Intorno di $-\infty$ e di $+\infty$

Ogni insieme aperto superiormente illimitato
(inferiormente)

è un intorno di $+\infty$
$(-\infty)$

$\{x \in \mathbb{R} \quad x > M\}$
$(<)$

<u>Def</u> Ogni funzione $f: \mathbb{N} \to S$ è una successione (di elementi di S)

In particolare ci interesseremo di successioni di numeri reali, ossia di successioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Normalmente si usa scrivere

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \quad \text{ove} \quad f(n) = a_n$$

$a_0 = f(0) \quad a_1 = f(1) \ldots$

Es

① $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\quad n \geq 1$

$$\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ 0, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

$$\boxed{f(n) = 1 - \frac{1}{n}}$$

② $b_n = \sqrt{n+1}$

$$\left\{ \sqrt{1} = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4} = 2, \dots \right.$$

Def Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ogni sottoinsieme (infinito) di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detto sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Es $a_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad n \geq 1$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2n}\right\} \subset \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$$

Def Diremo che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

è crescente se $a_{n+1} > a_n$

(decrescente) $(<)$ $\forall n$

(non crescente) $(\leq)$

(non decrescente) $(\geq)$

(non crescente, o non decrescente

Una successione che sia crescente (decrescente) si dice MONOTONA in senso stretto.

(in senso debole o debolmente)

$$\left\{ a_n = (-1)^n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\{ \overset{a_0}{\overset{\parallel}{1}}, \overset{a_1}{\overset{\parallel}{-1}}, 1, -1, 1, -1, \dots$$

NON è monotona

Def Sia data una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Diremo che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (al tendere di n a $+\infty$)
crescere di n

se comunque preso un intorno di l I_l esiste in corrispondenza un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall n > n_0 \qquad a_n \in I_l$. | "$a_n$ definitivamente appartiene a I_l"

In simboli si riassume quanto sopra definito scrivendo

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l}$$

"limite per n tendente a $+\infty$ di a_n uguale a l"

Talvolta per brevità si scrive anche $a_n \to l$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

allora la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta INFINITESIMA

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$ si dice che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente a $+\infty$ $(-\infty)$.

Infine se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$, si dice che $\{a_n\}$ è CONVERGENTE a l.

Oss Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

allora per ogni sottosuccessione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

si ha $\lim_{n \to +\infty} b_n = l$

Infatti $a_n \in I_l \quad \forall\, n > n_0$

$\Rightarrow$ se $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ risulta $b_n \in I_l$ se $n > n_0$

Teorema (Unicità del limite)

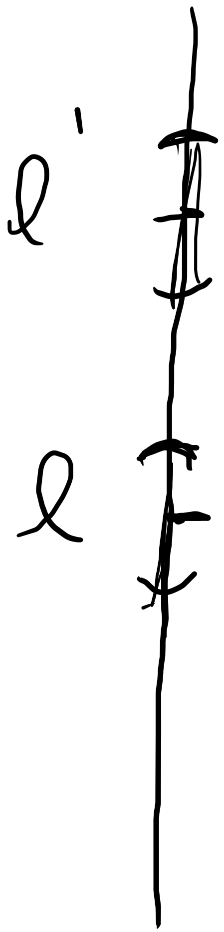
Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ esiste, [l è il limite della successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$]

allora tale limite l è UNICO.

<u>Dim</u> Per assurdo supponiamo che i limiti sia 2 distinti $l \neq l'$ per la stessa successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Considero I_l e $I_{l'}$ intorni di l e l' rispettivamente DISGIUNTI.

Se $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$



$$0 < |\ell - \ell'| = r$$

$$\ell - \delta < x < \delta + \ell$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta = r/3 > 0$$

