$$

$\delta A_\mu^a = \epsilon (D_\mu c)^a$

$\delta \psi = i g \epsilon c^a t_R^a \psi$

$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$

$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$

$\delta B^a = 0$

$\downarrow$

Calcoliamo

$$\delta (D_\mu c)^a = \delta \left(\partial_\mu c^a - g f^{abc} A_\mu^b c^c \right) =$$

$$= \partial_\mu \delta c^a - g f^{abc} \epsilon \left(\partial_\mu c^b - g f^{bkm} A_\mu^k c^m \right) c^c - g f^{abc} A_\mu^b \delta c^c$$

$$= \underbrace{\left(\partial_\mu \delta c^a - \underbrace{g f^{abc} \epsilon \partial_\mu c^b c^c}_{= \frac{1}{2} g f^{abc} \epsilon \partial_\mu (c^b c^c)} \right)}_{= \partial_\mu \left(\delta c^a - \frac{\epsilon}{2} g f^{abc} c^b c^c \right) = 0} - g f^{abc} \left(A_\mu^b \underbrace{\delta c^c}_{\frac{1}{2} g \epsilon f^{cde} c^d c^e} - g f^{bkm} A_\mu^k c^m c^c \right)$$

$$= -g f^{abc} \epsilon \left(A_\mu^b \frac{1}{2} g f^{cde} c^d c^e - g f^{bkm} A_\mu^k c^m c^c \right)$$

$$= -\frac{1}{2} g^2 \epsilon A_\mu^b c^p c^q \underbrace{\left(f^{abc} f^{cpq} - f^{alq} f^{lbp} + f^{alp} f^{lbq} \right)}_{- f^{abc} f^{pcq} - f^{aqc} f^{bcp} - f^{apc} f^{qcb} =}$$

$= 0$ per Id. Jacobi

Id Jacobi: $[t^m, [t^s, t^k]] + [t^s, [t^k, t^m]] + [t^k, [t^m, t^s]] = 0$

$= i [t^m, f^{skh} t^h] + \text{perm. cicl. } (msk)$

$= \left[-f^{mha} f^{skh} + \quad '' \quad \right] t^a$

$'' 0 \quad \forall a$

$f^{amh} f^{khs} + \text{perm. cicliche} = 0$

$\Rightarrow \delta (D_\mu c)^a = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}$ è inv. sotto BRST //

BRST simm. $\longrightarrow$ ci sarà una carica conservata Q_{BRST}

t.c. $\delta\varphi = \epsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \text{generatore}}}{Q_{BRST}} \cdot \varphi$

Siccome ϵ è n° Grassmann allora $Q_{BRST}\cdot\varphi$ ha statistica opposta a φ

La trasf. di BRST è NILPOTENTE : ("applicata due volte fa zero")

$$\delta_1\delta_2 A_\mu^a = \delta_1\left(\epsilon_2 (D_\mu c)^a\right) = \epsilon_2\, \delta_1 (D_\mu c)^a = 0$$

$\delta A_\mu^a = \epsilon (D_\mu c)^a$

$\delta\psi = ig\,\epsilon\, c^a t_R^a \psi$

$\delta c^a = \frac{1}{2} g\,\epsilon f^{abc} c^b c^c$

$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$

$\delta B^a = 0$

$$\delta_1\delta_2\psi = ig\epsilon_2\, \delta_1(c^a t_R^a\psi) =$$
$$= ig\epsilon_2\Big(\frac{1}{2} g\,\epsilon_1 f^{abc} c^b c^c t_R^a \psi + \underbrace{ig\,\epsilon_1 c^a t_R^a c^d t_R^d \psi}_{=\frac{i}{2} g\epsilon_1 c^a c^d [t_R^a, t_R^d] = -\frac{1}{2} g\,\epsilon_1 f^{adq} c^a c^d t_R^q}\Big) = 0$$

$$\delta_1\delta_2 c^a = \frac{1}{2} g\,\epsilon_2 f^{abc}\,\delta_1(c^b c^c) = \frac{1}{4} g^2\epsilon_2\epsilon_1 f^{abc}\big(\underbrace{f^{bpq} c^p c^q c^c + f^{cpq} c^b c^p c^q}_{\text{simm in } b\leftrightarrow c}\big) = 0$$

$$\delta_1\delta_2 \bar{c}^a = -\epsilon_2\,\delta_1 B^a = 0$$

$$\delta_1\delta_2 B^a = 0$$

Consideriamo due campi ϕ_1, ϕ_2 (non necessariam. allo stesso pto)

$Q_{BRST} \equiv Q_B$

$$\delta(\phi_1\phi_2) = \delta\phi_1\,\phi_2 + \phi_1\,\delta\phi_2 = (\epsilon Q_B\cdot\phi_1)\phi_2 + \phi_1(\epsilon Q_B\cdot\phi_2)$$
$$= \epsilon\left[(Q_B\cdot\phi_1)\phi_2 \pm \phi_1(Q_B\cdot\phi_2)\right]$$

$+$ se ϕ_1 è bos.

$-$ " ϕ_1 è ferm. (o gh)

$$\delta\left(Q_B\phi_1\ \phi_2 \pm \phi_1\ Q_B\phi_2\right) = \epsilon' \underbrace{\cancel{Q_B^2}}_{=0}\phi_1\ \phi_2 + Q_B\phi_1\ \epsilon' Q_B\phi_2$$
$$\pm\left(\epsilon' Q_B\phi_1\ Q_B\phi_2 + \phi_1\ \epsilon' \underbrace{\cancel{Q_B^2}}_{=0}\phi_2\right)$$
$$= \epsilon'\left[\mp Q_B\phi_1\ Q_B\phi_2 \pm Q_B\phi_1\ Q_B\phi_2\right] = 0$$

$\Rightarrow$ BRST è NILPOTENTE quando agisce su ogni prodotto di campi valutati a pti arbitrari.

Siccome ogni funzionale $F[\phi]$ può essere scritto come somme di integrali multipli di tali prodotti
$\Rightarrow \delta^2_{BRST} F[\phi] = 0 \Rightarrow$ BRST è NILPOTENTE

La trasf. di BRST data rende inv. qlsiasi lagrangiana ottenuta col procedim di FP, cioè $\forall$ scelta di $G(A)$:

$$-B^a\partial^\mu A^a_\mu + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu)^{ab}c^b \qquad + \mathcal{L}_{g.i.}$$

$$-B^aG^a(A) - \underbrace{\bar{c}^a \frac{\delta G^a}{\delta\alpha^b}(A^\alpha)\, c^b}_{} \qquad + \mathcal{L}_{g.i.} \leftarrow \text{inv. sotto BRST}$$

$$= \bar{c}^a\frac{\delta G^a}{\delta \epsilon c^b}(A'^{\,\text{BRST}})\, c^b = \bar{c}^a\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}\underbrace{\frac{\delta A'^c}{\delta \epsilon c^b}}_{D_\mu c^c} c^b$$

$$\Big\downarrow \delta_{BRST}$$

$$-B^a\cancel{\frac{\delta G^a}{\delta A^b_\mu}}\epsilon D_\mu c^b + \epsilon B^a\cancel{\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}}D_\mu c^c - \bar{c}^a\frac{\delta G^a}{\delta A^c_\mu}\underbrace{\delta(D_\mu c)^c}_{=0}$$