APPENDICE B
LOGICHE A SOGLIA

b.1) Relazioni di ordinamento.

Una classe di funzioni di speciale interesse e' quello delle funzioni booleane "**unate**", che sono di particolare importanza nella discussione delle logiche a soglia.

Si considerino le seguenti due espressioni booleane:

$$f_1 = x_1 . x_2 . x_3 + x_1 . x_2 . x_4 + \overline{x_3} . \overline{x_4} \qquad \text{(b.1.1)}$$

$$f_2 = x_1 . \left(x_2 + \overline{x_3} . \overline{x_4}\right) \qquad \text{(b.1.2)}$$

Si noti che non vi e' alcun modo per esprimere la f_1 senza che nella relativa espressione compaiano sia x_3 che $\overline{x_3}$. La funzione f_2 e' invece scritta in modo tale che, se nell'espressione compare una variabile, non vi appare il suo complemento. Una funzione che puo' essere messa in tale forma e' una funzione **unate**.

Allo scopo di formalizzare la definizione di funzione unate e' opportuno introdurre il concetto di relazione d'ordine.

<u>Definizione b.1:</u> Una relazione ***R*** viene detta di ordinamento parziale se e solo se e' riflessiva, transitiva e antisimmettrica. In altre parole se:

$$x \, \boldsymbol{R} \, x$$

se $\quad x \, \boldsymbol{R} \, y \quad$ e $\quad y \, \boldsymbol{R} \, z \quad$ implicano $\quad x \, \boldsymbol{R} \, z$

e se $\quad x \, \boldsymbol{R} \, y \quad$ e $\quad y \, \boldsymbol{R} \, x \quad$ implicano $\quad x = y$

La relazione $\leq$ e' un esempio di relazione di ordinamento parziale sull'insieme dei numeri reali. In aggiunta una o ambedue delle seguenti espressioni devono essere vere quando a e b sono numeri reali:

$$a \leq b \qquad \text{o} \qquad b \leq a \qquad \text{(b.1.3)}$$

Un insieme di oggetti parzialemente ordinato, in cui ciascuna coppia soddisfi le condizioni (b.1.3) e' detto **totalmente ordinato.** Un esempio di insieme parzialmente ordinato, che non e' totalmente ordinato, puo' essere definito come segue.

L'insieme S sia costituito dagli insiemi A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ con $A \neq B$ e non vuoti.

Se si definisce come relazione d'ordine l'inclusione, dalla fig. B.1.1 si vede che la relazione di ordine parziale e' soddisfatta per ciascuna coppia di elementi.

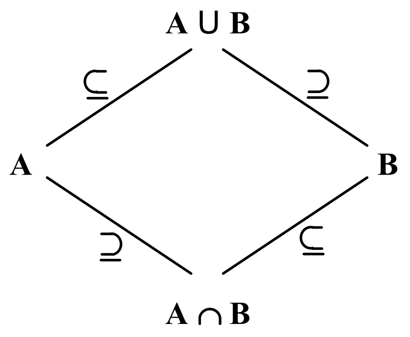

figura b.1.1

Tuttavia

$$A \nsubseteq B \qquad\qquad e \qquad\qquad B \nsubseteq A$$

e quindi S non e' totalmente ordinato.

__Definizione b.2:__ Sia S un insieme parzialmente ordinato dalla relazione d'ordine $\leq$. Si dice che un elemento $u \in S$ e' un **estremo superiore** di un sottoinsieme X con $X \subseteq U$ se qualsiasi $x \in S$ soddisfa la relazione $x \leq u$. L'elemento u e' poi detto estremo superiore minimo di x se $u \leq v$ dove v e' un generico estremo superiore di X. In modo del tutto analogo vengono definiti sia l'**estremo inferiore** che l'estremo inferiore massimo

__Definizione b.3:__ Si dice **reticolo** un insieme L parzialmente ordinato da $\leq$ tale che per ciascuna coppia di elementi di L esiste un estremo superiore minimo e un estremo inferiore massimo.

ESEMPIO

Sia S l'insieme delle funzioni di commutazione delle tre variabili x_1, x_2, x_3. La relazione d'ordine definita su S sia:

$$x \leq y \qquad \text{se} \qquad x + y = y$$

L'insieme S, ordinato da tale relazione, forma un reticolo. Siano infatti a, b e c tre elementi qualsiasi di S. Chiaramente la relazione $\leq$ e' riflessiva. Se poi $a + b = b$ e $b + c = c$ segue che:

$$b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = a + c$$

e quindi la relazione $\leq$ e' transitiva. Infine se $a + b = b$ e $b + a = a$ allora $a = b$ e quindi la relazione $\leq$ e' antisimmettrica e costituisce un ordinamento parziale di S. Ovviamente $a \leq (a + b)$ e $b \leq (a + b)$ e di conseguenza $a + b$ e' un estremo superiore di $\{a,b\}$. Sia ora u un qualsiasi limite superiore di $\{a,b\}$. Segue che:

$$u = a + u \qquad e \qquad u = b + u$$

e quindi

$$u = u + u = (a + u) + (b + u) = (a + b) + u$$

da cui

$$(a + b) \leq u$$

In modo simile:

$$a.b \leq a \qquad e \qquad a.b \leq b$$

da cui segue che a.b e' un estremo inferiore di {a,b}. Inoltre se l e' un generico estremo inferiore di {a,b} si ha:

$$l + a = a \qquad e \qquad l + b = b$$

e quindi:

$$a.b = (l + a).(l + b) = l + a.b$$

Di conseguenza $l \leq a.b$ e quindi a.b e' l'estremo inferiore massimo di {a,b}. Pertanto l'insieme S e' ordinato dalla relazione $\leq$ in un reticolo.

b.2 Le funzioni "unate".

Per definire una funzione "unate e' opportuno definire un ordinamento parziale dei vertici di un ipercubo booleano.

<u>Definizione b.4</u>.

Un vertice $(x_1, x_2, ... ,x_n)$ e' $\leq$ di un vertice $(y_1, y_2, ... ,y_n)$ se e solo se per ciascun i $x_i \leq y_i$. Si definisce $x_i \leq y_i$ se $y_i =1$ quando $x_i = 0$.

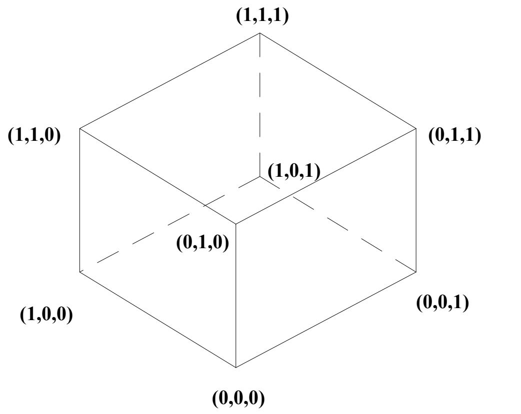

figura b.2.1

Ciascun x_i puo' assumere solamente i valori 0 e 1. Quindi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq$ di $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se e solo se $y_i = 1$ quando $x_i = 0$. Ad esempio:

$$(0,1,0) \leq (0,1,1)$$

mentre i vertici (0,1,0) e (1,0,1) non sono ordinati dalla relazione appena definita. Il reticolo completo di un cubo booleano tridimensionale e' riportato in fig. B.2.1. In tale rappresentazione un vertice X e' ≤ di qualsiasi vertice Y che si trovi nel diagramma sopra di lui e al quale sia collegato da una linea.

Definizione b.5: Una funzione di commutazione f(X) e' motona crescente se solo se $f(X) \leq f(Y)$ quando $X \leq Y$, dove X rappresente il vertice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e Y il vertice $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Il reticolo di fig. B.2.1 e' riportato in fig. B.2.2 (a) indicando con un circoletto nero i vertici in cui la funzione $x_1 + x_2.x_3$ vale 1. In fig. B.2.2 (b) vengono rappresentati i vertici della funzione $x_1 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}$.

Si vede immediatamente che secondo la definizione b.5 la prima delle due funzioni e' monotona crescente, mentre la seconda non lo e'.

