Sistemi di numerazione e codici

Capitolo 1

Generalità

- Sistema di numerazione
  - Insieme di simboli (cifre) e regole
  - stringa di cifre ↔ valore numerico
  - codici posizionali (il valore dipende dalla posizione delle cifre)

In base 10 (la piu' comune)

$$A_n A_{n-1} A_{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots A_o \Rightarrow N = A_n .10^n + A_{n-1} .10^{n-1} + A_{n-2} .10^{n-2} + \ldots\ldots + A_o .10^0$$

Ad esempio

$$1923 \Rightarrow 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

  - Si possono pero' adottate altre basi con B≠10
    (le piu' comuni: B=2, B=8, B=16)
    si adottano B cifre diverse
    (Ad.es B=16 :   0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F)

Sistema di numerazione su base qualsiasi

- La base 2 e’ la piu’ piu’ piccola possibile (ON/OFF) - Binary Digit
- Le basi 8 e 16 permettono rappresentazioni piu’ compatte del numero binario
  - Il passaggio da base 2 a base 8 o16 e viceversa e` particolarmente facile

$$55_{10} = 110111_2$$

$$110111_2 = 37_{16} = 67_8$$

Conversione tra basi diverse

- Divisione successiva per la Base
  - si divide ripetutamente il numero per la base voluta fino ad ottenere un quoziente nullo e si memorizzano i resti
(la seq. dei resti ordinata rappresenta la notazione)
- Per quanto detto il passaggio da basi B a B^n e viceversa risulta particolarmente semplice

Es:

$$157_{10} = 10011101_2 = 235_8 = 9D_{16}$$

Conversione di frazioni

- La parte frazionale viene distinta dalla parte intera mediante una “virgola” : “,”

Ad esempio

$$1923{,}45 \Rightarrow \underbrace{1\cdot 10^3 + 9\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0}_{\text{parte intera}} + \underbrace{4\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}}_{\text{parte frazionale}}$$

- La virgola distingue le cifre che vanno moltiplicate per B con esponente positivo da quelle con esponente negativo
- La conversione avviene in tal caso per moltiplicazioni successive

$$0{,}375_{10} = 0{,}011_2$$

Conversione di frazioni

- NOTA BENE
  - Se con una base una notazione frazionaria richiede un numero finito di cifre, potrebbe richiederne infinite con una diversa notazione

$$(1/3)_{10} = 0{,}333333\ldots_{10} = 0{,}1_3$$

$$0{,}6375_{10} = 0{,}1010\overline{0011}0_2$$

- Conversione da binario a decimale
  - Parte intera: raddoppio successivo + somma a partire dalla cifra piu' significativa
  - Parte frazionaria: idem + successiva divisione per 2^f ove f sono i bit rappresentativi della parte frazionale

$$101{,}010_2 = (5 + 2/8)_{10} = 5{,}25_{10}$$

Aritmetica Binaria

- Addizione

  0+0=0

  0+1=1

  1+0=1

  1+1=0 (+ riporto di 1 al rango superiore)

- Sottrazione

  0-0=0

  1-0=1

  1-1=0

  0-1=1 (+ riporto negativo di 1 al rango superiore)

  - La sottrazione puo' pero' avvenire tramite la somma usando una notazione complementata

Complemento decimale

- ES:

$$123-73=123+comp(73)=123+927=1|050=50$$

  - In questo caso si usa un complemento a 10^3=1000 ovvero comp(73)=1000-73 che e' facile da calcolare basta adottare la corrispondenza

$0 \rightarrow 9$	$9 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 1$
$2 \rightarrow 7$	$7 \rightarrow 2$
$3 \rightarrow 6$	$6 \rightarrow 3$
$4 \rightarrow 5$	$5 \rightarrow 4$

e poi sommare 1

$$073 \rightarrow 926+1=927$$

Complementi a B e B+1

- Analogamente in altre Basi (ad esempio base 2)

Si definiscono:

$C_B = B^n - N$ e $C_{B-1} = B^n - 1 - N$

Da cui si desume che:

$C_B = C_{B-1} + 1$

Attenzione : il (Complemento a B) – 1 non e' uguale al Complemento a (B-1)

- Il complemento a B-1 e' semplice da calcolare
  - basta una tabella di equivalenza (come prima)