$$I_\ell = \{ x \in \mathbb{R} \quad |x - \ell| < \delta \}$$

$$I_{\ell'} = \{ x \in \mathbb{R} \quad |x - \ell'| < \delta \}$$

$$\Updownarrow$$

$$\ell' - \delta < x < \ell' + \delta$$

$$\Downarrow$$

$$I_\ell \cap I' = \emptyset .$$

$l \in \mathbb{R} \quad l' = +\infty$

$(l' = -\infty$ analogo$)$

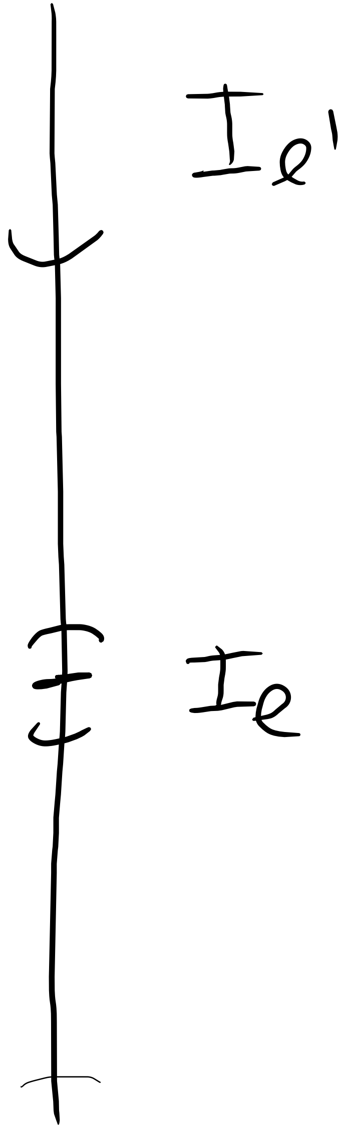
$I_l = \{ x \in \mathbb{R} \quad l-\delta < x < l+\delta \}$

$l' = +\infty$

$I_{l'} = \{ x \in \mathbb{R} \quad x > M \}$

basta considerare $M > l+\delta$

$I_l \cap I_{l'} = \emptyset.$

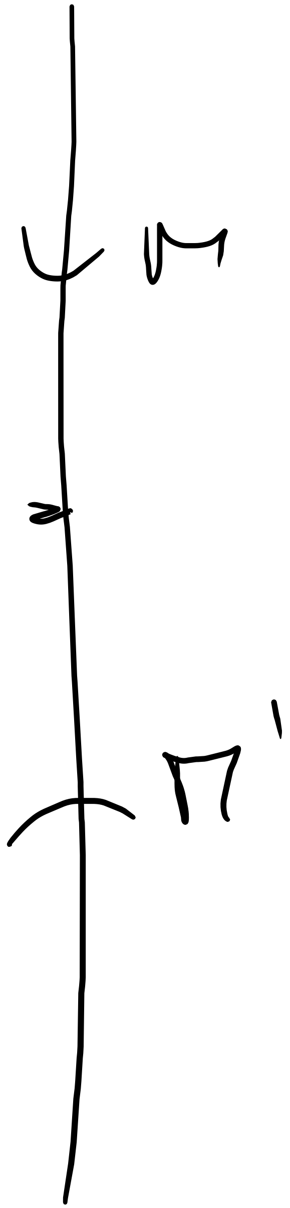


$l = +\infty$ $(-\infty)$ $\qquad l' = -\infty$ $(+\infty$

$$I_l = \{ x \in \mathbb{R} \quad x > M > 0 \}$$

$$I_{l'} = \{ x \in \mathbb{R} \quad x < M' < 0$$

$$I_l \cap I_{l'} = \emptyset$$



Dall'ipotesi $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

segue che $\exists\, n_0$ tale che $\forall n > n_0$ $\underline{a_n \in I_l}$

D'altro canto se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l' \ (\neq l)$

$\exists\, n_0'$ tale che $\forall n > n_0'$ $\underline{a_n \in I_{l'}}$.

Sia $\overset{M}{\tilde{n}_0} = \max(n_0, n_0')$, pertanto se $n > \cancel{\tilde{n}_0} = M$