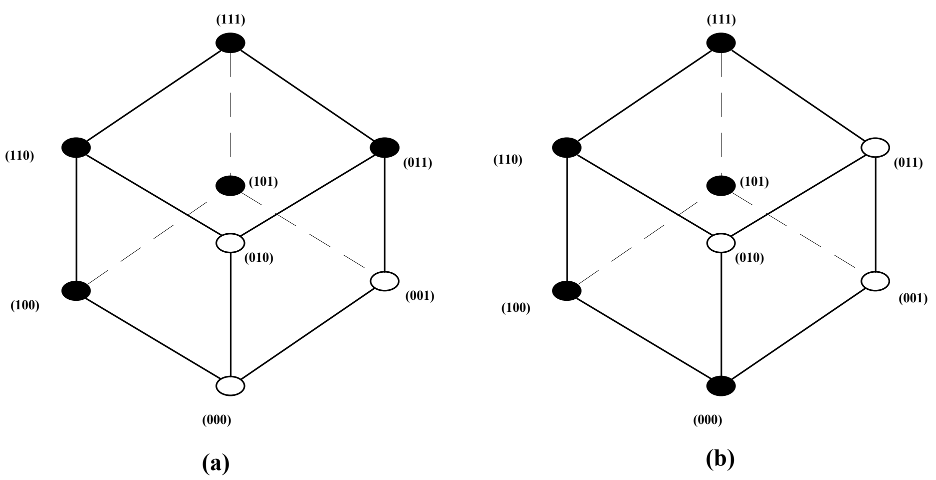

figura B.2.2

Una funzione monotona crescente e' un caso particolare di quelle che ora verranno definite quali funzioni "unate"

Definizione b.6: Sia $X^j = \left(x_1^{j1}, x_2^{j2}, \ldots, x_n^{jn}\right)$ una n-pla in cui

$$x_i^{ji} = x_i \quad \text{se} \quad j_i = 0 \qquad\qquad x_i^{ji} = \overline{x_i} \quad \text{se} \quad j_i = 1$$

Una funzione di commutazione f e' una funzione **unate** se e solo se esiste una n-pla $J=(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ tale che $f(X^j) \leq f(Y^j)$ quando $X^j \leq Y^j$. Si dice in tal caso che la funzione f e' **unate** rispetto alla n-pla J.

Ad esempio la funzione f = $x_1 + \bar{x}_2 . x_3$ non e' monotona crescente, come si puo' verificare in fig. B.2.3 (a). In fig. B.2.3 (b) tuttavia i vertici sono stati ordinati nel reticolo in modo da soddisfare alla $X^j \leq Y^j$ per J = (0,1,0). I valori funzionali sono ovviamente gli stessi, ma si vede che $f(X) \leq f(Y)$ quando $X^j \leq Y^j$. Di conseguenza la funzione f e' secondo la definizione b.6 **unate** rispetto alla n-pla (0,1,0).

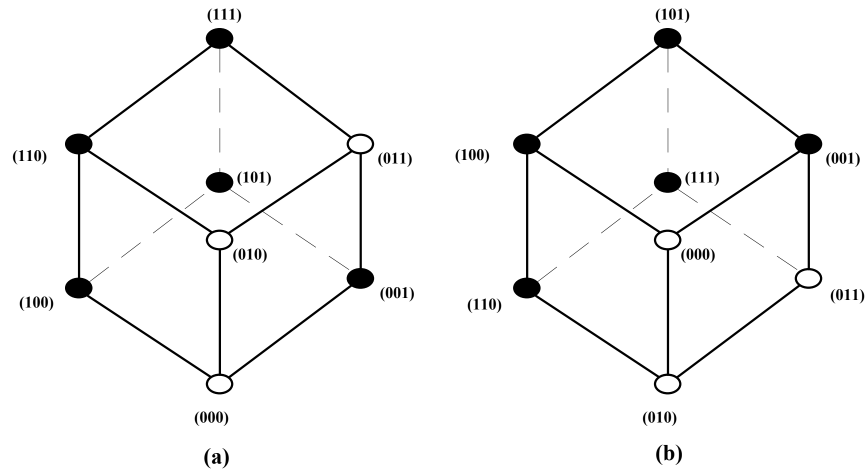

figura B.2.3

<u>TEOREMA b.1:</u> Una funzione $f(x_1, x_2, ... , x_n)$ e' unate rispetto alla n-pla J se e solo se puo' essere espressa come somma di prodotti dei soli simboli $x_1^{j1}, x_2^{j2}, \ldots, x_n^{jn}$ con $J = (j_1, j_2, ... , j_n)$.

a) **<u>Sufficienza</u>**.

Sia $f(x_1, x_2, ... , x_n)$ una funzione espressa come somma di prodotti dei simboli $x_1^{j1}, x_2^{j2}, \ldots, x_n^{jn}$. Si supponga poi che X^j e Y^j siano due vertici tali che $X^j \leq Y^j$. Se F(X) = 0 allora certamente $f(X) \leq f(Y)$. Si supponga invece che f(X) = 1. Definendo con P(X) il generico prodotto di simboli dalla cui somma e' composta la funzione f, allora certamente per qualcuno d'essi sara' verificata la condizione P(X) = 1. Poiche' $X^j \leq Y^j$ in Y ci saranno almeno tanti simboli x_i^{ji} posti a 1 quanti ce ne sono in X. Di conseguenza P(Y)=1 e $f(X) \leq f(Y)$. La funzione $f(x_1, x_2, ... , x_n)$ e' quindi **unate**.

b) **<u>Necessita'</u>**.

Si supponga che la $f(x_1, x_2, ... , x_n)$ sia **unate** ripetto alla n-pla $J = (j_1, j_2, ... , j_n)$ e sia Y un qualsiasi vertice per cui f(Y) = 1. Si supponga poi che $U = (u_1, u_2, ... , u_n)$ sia un vertice tale che $f(U^j) = 1$ con $U^j \leq Y^j$ e che non esista alcun altro vertice V^j per cui $f(V^j) \leq f(Y^j)$ e $V^j \leq U^j$. Si definisca poi con P(X) il prodotto di tutti i simboli x_i^{ji} per cui $u_i^{ji} = 1$. Con tale definizione si ottiene immediatamente che $P(U^j) =1$. Poiche' la $f(x_1, x_2, ... , x_n)$ e' **unate** alora si ha che:

$$f(Z) =1$$

per tutti i Z tali che $U^j \leq Z^j$.

In altre parole se p(Z) = 1 allora $U^j \leq Z^j$. Quindi se P(X) = 1, allora f(X) = 1 e p(X) e' un termine della somma di prodotti con cui e' espressa la funzione f.

Un simile P(X) puo' essere trovato in corrispondenza a ciascun vertice Y per il quale sia P(Y) = 1. Percio' la funzione f puo' essere espressa come somma di tutti questi prodotti distinti P(X).

A titolo di esempio si determini una somma di prodotti per la funzione la cui tavola di verita' e' riportata in fig. B.2.4, **unate** rispetto alla n-pla J = (0,1,0,1).

L'elemento minimo nel reticolo costruibile in relazione a J e' (0,0,0,0) = $(0,\bar{1},0,\bar{1})$.

x_1	x_2	x_3	x_4	f_1
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

figura B.2.4

Un reticolo parziale in cui sono riportati i vertici in corrispondenza ai quali la funzione vale 1 e' illustrato in fig. B.2.5.

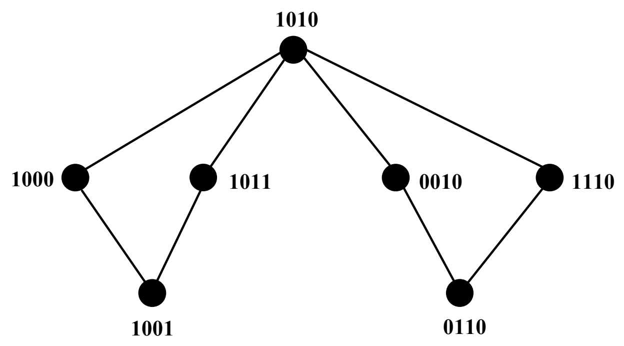

figura B.2.5

Si affida al lettore il compito di completare il reticolo e verificare che la funzione e' **unate**.

In accordo con il teorema b.1 e' necessario prendere in considerazione unicamente i due vertici inferiori, in corrispondenza ai quali la funzione vale 1.

Come nella dimostrazione del teorema, la rappresentazione funzionale di f_1 puo' venir realizzata a partire da x_4^{j4}, x_3^{j3} e da x_2^{j2}, x_1^{j1}, poiche' $(1,0,0,1)_j = (1,\bar{0},0,\bar{1}) = (1,1,0,0)$ e $(0,1,1,0)_j = (0,\bar{1},1,\bar{0}) = (0,0,1,1)$. Pertanto:

$$f_1 = x_4 . \overline{x_3} + x_2 . \overline{x_1}$$

E' bene osservare che la rappresentazione in forma di somma di prodotti ottenuta e' l'unica rappresentazione minima in questa forma.

Per determinare quando una funzione booleana sia **unate** si puo' far uso del seguente teorema, del quale tuttavia non si dara' la dimostrazione.

<u>TEOREMA b.2:</u> Una funzione di commutazione f e' **unate** se e solo se:

1) L'insieme dei primi implicanti essenziali di f costituisce l'unica copertura minima della f stessa.