$C_{B-1} = B^n\text{-}1\text{-}N = B'B'B'B'B'B'B'B' – N$ ove $B'=B-1$

- Il complemento a B si ottiene dal precedente sommandovi 1

$$N_1 - N_2 \rightarrow N_1 + C_B(N_2) = N_1 + (B^n - N_2) = B^n + (N_1 - N_2)$$

Numeri negativi

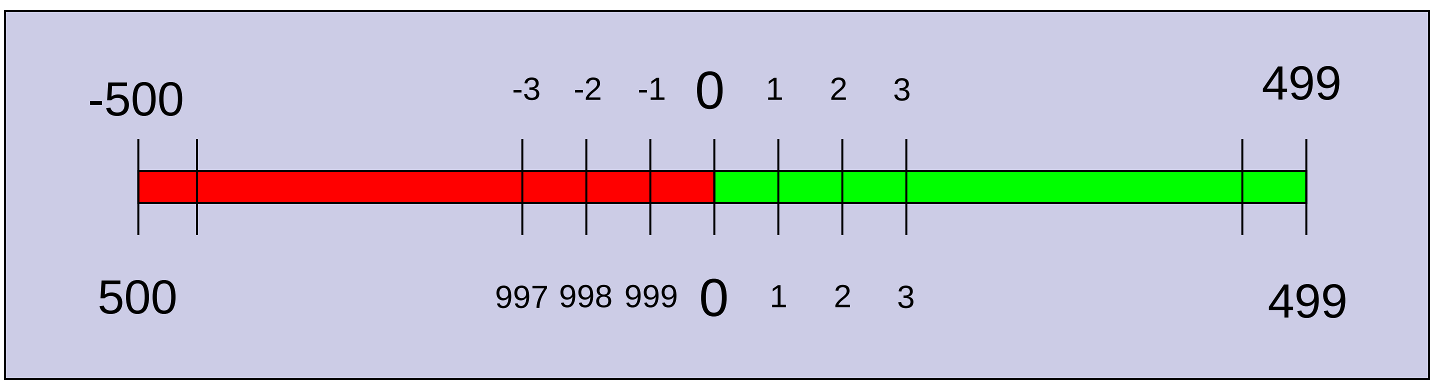
- Dalla differenza di N_1 ed N_2 vi possono essere due casi:
  - $N_1 \geq N_2$: il risultato risulta maggiore o uguale a B^n, che pertanto va eliminato dal risultato finale (eliminazione dell'1 piu' significativo oltre il range del numero stesso)
  - $N_1 < N_2$: il risultato risulta minore di B^n, e deve essere inteso come complemento a B (pertanto rappresentante di un numero negativo) del risultato

Numeri negativi

- I numeri negativi possono pertanto essere rappresentati in base al loro complemento a B

$$-143 \rightarrow C_{10}(143) = 999 - 143 + 1 = 856+1 = 857$$

- Si può notare che il range dei numeri risulta modificato:
  - 0   < n < 499 : range dei numeri positivi
  - 500< n < 999 : range dei numeri negativi



- Ovviamente in base 10 questa non è una pratica usuale

Numeri binari negativi

- Risulta invece estremamente diffusa nel caso di numeri binari ove i numeri negativi vengono rappresentati in base al loro complemento a 2

Es:

$$-9 = -01001 = C_2(01001) = 10110 + 1 = 10111$$

1	0	1	1	1

Bit di segno: $\begin{cases} \text{0: numero positivo} \\ \text{1: numero negativo} \end{cases}$

Numero positivo: i restanti numeri rappresentano il numero stesso

Numero negativo: i restanti numeri rappresentano il numero complementato

$$C_2(0111) = 1000 + 1 = 1001 = 9_2$$

Errori nei risultati

- Il risultato di un’operazione somma/sottrazione e coerente solo se il risultato non esce dal range dei numeri rappresentabili
  - Ovvero
    - o non si e’ avuto alcun riporto ne’ nel bit di segno ne’ fuori dalla parola
    - o si sono avuti riporti in entrambi
    - se si e avuto un solo riporto il risultato e’ errato

$0011 \rightarrow 3+$	$0011 \rightarrow 3+$	$1011 \rightarrow -5+$	$1111 \rightarrow -1+$
$\underline{0010 \rightarrow 2=}$	$\underline{0110 \rightarrow 6=}$	$\underline{1010 \rightarrow -6=}$	$\underline{1110 \rightarrow -2=}$
$0101 \rightarrow 5$	$1001 \rightarrow -7$	$10101 \rightarrow 5$	$11101 \rightarrow -3$
nessun riporto	riporto sul segno	riporto fuori dalla parola	riporto sia sul segno che fuori dalla parola

: cifre “out of range” e pertanto non vengono calcolate

: bit di segno

Moltiplicazione e Divisione

- Moltiplicazione binaria

    0*0=0

    0*1=0

    1*0=0

    1*1=1

  nel caso di piu' cifre si procede come nel caso decimale

- Divisione
    - vengono di solito eseguite per sottrazioni successive

Modificare il numero di BIT

- Aumentare o diminuire
- Per notazioni “signed” ed “unsigned”
- Da unsigned verso signed