$a_n \in I_l \wedge a_n \in I_{l'}$

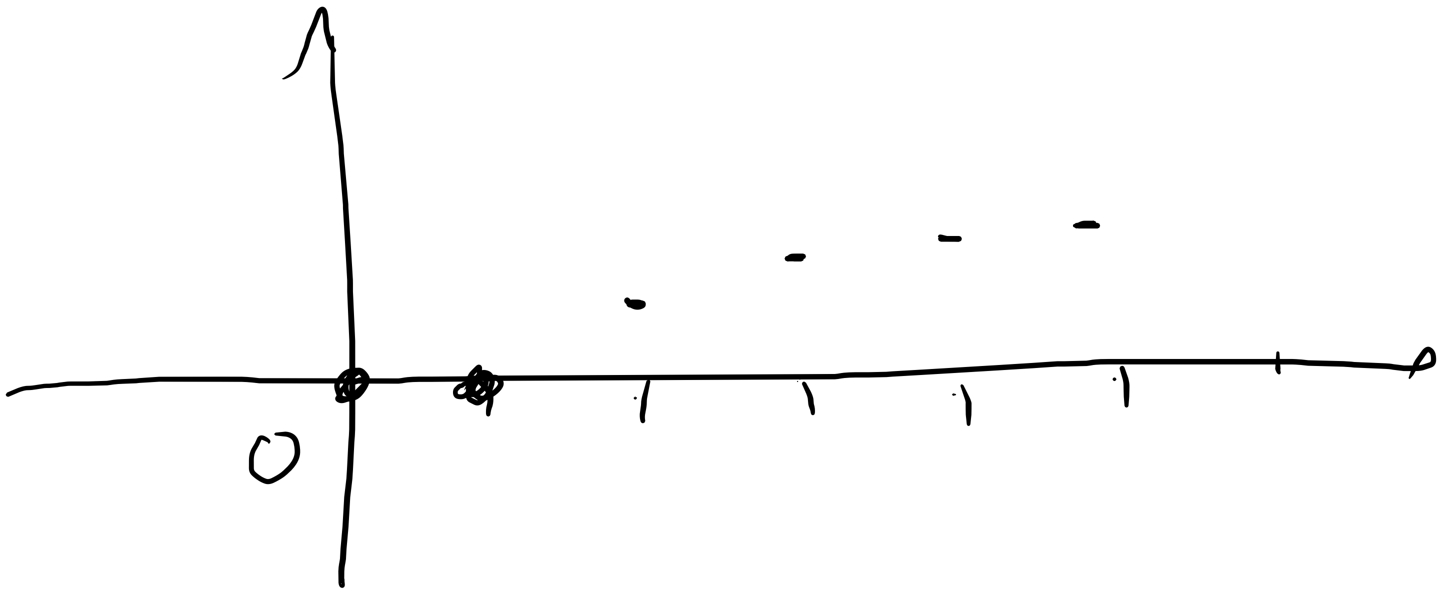
Ma $I_l \cap I_{l'} = \emptyset$ $\lightning$.

Es

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \underline{\underline{1}}$$

$0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad \forall n$

ed è crescente



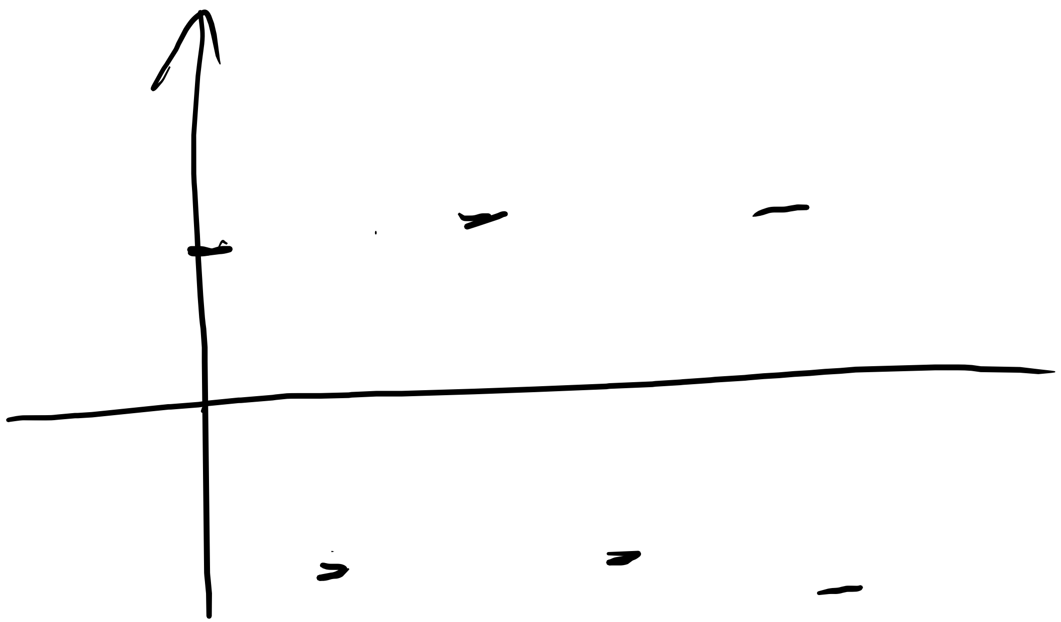
$$\lim_{n \to +\infty} (2 + n^2) = +\infty$$