2) Tale copertura minima e' la rappresentazione nella forma di somma di prodotti in cui compaiono solo i simboli $x_1^{j1}, x_2^{j2}, \ldots, x_n^{jn}$ per $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Dalla fig. B.2,6 appare evidente che l'espressione

$$x_1 + \overline{x_2} . \overline{x_3} + x_2 . x_3$$

e' l'unica copertura minima della funzione composta dagli implicanti primi essenziali. Tuttavia tale copertura minima non soddisfa la seconda condizione del teorema b.2 e quindi la funzione che si e' presa in considerazione non e' una funzione **unate**.

$x_3 \backslash x_2 x_1$	00	01	11	10
0	1	1	1	
1		1	1	1

figura B.2.6

b.3) Generalizzazione circuitale di logiche a resistenza-transistore.

Si consideri il gate NOR in logica RTL di fig. B.3.1. Ci si puo' ragionevolmente chiedere quali siano le prestazioni di tale circuito quando le resistenze di ingresso non sono tutte uguali. Per semplificare l'analisi del circuito si trascurera' la tensione base-emettitore, che normalmente e' molto piccola rispetto alla tensione di ingresso.

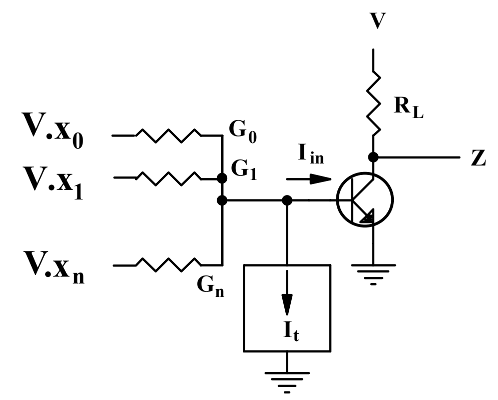

figura B.3.1

In tal caso si ha:

$$I_{in} = V.x_0.G_0 + V.x_1.G_1 + ... + V.x_n.G_n$$

dove il prodotto $V.x_i$ sta ad indicare che se la variabile x_i vale 1 allora alla conduttanza G_i viene applicata la tensione V. Si ricava pertanto:

$$\sum_{i=0}^{n} G_i.x_i - \frac{I_t}{V} = \frac{I_{in}}{V}$$

Se la sommatoria delle correnti di ingresso e' sufficientemente maggiore di I_t/V, nella base del transistore circola una corrente sufficiente a commutarlo e a portare a zero la tensione di uscita. In altre parole, scegliendo opportunamente i valori delle conduttanze G_i si puo' far si' che l'uscita assuma i voluti valori funzionali per le 2^n differenti combinazioni delle variabili di ingresso.

Si supponga ad esempio, con riferimento al circuito di fig. B.3.1, che le variabili di ingresso siano 4 e che le quattro conduttanze di ingresso valgano rispettivamente:

$$G_3 = 0.003 \qquad G_2 = 0.002 \qquad G_1 = 0.001 \qquad G_0 = 0.001$$

Ponendo poi V = 10 volt e I_t = 0,025 A, si vuol tabulare il valore che l'uscita assume in corrispondenza alle 16 possibili combinazioni dei valori degli ingressi.

Si ha:

$$\frac{I_t}{V} = 0.0025$$

Ovviamente nei casi in cui $x_3 = x_2 = 0$ si ha:

$$G_3.x_3 + G_2.x_2 + G_1.x_1 + G_0.x_0 \leq 0.002$$

e quindi l'uscita delle prime quattro righe della tavola di verita' e' 1. Anche per (0100) tale somma e' pari a 0.002 e ancora l'uscita vale 1.

Per (0101) e (0110) la sommatoria vale 0.003 che e' un valore maggiore di I_t/V = 0.0025. In questo caso si ha allora:

$$I_{in} = 10.(0.003 - 0.0025) = 0.005 \text{ A}$$

e una corrente di base di 5 mA puo' facilmente commutare un transistore, portando l'uscita a 0. Analogo comportamento si ha per (0111).

I rimanenti 8 casi, in cui x_3 = 1, sono tali che:

$$\sum_{0}^{3} G_i . x_i \geq 0.003$$

e quindi l'uscita vale 0. La tavola di verita' completa e' riportata in fig. B.3.2.

X_1	X_2	X_3	X_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

figura B.3.2

La funzione f puo' pertanto essere espressa come:

$$f = \overline{x_3}.\left(\overline{x_2} + \overline{x_1}.\overline{x_0}\right) = \overline{x_3 + x_2.\left(x_1 + x_0\right)}$$

Poiche' l'amplificatore a transistori, montato a emettitor comune, introduce comunque un'inversione del segnale di ingresso, il circuito appena esaminato prende il nome di **elemento invertente a soglia**.

Presenta notevole interesse identificare la classe delle funzioni che possono essere realizzate con questi dispositivi; converra' tuttavia, almeno in un primo tempo, riferirsi ad elementi a soglia non invertenti.

b.4) Separabilita' lineare.

Una funzione booleane $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ viene detta separabile linearmente (e in tal caso viene chiamata anche funzione a soglia) se e solo se esiste una n-pla di 1 e 0 $(j_0, j_1, \ldots, J_n)$, un insieme di pesi $N_0, N_1, \ldots, N_n$ e un valore di soglia T tali che:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} \quad \begin{matrix} < T \text{ quando } f = 0 \\ \\ \geq T \text{ quando } f = 1 \end{matrix}$$

essendo:

$$x_i^{ji} = \begin{bmatrix} x_i \ldots\ldots \text{se} \ldots j_i = 0 \\ \overline{x_i} \ldots \text{se} \ldots j_i = 1 \end{bmatrix}$$

Si puo' facilmente verificare che la funzione

$$f = x_3 . (x_2 + x_1 . x_0) \qquad \text{(b.4.2)}$$

e' linearmente separabile. Se il valore di soglia e i pesi vengono scelti proporzionali a I_t/V ed ai pesi dell'esempio del paragrafo precedente, allora:

$$\sum_0^3 N_i . x_i \geq T$$

se e solo se

$$\sum_0^3 G_i . x_i \geq \frac{I_t}{V}$$

Si noti che nell'esempio citato la funzione era $f = \overline{x_3 + x_2 . (x_1 + x_0)}$ in quanto il transistore aveva introdotto una negazione dei valori funzionali definiti dalla b.4.1. Un conveniente insieme di pesi e' $N_3=3$, $N_2=2$, $N_1=N_0=1$ con un valore di soglia pari a 2.5.

La funzione b.4.2 e' pertanto separabile linearmente con la n-pla (0000). Anche la funzione $f = \overline{x_3 + x_2 . (x_1 + x_0)}$ e' separabile linearmente con gli stessi pesi, ma rispetto alla n-pla (1111) e con soglia pari a 5.

TEOREMA b.3: Se si puo' trovare un insieme di pesi che soddisfa la (b.4.1) per un valore di soglia $T_1 > 0$ allora si puo' trovare un insieme di pesi che soddisfa la (b.4.1) per qualsiasi $T_2 > 0$.

Ciascun nuovo peso puo' essere ricavato dei precedenti come segue:

$$N_i^{'} = \frac{N_i . T_2}{T_1}$$

Infatti:

$$\sum N_i . x_i^{ji} \geq T_1$$

e quindi:

$$\sum N_i . x_i^{ji} \geq \frac{T_1 . T_2}{T_2}$$

da cui:

$$\frac{T_2}{T_1} . \sum N_i . x_i^{ji} = \sum \frac{T_2}{T_1} . N_i . x_i^{ji} = \sum N_i^{'} . x_i^{ji} \geq T_2$$

TEOREMA b.4: Se ua funzione f e' separabile linearmente si possono trovare una n-pla $\left(j_0^{'}, j_1^{'}, \ldots, j_n^{'}\right)$ e un insieme di pesi $\left\{N_i^{'}\right\}$ tali che ciascun $N_i^{'}$ sia maggiore o uguale a zero.

Si assuma che f sia separabile sulla base dei pesi $\{N_i\}$, della soglia T e della n-pla $(j_0, j_1, \ldots, j_n)$. Per ciascun $N_i < 0$ si ponga $j_i^{'} = 1 - j_i$ in modo da formare una nuova n-pla. Si formi poi un nuovo insieme di pesi dato da:

$$N_i^{'} = |N_i|$$

da cui si ha:

$$S^{'} = \sum N_i^{'} . x_i^{ji^{'}}$$

Sia ora I l'insieme di tutti gli i tali che $N_i < 0$. Di conseguenza:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i^{'} . x_i^{ji^{'}} = \sum_{i=0}^{n-1} |N_i| . x_i^{ji^{'}} = \sum_{i \in I} |N_i| . x_i^{1-ji} + \sum_{i \notin I} N_i . x_i^{ji} =$$

$$= \sum_{i \in I} N_i . x_i^{ji} + \sum_{i \in I} |N_i| + \sum_{i \notin I} N_i . x_i^{ji} = \sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} + \sum_{i \in I} |N_i|$$

Ne segue che:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i^{'}.x_i^{ji^{'}} \geq T + \sum_{i \in I} |N_i|$$

e quindi, definendo

$$T^{'} = T + \sum_{i \in I} |N_i|$$

si ottiene finalmente:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i^{'}.x_i^{ji^{'}} \geq T^{'}$$

A titolo di esempio si determini la funzione booleana che risulta separata linearmente dalla seguente somma:

$$S = 2.x_2 - x_1 + x_0$$

e dalla soglia T = 1. Si trovi poi un insieme di pesi positivi ed una soglia che separino linearmente la funzione.

Tabulando la somma, come illustrato in fig. B.4.1, per tutti i valori possibili delle variabili, si ottiene la funzione:

$$f = x_2 + \overline{x_1}.x_0$$

x_2	x_1	x_0	S	f (con T=1)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	-1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	2	1
1	0	1	3	1
1	1	0	1	1
1	1	1	2	1

figura B.4.1

Applicando ora il teorema b.4 si ha:

$$N_2^{'} = N_2 = 2 \qquad N_1^{'} = |N_1| = 1 \qquad N_0^{'} = N_0 = 1$$

e rispettivamente

$$T^{'} = T + |N_1| = 2$$

Si puo' verificare facilmente che la somma

$$S' = 2.x_2 + x_1 + x_0$$

e' maggiore o uguale a 2 esattamente per quelle combinazioni di valori per cui la funzione f vale 1.

TEOREMA b.5: Una funzione $\overline{f}$ e' separabile linearmente se e solo se la funzione f e' separabile linearmente.

Sia infatti la funzione f separabile linearmente; esistano cioe' un insieme di pesi $\{N_i\}$, una soglia T e una n-pla J tali che:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} \quad \begin{array}{l} < T \text{ quando } f = 0 \\ \geq T \text{ quando } f = 1 \end{array}$$

Poiche' o x_i^{ji} o x_i^{1-ji} valgono 1, si puo' scrivere:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} + \sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{1-ji} = \sum_{i=0}^{n-1} N_i \qquad \text{(b.4.3)}$$

Si ipotizzi ora che f = 0 e quindi $\overline{f} = 1$.Percio':

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} < T$$

Esistera' pertanto un δ tale che:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} \leq T - \delta$$

e dalla (b.4.3)

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{1-ji} \geq \sum_{i=0}^{n-1} N_i - (T - \delta)$$

Si e' stabilito in tal modo un insieme di pesi $\{N_i' = N_i\}$, una soglia pari a $\sum N_i$ - (T - δ) e una n-pla (1-j_0, 1-j_1, ... , 1-j_n) che soddisfa la (b.4.1) quando $\overline{f}$ = 1.

Se $\overline{f}$ = 0, cioe' quando f =1, si ha:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . x_i^{ji} \geq T > T - \delta$$

e quindi dalla (b.4.3) si ottiene:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i \,.\, x_i^{1-ji} < \sum_{i=0}^{n-1} N_i - (T - \delta)$$

Si e' pertanto dimostrato per qualsiasi funzione booleana f che, se f e' separabile linearmente, lo e' anche la sua negazione.

Quindi se $\overline{f}$ e' separabile linearmente lo e' anche la f e cio' completa la dimostrazione del teorema.

A titolo di esempio si voglia determinare un insieme di pesi, una n-pla e una soglia che permetta la separazione lineare della $\overline{f}$ quando la f e' la funzione tabulata in fig. B.4.1.

E' necessario notare che la dimostrazione del teorema b.5 e' **costruttiva** e fornisce un metodo che permette di calcolare le quantita' richieste. Dall'esempio relativo alla funzione di fig. B.4.1 si aveva:

$$(j_0, j_1, j_2) = (000)$$

e quindi la nuova n-pla e':

$$(1\text{-}j_0, 1\text{-}j_1, 1\text{-}j_2) = (1,1,1)$$

I pesi rimangono inalterati, mentre la soglia diviene:

$$T' = (2 - 1 + 1) - (1 - 0.5) = 1.5$$

E' immediato verificare che:

$$S = 2.\overline{x_2} - \overline{x_1} + \overline{x_0} = \begin{cases} \geq 1.5 \ldots\ldots \text{quando} \ldots f = 1 \\ < 1.5 \ldots\ldots \text{quando} \ldots f = 0 \end{cases}$$

L'importanza dei teoremi b.3 e b.4 risiede nel fatto che essi implicano che una funzione puo' essere realizzata con un elemento a soglia resistore-transistore se e solo se e' separabile linearmente.

In pratica cio' non e' strettamente vero in quanto all'aumentare della complessita' di una funzione puo' verificarsi il caso in cui la differenza di corrente tra i casi 0 e 1 e' insufficiente a commutare il transistore. Per funzioni semplici tuttavia il teorema b.4 assicura che il vincolo fisico di dover usare sempre dei pesi positivi non pone limitazioni alla realizzabilita' di funzioni separabili linearmente. Analogamente il teorema b.5 assicura che qualsiasi funzione separabile linearmente puo' essere realizzata con elementi a soglia invertenti.

TEOREMA b.6: Se una funzione f e' separabile linearmente allora esiste un insieme di pesi ed una soglia tali che le condizioni di separabilita' sono soddisfatte in relazione alla n-pla (0, 0, ... , 0).

La dimostrazione di questo teorema e' molto simile a quella del teorema b.4 e non viene pertanto qui riportata. E' bene tuttavia rilevare che puo' essere necessario far uso sia di pesi che di valori di soglia negativi.

In relazione ai pesi ipotizzati da quest'ultimo teorema la (b.4.1) diviene:

$$S = \sum N_i . x_i$$

Uguagliando tale somma a T si ottiene l'equazione di un iperpiano

$$\sum N_i . x_i = T$$

I vertici dell'ipercubo booleano per i quali la funzione vale 1 si troveranno tutti nello stesso semispazio rispetto a questo piano, mentre i vertici per i quali la funzione vale 0 si trovano tutti nell'altro semispazio. Puo' talvolta essere necessario aggiustare lievemente il valore di soglia T in modo da evitare che il piano contenga qualcuno dei vertici.

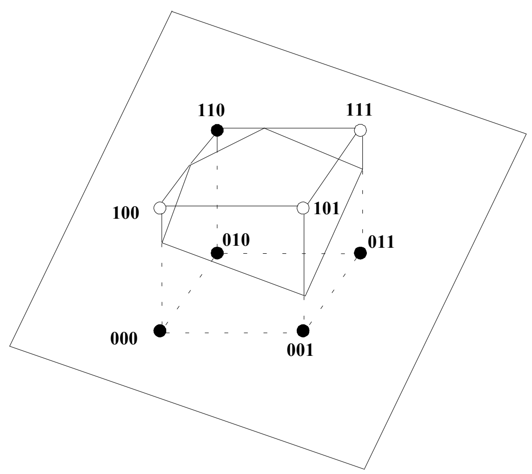

figura B.4.2

Si puo' facilmente verificare che il piano:

$$- 2 . x_2 - x_0 + x_1 = - 1.5$$

separa linearmente la funzione

$$f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} + x_1.\overline{x_0}$$

La fig. B.4.2 illustra l'intersezione di questo piano con il cubo booleano tridimensionale. Si noti che i vertici del cubo per cui la funzione f vale 1 (circoletti anneriti) si trovano tutti dalla stessa parte del piano, mentre quelli per cui la f vale 0 si trovano tutti dall'altro lato.

b.5) Condizioni per la separabilita' lineare.

Fino a questo momento non si e' fatto altro se non determinare quando una data funzione booleana sia linearmente separabile ed e' abbastanza probabile che non esistano altre funzioni separabili.

Nel presente paragrafo verra' illustrato un certo numero di condizioni necessarie affinche' una funzione sia linearmente separabile. Tuttavia, come si vedra', nessuna di queste condizioni sara' anche sufficiente. A tutt'oggi non si conosce alcun insieme di condizioni necessarie e sufficienti che permettano una semplice verifica della separabilita' lineare. Per determinare quindi la separabilita' lineare di una funzione si dovra' dapprima considerarla in rapporto all'insieme delle condizioni necessarie, in ordine di complessita' crescente. Solo se tutte le condizioni necessarie saranno soddisfatte si potra' tentare di determinare con tecniche di calcolo di tentativo un insieme di pesi.

TEOREMA b.7: Una funzione separabile linearmente e' una funzione **unate**.

Sulla base del teorema b.4 si puo' determinare per qualsiasi funzione separabile linearmente in relazione a una data n-pla $(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1})$ un insieme di pesi positivi.