$$n^2 + 2 \geq 2$$

Verifica per esercizio

$$\lim_{n \to +\infty} -\sqrt{n+3} = -\infty$$

$a_n = (-1)^n$ NON ha limite



$$\{(-1)^{2n}\} \subset \{(-1)^n\}$$

$$\|$$

$$\{1\}$$

$1 \quad \forall n$

$\|$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = -1$$

Successioni definite per ricorrenza (RICORRENZA)

$$\begin{cases} a_0 \\ a_n = f(a_{n-1}, \dots a_1, a_0) \end{cases}$$

ES

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

$a_1 = 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 1 = 2$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 2 = 4$

$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 4 = 8$

$\vdots$

$$\{a_n = 2^n\}$$

In generale

$$\mathcal{R}\begin{cases} a_0 = a_0 \\ a_n = q \cdot a_{n-1} \end{cases} \qquad q \in \mathbb{R} \quad q \neq 1 \qquad 0 < q$$

si parla di progressione geometrica di ragione q.

$a_0, \; a_1 = q a_0, \; a_2 = q^2 a_0, \ldots$

$= \ldots \quad a_n = q^n a_0$

Se $q>1$ la progressione geometrica di ragione q diverge (è divergente)

Se $0<q<1$ la progressione geometrica di ragione q è infinitesima

Se $q=1$ la progressione è costante

$a_n = a_0 \quad \forall n$

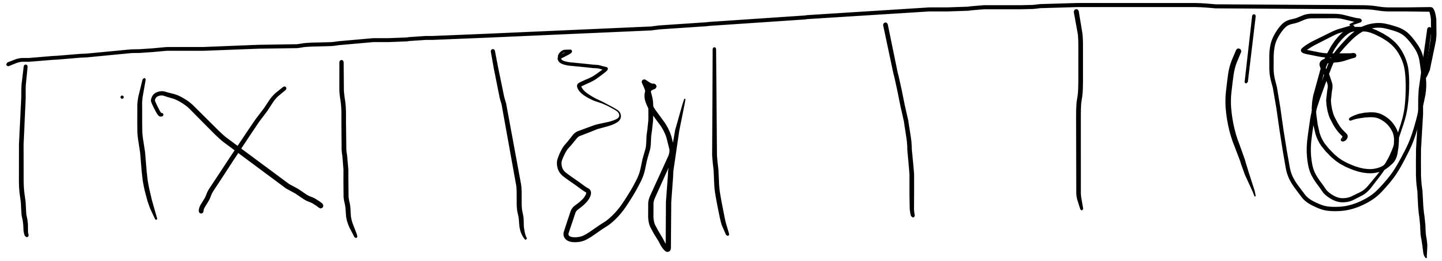
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = n \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

$$1 = a_0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 6 = 3 \cdot a_2$$

$$a_4 = 4 \cdot 6 = 4 \cdot a_3 = 24 \qquad a_5 = 5 \cdot 24 = 120$$

$$a_{70} = 70 \cdot a_{69} = 70 \cdot 69 \cdot a_{68} \cdots$$

$$a_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \leftarrow \text{FATTORIALE di } n$$



n! rappresenta il numero di PERMUTAZIONI

di n oggetti distinti in n posti

$40! \cong 10^{47}$

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni di n oggetti distinti in $k \leq n$ posti

$$\boxed{0! = a_0 = 1}$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Combinazioni semplici cioè il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono ottenere da un insieme con n elementi

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

"n su k"

detto coefficiente binomiale

$$\binom{90}{6} = \frac{90!}{84!\,6!} \simeq 10^9$$

$$\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!} \simeq 9\ldots \simeq \underline{1000}$$