Si consideri questa n-pla come l'elemento piu' basso di un reticolo costituito dai vertici di un ipercubo booleano. Si supponga poi che per il vertice $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la funzione f valga 1.

Si puo' allora scrivere:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . a_i^{ji} = \sum_{i=0}^{n-1} N_i \geq T$$

Si supponga ora che $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ sia un generico vertice del reticolo tale che se $a_i^{ji} = 1$ allora $b_i^{ji} = 1$. Se ne deduce immediatamente che:

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . b_i^{ji} \geq \sum_{i=0}^{n-1} N_i . a_i^{ji} \geq T$$

cioe':

$$\sum_{i=0}^{n-1} N_i . b_i^{ji} \geq T$$

e che la funzione f vale 1. Quindi sulla base del teorema b.1 la funzione f e' **unate**in termini di $\left(x_0^{j0}, x_1^{j1}, .K\ , x_{n-1}^{n-1}\right)$.

A titolo di esempiosi verifichi che la funzione separata linearmente dalla somma

$$S = 2.x_2 + x_1 + x_0$$

e dalla soglia T = 2 e' **unate**.

Come illustrazione del teorema b.7 si costruisca l'appropriato reticolo per la funzione. La somma, che usa tutti pesi positivi, permette di dedurre che l'elemento piu' in basso del reticolo deve essere (010) e che il reticolo stesso puo' essere costruito come illustrato in fig. B.5.1.

I valori di S possono ora venir calcolati per ciascun vertice del cubo booleano. Un confronto di tali valori con la soglia T = 2 mostra che solo i tre vertici per cui S = 0 o S = 1 sono associati a valori funzionali nulli. Inoltre, come ci si aspetta, i valori funzionali sono non decrescenti lungo un qualsiasi percorso dal basso verso l'alto lungo il reticolo. La definizione b.6 e' quindi soddisfatta e la funzione e' quindi una funzione **unate**.

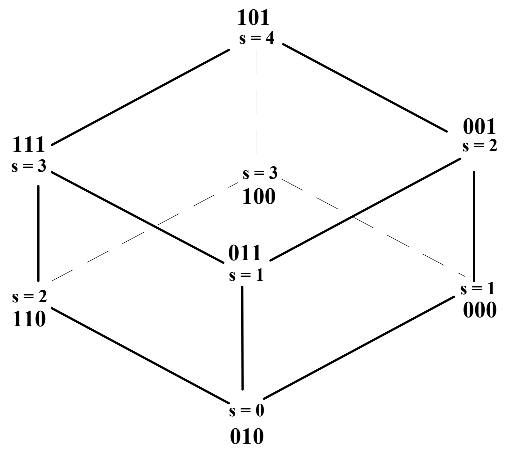

figura B.5.1

Quale secondo esempio, tendente a dimostrare che la condizione enunciata e' necessaria, ma non sufficiente, si verifichi che la funzione, chiaramente **unate**,

$$f = x_0.x_1 + x_2.x_3$$

non e' linearmente separabile.

Poiche' risulta che:

$$f(0,0,1,1) = f(1,1,0,0) = 1$$

se la funzione e' separabile linearmente dev'essere:

$$N_0 + N_1 \geq T \qquad\qquad N_2 + N_3 \geq T$$

D'altra parte f(0,1,0,1) e f(1,0,1,0) valgono 0 e quindi:

$$N_0 + N_2 < T \qquad\qquad N_1 + N_3 < T$$

Sommando tra di loro le espressioni trovate nel primo e nel secondo caso si ottiene:

$$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 \geq 2.T$$

$$N_0 + N_1 + N_2 + N_3 < 2.T$$

Si puo' quindi concludere che per la funzione in esame non si puo' ottenere un insieme di pesi e una soglia in relazione alla n-pla (0, 0, ... , 0). Pertanto la funzione non puo' essere separata linearmente.

Indicando con V_0, V_1, ... , V_k i vertici di un ipercubo booleano, si puo' enunciare il seguente teorema.

TEOREMA b.8: Se esistono k vertici V_0, V_1, ... , V_k per cui una funzione f vale 1 e ka vertici U_0, U_1, ... ,U_k per i quali la stessa funzione vale 0, tali che la loro somma vettoriale soddisfi la condizione:

$$\sum_{j=1}^{k} V_j = \sum_{j=1}^{k} U_j$$

allora la funzione f non e' separabile linearmente.

Siano V_j e U_j due vertici rappresentati come vettore colonna e i pesi siano sistemati in un vettore riga $N = (N_0, N_1, K\ , N_{n-1})$. Si puo' allora scrivere che:

$$S(V_j) = N.V_j$$

Si supponga che esistano k vettori V_j per i quali f = 1 e k vettori U_j per i quali f = 0, tali che:

$$\sum_{j=1}^{k} V_j = \sum_{j=1}^{k} U_j$$

Di conseguenza:

$$N.\left(\sum V_j\right) = N.\left(\sum U_j\right)$$

cioe':

$$\sum N.V_j = \sum N.U_j \qquad \text{(b.5.1)}$$

Tuttavia se f e' separabile linearmente si deve avere:

$$N.V_j \geq T \qquad \text{e} \qquad N.U_j < T$$

e

$$\sum_{1}^{k} N.V_j \geq k.T > \sum_{1}^{k} N.U_j \qquad \text{(b.5.2)}$$

Le (b.5.1) e (b.5.2) sono ovviamente contraddittorie e quindi si deve concludere che la f non e' separabile linearmente.

Si applichi ora, ad esempio, il teorema appena dimostrato alla:

$$f_0 = x_0.x_1 + x_2.x_3$$

che gia' in precedenza si e' visto non essere separabile linearmente.

Si noti che la f vale 1 per i vertici:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0,0,1,1\} = \{1,1,0,0\}$$

mentre vale 0 per i vertici:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0,1,0,1\} = \{1,0,1,0\}$$

Esistono quindi due vettori per i quali f = 1 e due vettori per i quali f = 0, tali che:

$$\sum_{j=1}^{2} V_j = \sum_{j=1}^{2} U_j$$

e quindi dal teorema b.8 si puo' concludere che la f non e' separabile linearmente.

Per funzioni fino a 6 variabili la forma normale suggerisce gli insiemi di valori che le variabili devono assumere per verificare che la funzione non sia separabile linearmente. Non ci si deve certamente proporre di applicare il teorema esaustivamente. D'altra parte anche un'applicazione esaustiva non costituisce una condizione sufficiente per la separabilita' lineare, come e' stato dimostrato da E.F. Moore.

Il teorema che segue e' un ulteriore modo di manipolare funzioni con un piccolo numero di variabili, probabilmente piu' conveveniente dei precedenti. Esso puo' inoltre facilitare la determinazione dei pesi.

TEOREMA b.9: Si supponga che una funzione sia separabile linearmente sulla base dei pesi positivi N_0, N_1, ... , N_{n-1}. Sia poi a_i il numero dei vertici per cui f =1 e x_i^{ji}. Sono allora soddisfatte le seguenti condizioni:

1) Se $N_i \geq N_k$	allora $a_i \geq a_k$
2) Se $N_i = N_k$	allora $a_i = a_k$
3) Se $a_i > a_k$	allora $N_i > N_k$
4) Se $a_i = a_k$	allora i pesi possono essere scelti in modo che $N_i = N_k$

Questo teorema puo' essere dimostrato utilizzando il teorema b.9 oppure con riferimento diretto alla definizione di separabilita' lineare. Ambedue le dimostrazioni sono semplici, ancorche' piuttosto pesanti, e per tale motivo non vengono qui riportate. Si ritiene piu' conveniente in questa sede illustrare il teorema con il seguente

ESEMPIO

Si vuol determinare se delle due seguenti funzioni qualcuna sia separabile linearmente e se cio' e' vero si vuol determinare un insieme appropriato di pesi e un valore di soglia.

$$f_1 = x_2 . x_1 . x_0 + x_4 . x_3 + x_4 . x_2 + x_3 . x_2 + x_3 . x_0 + x_4 . x_1$$

$$f_2 = x_4 . x_3 . \overline{x_0} + x_4 . \overline{x_2} + x_3 . \overline{x_2} + x_3 . \overline{x_1} + x_4 . x_3 . x_0 + x_4 . \overline{x_1} + x_4 . x_0 + \overline{x_2} . \overline{x_1} . x_0$$

Prendendo in considerazione per prima la f_1 si puo' notare che essa e' **unate**. Anziche' applicare esaustivamente i teoremi b.7 e b.8 si puo' tentare di determinare un ordinamento per le variabili. Si riporti pertanto la funzione su una mappa, come illustrato in fig. B.5.2.

$x_4 = 0$

$x_1 x_0 \backslash x_3 x_2$	00	01	11	10
00			1	
01			1	1
11		1	1	1
10			1	

$x_4 = 1$

$x_1 x_0 \backslash x_3 x_2$	00	01	11	10
00		1	1	1
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

figura B.5.2

Si vede immediatamente che $a_4 = 14$, $a_3 = 14$, $a_2 = 13$, $a_1 = 12$ e $a_0 = 12$. Dal teorema b.9 pertanto si ricava:

$$N_4 = N_3 > N_2 > N_1 = N_0$$

La conoscenza dell'ordine dei simboli suggerisce la seguente fattorizzazione:

$$x_4 .(x_3 + x_2 + x_1) + x_3 .(x_2 + x_0) + x_2 . x_1 . x_0$$

In tale forma e' molto piu' evidente che il termine $x_4 . x_0$ non appartiene alla funzione mentre vi appartiene $x_3 . x_0$. Pertanto si deve avere:

$$N_4 + N_0 < T \qquad \text{e} \qquad N_3 + N_0 \geq T$$

cioe':

$$N_4 < N_3$$

La contraddizione tra l'espressione appena ricavata e quella precedentemente trovata porta a concludere che la funzione f_1 non e' separabile linearmente.

La funzione f_2 viene riconosciuta come **unate** dopo aver eseguito la semplificazione:

$$x_4 . x_3 . \overline{x_0} + x_4 . x_3 . x_0 = x_4 . x_3$$

La mappa della funzione e' riportata in fig. B.5.3.

$x_1x_0 \backslash x_3x_2$	00	01	11	10
00			1	1
01	1		1	1
11				1
10				1

$x_4 = 0$

$x_1x_0 \backslash x_3x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1		1	1

$x_4 = 1$

figura B.5.3

Un conteggio dei vertici dice che $a_4 = 15$, $a_3 = 14$, $a_2 = 13$, $a_1 = 13$ e $a_0 = 12$. Cio' suggerisce la fattorizzazione:

$$f_2 = x_4 .\left(x_3 + \overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0\right) + x_3 .\left(\overline{x_2} + \overline{x_1}\right) + \overline{x_2}.\overline{x_1}.x_0$$

Poiche' vi devono essere quattro pesi distinti, con solo $N_2 = N_1$, si puo' provare con la soluzione piu' semplice:

$N_4 = 4$ $\qquad$ $N_3 = 3$

$N_2 = N_1 = 2$ $\qquad$ $N_0 = 1$

Si noti che la piu' piccola somma dei pesi in corrispondenza ad un prodotto booleano presente nella f_2 e' uguale a 5. In altre parole la somma e' inferiore a 5 per qualsiasi altro prodotto degli stessi simboli che non sia incluso nella funzione. pertanto il semplice insieme di pesi ipotizzato e' sufficiente a separare linearmente la f_2 se si sceglie una soglia pari a 5, con riferimento alla n-pla (0, 0, 1, 1, 0).

Negli esempi citati ci si e' accontentati di individuare i pesi per mezzo di metodi di tentativo e questo approccio e' probabilmente sufficiente per le funzioni che possono essere implementate con i dispositivi a soglia facilmente relizzabili. Tuttavia algoritmi che permettano di individuare i pesi di funzioni con elevato numero di variabili separabili linearmente sono di un notevole interesse teorico.

Queste tecniche sono spesso implementate come programmi di calcolo e in alcuni casi esse sono state estese fino a formare la base di tecniche adattive di riconoscimento di configurazioni.

Come si e' accennato e come e' stato visto, non tutte le funzioni booleane sono separabili linearmente, anzi solo una loro piccola porzione lo e'. Ad esempio solo circa il 3% delle funzioni di quattro variabili sono separabili linermente. All'aumentare del numero di variabili una opercentuale sempre minore risulta separabile.

In conseguenza a tale fatto molti sforzi sono stati dedicati all'individuazione di tecniche che permettessero di realizzare funzioni non separabili linearmente utilizzando due o piu' elementi logici a soglia. Tuttavia se la velocita' di commutazione e' un'esigenza importante da soddiosfare e' meglio non superare i due livelli. Purtroppo a tutt'oggi non e' stato individuato alcun metodo generale di progetto e inoltre gli insiemi di pesi che tali tecniche individuano sono talmente complessi da rendere pressocche' impossibile la relizzazione circuitale con elementi di una certa semplicita'.

Un approccio piu' ragionevole sembra quello di limitarsi a considerare solo alcuni casi speciali di funzioni a soglia (come ad esempio funzioni di maggioranza) che sono separabili ricorrendo ad insiemi di pesi di semplice struttura.

A questo tipo di approccio sono dedicati i paragrafi successivi di questa appendice.

b.6) Dispositivi logici magnetici a soglia.

Prima di prendere in considerazione l'interconnessione di dispositivi a soglia e' opportuno esaminare un altro tipo di realizzazione in cui il componente principale e' un nucleo magnetico toroidale. Tale nucleo e' realizzato in ferrite con ciclo di isteresi praticamente rettangolare e magnetizzazione residua relativamente alta, come illustrato in fig. B.6.1.

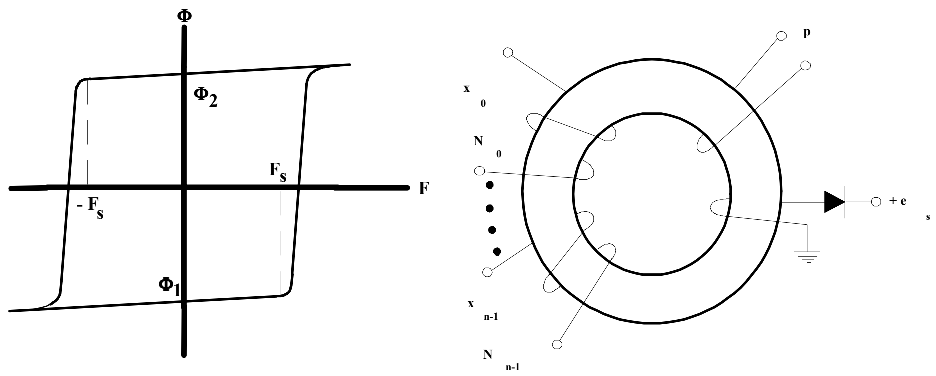

figura B.6.1

Indicando i due stati di magnetizzazione residua con Φ_1 e Φ_2, si supponga che il nucleo si trovi inizialmente nello stato Φ_1. Fino a che il campo magnetico applicato al nucleo si mantiene inferiore a F_s, lo stato del nucleo si manterra' sul lato inferiore del ciclo di isteresi e le variazioni di flusso saranno molto piccole. Quando il campo supera, anche di poco, F_s lo stato di magnetizzazione cambia da Φ_1 a Φ_2 e rimane in tale stato finche' il campo non diviene inferiore a $-F_s$.

E' abbastanza evidente che con un nucleo che abbia tale comportamento si puo' realizzare un dispositivo a soglia, in quanto una variazione relativamente piccola dell'ingresso causa la commutazione dell'uscita tra due stati nettamente distinti.

La realizzazione di un dispositivo a soglia e' illustrata sempre in fig. B.6.1. Vi e' un avvolgimento separato di N_i spire per ciascun ingresso x_i. Indicando co I la corrente che circola in ciascun avvolgimento e facendo corripondere i pesi con il numero di spire N_i e la soglia con F_s, se

$$\sum I . N_i . x_i < F_s$$

il nucleo si trovera' nello stato Φ_1 , in caso contrario in Φ_2 .

E' necessario evidentemente avere il modo di sapere in quale dei due stati si trovi il nucleo magnetico. A tale scopo e' presente un avvolgimento con ingresso impulsivo p e un avvolgimento di "sense". Per determinare lo stato del nucleo all'avvolgimento p viene applicato un impulso di corrente di ampiezza sufficiente a portare il nucleo nello stato Φ_1 , indipendentemente dai valori delle variabili di ingresso. Se quando arriva l'impulso lo stato si trova nello stato Φ_2 , si ha una notevole variazione di flusso che induce nell'avvolgimento di "sense" una tensione facilmente rilevabile, mentre se si trova nello stato Φ_1 non si ha in pratica variazione di flusso e quindi nemmeno tensione indotta.

Il diodo sulla linea di uscita evita che si abbiano impulsi si tensione di polarita' opposta a quella utile quando il nucleo passa dallo stato Φ_1 a quello Φ_2.

ESEMPIO

Progettare un dispositivo magnetico a soglia che implementi la funzione:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 . x_3$$

utilizzando un nucleo con ciclo di isteresi uguale a quello illustrato in fig. B.6.1.

Si supponga che dall'andamento del ciclo di isteresi si rilevi che e' necessaria una forza magnetomotrice di almeno 2.I per commutare lo stato magnetico del nucleo.

Se la corrente relativa al valore logico 1 e' I e N_1 = 2 spire, $N_2 = N_3$ = 1 spira, allora la forza magnetomotrice complessiva sara':

$$\sum I.N_i.x_i = (2.x_1 + x_2 + x_3)$$

e varra' come minimo 2.I quando:

$$f = x_1 + x_2 . x_3 = 1$$

Quando le tre variabili di ingresso valgono contemporaneamente 1 la forza magnetomotrice vale 4.I e quindi la corrente impulsiva nell'avvolgimento di lettura dovra' essere come minimo 6.I per portare il nucleo nello stato Φ_1.

b.7) La realizzazione delle funzioni simetriche con l'uso di dispositivi a soglia.

Le caratteristiche di un dispositivo fisico non sono mai costanti; ad esempio esse variano molto spesso con la temperatura. Questo fatto, unito alle usuali limitazioni di guadagno, pone dei limiti alla complessita' delle funzioni separabili linearmente che possono essere realizzate utilizzando un unico elemento a soglia. Per questi motivi gli elementi a soglia, almeno nelle loro realizzazioni analogiche, hanno trovato applicazione solo nell'implementazione di alcune particolari classi di funzioni.

Una di queste applicazioni e' la realizzazione di funzioni simmetriche. Si puo' facilmente verificare che i pesi (positivi), l'n-pla e la soglia sulla base dei quali la funzione simmetrica:

$$S^n_{\{\geq k\}}\left(x_0^{j0}, x_1^{j1}, \ldots, x_{n-1}^{jn-1}\right) \qquad \text{(b.7.1)}$$

e' linearmente separabile, sono:

$N_i = 1$ $\qquad$ (j0, j1, ... , jn-1) $\qquad$ $T = k$

Infatti se p delle variabili x_i^{ji} valgono 1 e p < k, si avra':

$$\sum N_i \cdot x_i^{ji} = p < T$$

mentre se p ≥ k si ottiene:

$$\sum N_i \cdot x_i^{ji} = p \geq T$$

La realizzazione di un'arbitraria funzione simmetrica, che utilizzi piu' di un dispositivo a soglia, si basa su funzioni elemetari del tipo di quella (b.7.1).

Si voglia ad esempio ottenere una realizzazione a resistori - transistori della funzione simmetrica $S^5_{\{0,1,3,4\}}\left(x_0, \overline{x_1}, x_2, x_3, x_4\right)$.

Come prima cosa e' necessario osservare che:

$$S^5_{\{0,1,3,4\}} = \overline{S^5_{\{2,5\}}} = \overline{S^5_{\{\geq 2\}} . \overline{S^5_{\{\geq 3\}}} + S^5_{\{\geq 5\}}}$$

Si puo' cioe' esprimere la $S^5_{\{0,1,3,4\}}$ in termini di tre funzioni simmetriche, ciascuna delle quali e' separabile linearmente. Se si volesse realizzare ciascuna di queste funzioni si dovrebbe far uso di quattro elementi a soglia, ma vi e' un modo di procedere migliore.

Si supponga infatti di generare per prima la sola funzione $\overline{S^5_{\{\geq 3\}}}$. La sua realizzazione mediante un elemento a soglia e' riportata in fig. B.7.1.

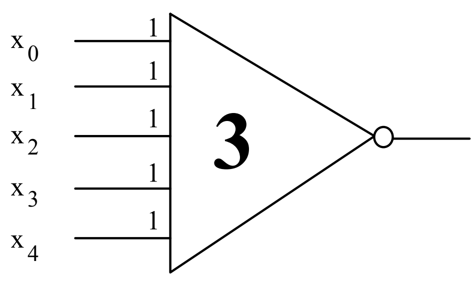

figura B.7.1

Per la realizzazione definitiva della funzione voluta e' necessario solo un altro elemento a soglia. Quest'ultimo puo' essere pensato come un'esecuzione invertente di $S^5_{\{2,5\}}$ con un ulteriore ingresso di peso 3 che riceve l'uscita dell'elemento di fig. B.7.1, come illustrato in fig. B.7.2.

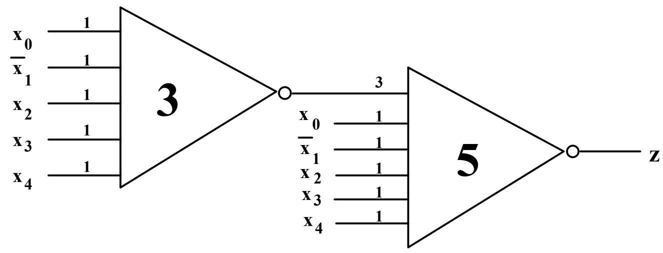

figura B.7.2

Quando l'uscita dell'elemento al secondo livello e' 1, cio' puo' essere interpretato come se la soglia dell'elemento al primo livello fosse stata diminuita da 5 a 2. In tal caso e' sufficiente che solo 2 tra i suoi cinque ingressi valgano 1 perche' il transistore commuti. Si lascia al lettore il compito di verificare che l'uscita z verifica l'equazione (b.7.2).

La piu' importante tra le funzioni simmetriche e' forse la funzione di parita'. Nella realizzazione di questa funzione il concetto di usare l'uscita di alcuni elementi a soglia per controllare le soglie di elemeti a livello piu' basso, come e' stato appena illustrato, e' portato alle sue logiche conclusioni.

Ci si limitera' a trattare funzioni di parita' e disparita' di 2^k-1 variabili, con k positivo intero. Si prenderanno cioe' in considerazione le funzioni:

$$S^k_{\{0,2,....,2^k-1\}} \qquad\qquad S^k_{\{1,3,....,2^k-1\}}$$

A titolo di esempio si prendera' in considerazione la funzione di parita' per k=3. L'estensione ad un numero di variabili superiore e' immediata e le funzioni di disparita' possono essere ottenute osservando che:

$$S^7_{\{0,2,4,6\}} = \overline{S^7_{\{1,3,5,7\}}} \qquad (b.7.3)$$

Poiche' gli elementi usati sono invertenti si vede che l'elemento finale deve essere controllato in modo da avere delle soglie apparenti pari a 1,3,5,7. La soglia deve essere 1 quando il numero di ingressi eccitati e' minore o uguale a 1, 3 qiando il numero di ingressi eccitati e' minore o uguale a 3 e cosi' via.

Si puo' dimostrare che l'operazione e' fattibile scrivendo la seguente espressione, equivalente alla (b.7.3):

$$S^7_{\{1,3,5,7\}} = S^7_{\{1\}} + S^7_{\{3\}} + S^7_{\{5\}} + S^7_{\{7\}} =$$

$$= S^7_{\{\geq 1\}} . \overline{S^7_{\{2,3,6,7\}}} . \overline{S^7_{\{\geq 4\}}} + S^7_{\{3\}} . \overline{S^7_{\{\geq 4\}}} + S^7_{\{\geq 5\}} . \overline{S^7_{\{2,3,6,7\}}} + S^7_{\{7\}}$$

Si supponga ora di tentare di realizzare l'espressione precedente con uno stadio finale a transistori i cui ingressi siano le 7 variabili e le due funzioni $\overline{S^7_{\{2,3,6,7\}}}$ e $S^7_{\{\geq 4\}}$, come illustrato in fig. B.7.3.

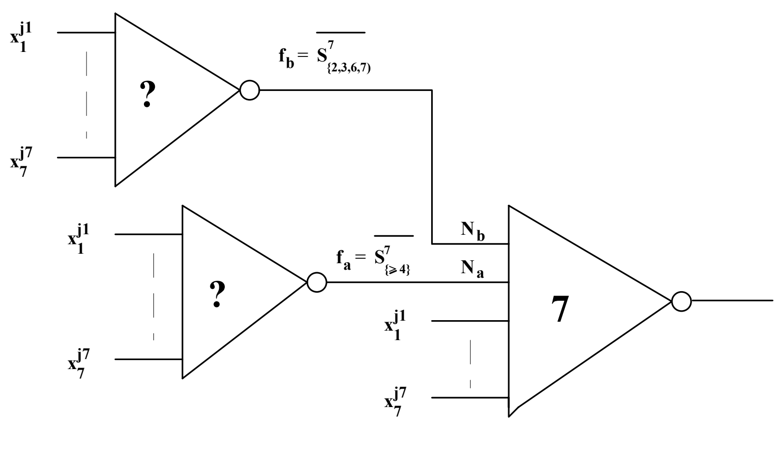

figura B.7.3

Ovviamente la soglia dovra' essere 7 quando $f_A = f_B = 0$. Dall'espressione appena ricavata tuttavia si vede che la soglia dovra' essere ridotta a 5 quando $f_B = 1$ e $f_A = 0$.

Pertanto:

$$T' = 5 = 7 - N_B$$

e quindi $N_B = 2$. In modo analogo, quando $f_B = 0$ e $f_A = 1$ si ha:

$$T'' = 3 = 7 - N_A$$

e quindi $N_A = 4$. Infine per $f_A = f_B = 1$ si verifica che:

$$T''' = 7 - N_A - N_B = 1$$

come voluto. La realizzazione finale e' riportata in fig. B.7.4.

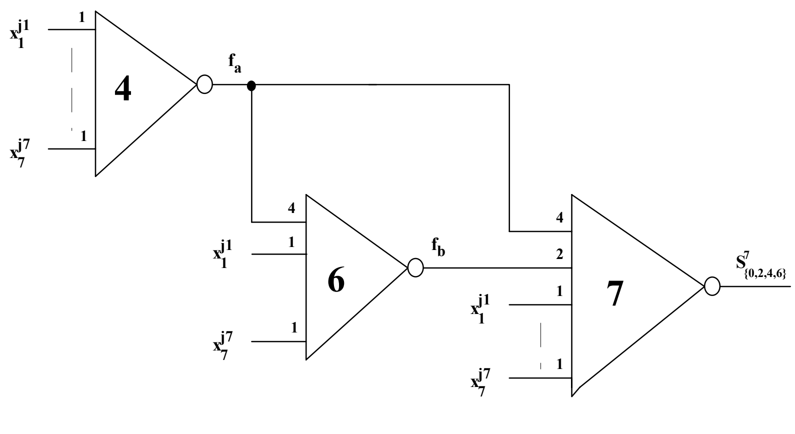

figura B.7.4

Si noti che la $f_A = S^7_{\{\geq 4\}}$ puo' venir realizzata con un unico elemento a soglia, mentre cio' non e' possibile per la f_B.

Si puo' tuttavia osservare che:

$$f_B = \overline{S^7_{\{2,3\}} + S^7_{\{6,7\}}} = \overline{S^7_{\{\geq 2\}} . \overline{S^7_{\{\geq 4\}}} . S^7_{\{6,7\}}}$$

Si vede pertanto che la f_B e' realizzabile utilizzando come ingressi solo le variabili di simmetria e la f_A, che e' gia' stata realizzata. Si lascia al lettore ikl compito di verificare il valore dell'uscita per ciascun possibile numero di ingressi posto a 1. In fig. B.7.5 tuttavia sono riportate le soglie apparenti e le uscite di ciascun elemento in corrispondenza dei diversi possibili numeri di ingressi posti a 1.

Σx_i^{ji}	T'_A	f_A	T'_B	f_B	T'_C	f_C
0	4	1	2	1	1	1
1	4	1	2	1	1	0
2	4	1	2	0	3	1
3	4	1	2	0	3	0
4	4	0	6	1	5	1
5	4	0	6	1	5	0
6	4	0	6	0	7	1
7	4	0	6	0	7	0

figura B.7.5

Si noti che per poter ottenere tutte le sette possibili transizioni dell'uscita e' stato necessario che i tre transistori, con cui sono realizzati i tre elementi a soglia, assumessero tutte le otto possibili combinazioni di valori. In generale saranno necessari n+1 stati distinti quando le transizioni del'uscita sono n.

Come si vedra' poco piu' avanti non e' tuttavia sempre possibile ottenere considerevoli vantaggi nella realizzazione di funzioni simmetriche con elementi a soglia. E' sempre possibile invece ottenere realizzazioni ottimali di circuiti di test di parita' con un numero di ingressi pari 2^k -1. In fig. B.7.6 e' riportato il circuito per 15 variabili e ulteriori estensioni ad un numero di variabili superiore sono immediate.

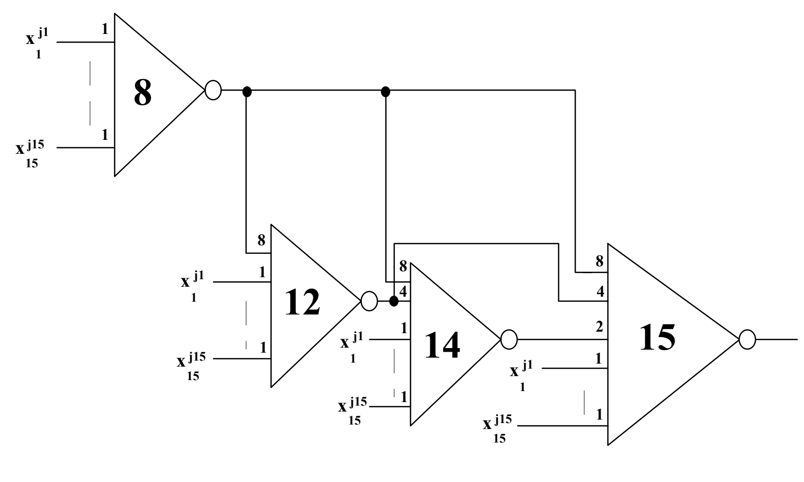

figura B.7.6

Quale ulteriore esempio si voglia realizzare la $S^9_{\{0,3,5,7\}}$. Tentando di procedere come gia' fatto nella realizzazione delle funzioni di parita', si ottiene:

$$S^9_{\{0,3,5,7\}} = \overline{S^9_{\{1,2\}} + S^9_{\{4\}} + S^9_{\{6\}} + S^9_{\{8,9\}}} =$$

$$= \overline{S^9_{\{\geq 1\}} . f_a . f_b + S^9_{\{\geq 4\}} . f_a + S^9_{\{\geq 6\}} . f_b + S^9_{\{\geq 8\}}}$$

Si noti che la soglia attuale del dispositivo al primo livello dovra' essere 8. Per far si' che la soglia sia correttamente aggiustata per i tre casi in cui meno di 8 ingressi devono commutare il transistore, dovranno essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$8 - N_b = 6$$

$$8 - N_a = 4$$

$$8 - N_a - N_b = 1$$

e cio' e' chiaramente impossibile. E' necessario quindi utilizzare tre ingressi funzionali per ottenere l'elemento a soglia finale. Deve cioe' essere:

$$S^9_{\{0,3,5,7\}} = \overline{S^9_{\{\geq 1\}} . f_c + S^9_{\{\geq 4\}} . f_a + S^9_{\{\geq 6\}} . f_b + S^9_{\{\geq 8\}}}$$

In questo caso si possono scegliere tre funzioni linearmente separabili in termini di variabili di simmetria come segue:

$$f_c = \overline{S^9_{\{\geq 2\}}} \qquad f_a = \overline{S^9_{\{\geq 5\}}} \qquad f_b = \overline{S^9_{\{\geq 7\}}}$$

In questo caso tuttavia non si puo' conseguire alcun risparmio utilizzando qualcuna di queste funzioni nella realizzazione delle altre. La realizzazione completa, soluzione del problema proposto, e' riportata in fig. B.7.7.

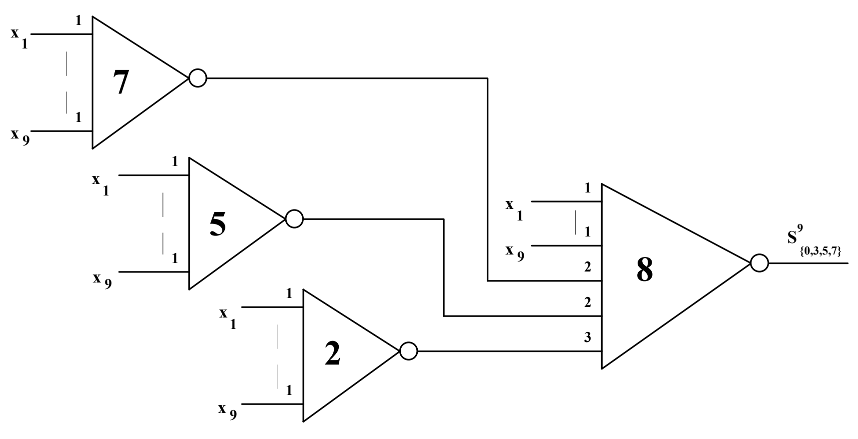

figura B.7.7

Sebbene vi sia stato e vi sia tuttore un considerevole interesse nei confronti dei dispositivi a soglia, questo interesse e' in massima parte teorico. Nessuno dei dispositivi a soglia di tipo analogico e' oggi sufficientemente veloce per avere una larga diffusione.

Algoritmi per calcolatore che realizzino funzioni molto complesse presentano in pratica interesse solo per la possibilita' di simulare elementi a soglia come dispositivi adattivi di "pattern recognition". L'estensione dei dispositivi logici lineari al campo dell'intelligenza artificiale e' poi un argomento di notevole interesse, ma non e' possibile trattarlo in questa sede.

Per funzioni fino a 6 variabili e' possibile ottenere delle realizzazioni economiche seguendo una procedura simile a quella impiegata per le funzioni simmetriche. Non e' garantito tuttavia che si possa ottenere la realizzazione minima senza condurre un certo numero di progetti di tentativo.