Codici

- **Codice**:
  Insieme di parole [C] adottato per rappresentare gli elementi di un insieme [C*]
- **Simboli:**
  elementi costituenti le parole di codice
- **Codificazione**:
  associazione parola di [C]↔ elemento di [C*]
- **Codice non ambiguo:** se la corrispondenza e' univoca,
- **Codice ambiguo**: se almeno una parola di [C] rappresenta 2 o piu' elementi di [C*];

- se vi sono K simboli ed N elementi e le parole sono di lunghezza l:
  usando n simboli → K^n combinazioni per non avere ambiguita' $N<K^n$

$$n \geq \log_K N$$

- **Codice efficiente / ridondante /ambiguo:** se l=n , l>n , l<n

Codici Efficienti

- Rappresentazioni cifre decimali
  4 bits = 16 configurazioni → 6 configurazioni sono inutilizzate
- Codice BCD
  codice ponderato (detto anche codice 8421)
- Codice eccesso tre
  (binario +3) e' un codice autocomplementante
- Codice Aiken (o 2421)
  autocomplementante e ponderato

BCD

0	0000	9	1001
1	0001	8	1000
2	0010	7	0111
3	0011	6	0110
4	0100	5	0101

Ecc. 3

0	0011	9	1100
1	0100	8	1011
2	0101	7	1010
3	0110	6	1001
4	0111	5	1000

Aiken

0	0000	9	1111
1	0001	8	1110
2	0010	7	1101
3	0011	6	1100
4	0100	5	1011

Codici Ridondanti

- Utili ad evidenziare/correggere eventuali errori
(si usano k bit per il controllo)
  - $m = n + k$
- **Ridondanza**: rapporto tra i bit usati ed i bit strettamente necessari
  - R (ridondanza) = $m / n = 1 + k / n$
- **Peso**: numero di bits diversi da 0
- **Distanza**: numero di bits per cui 2 configurazioni differiscono
- **Molteplicita' d'errore**: Distanza tra la configurazione trasmessa e quella (non significativa) ricevuta – errori singoli, doppi, tripli …
- **Distanza di Hamming (h)**: la minima distanza tra tutte le possibili coppie di parole di un codice: Sono individuabili gli errori con molteplicita' minore di h. Se h e' grande si puo' operare una correzione dell'errore (codici autocorrettori)

Probabilita' di errore non rilevato

Sia p: la probabilita' di errore di ogni singolo bit

la probabilita' che una parola si trasformi in un'altra a distanza esattamente r e'

$$P_r = p^r \cdot (1-p)^{m-r} \binom{m}{r}$$

r: cifre errate

m-r: cifre esatte

Combinazioni possibili

la probabilita' che l'errore non sia rilevato dipende da quante configurazioni significative N_r si trovano a distanza "r" dalla parola

$$P_{tr} = P_{sr} . p^r . (1-p)^{m-r} . \binom{m}{r} \qquad \text{ove} \qquad P_{sr} = \frac{N_r}{\binom{m}{r}}$$

conf. significative

conf. possibili

La prob. di errore non rilevato e la sommatoria per ogni r

$$P_t = \sum_{h}^{m} {}_r N_r p^r . (1-p)^{m-r} \cong N_h p^h$$

tipicamente p <<1

Codice a controllo di parita’

- Ai vari bit che compongono la parola si aggiunge un ulteriore bit (ridondante)
  - detto bit e’ 0 se il peso della parola e’ pari
  - e’ 1 se il peso e’ dispari

  La parola risultante sara’ a peso pari
- La distanza di Hamming e’ 2
- E’ in grado di rilevare tutti gli errori di molteplicita’ dispari

Esempio cod. a controllo di parita'

- Un codice a 7 bit (128 parole)
- ha una ridondanza R=7/6=1,16
- Vi sono 64 parole ed altrettante config. non significative
- Per ogni parola il numero di parole che distano 2 sono:

$$N_h = \binom{7}{2} = 21$$

Per avere un'altra parola del codice si devono commutare 2 bit su 7

- Supponendo p=0,01
- La prob. di errore non rilevato e'

$$P_t = N_h p^h = 21 \cdot 0{,}01^2 = 0{,}21\%$$

In pratica coincide con la probabilita' che vi sia un errore di molteplicita' 2 (solo perche' tutte le configurazioni a distanza 2 sono significative)

Codici a peso costante

- Tutte le parole hanno lo stesso peso w
- la distanza di Hamming e' h= 2

se '*m*' e' la lunghezza

- le parole significative saranno $\binom{m}{w}$
- mentre le config. non signif. saranno $2^m - \binom{m}{w}$
- Il numero di parole a distanza 2 e'

$$N_2 = w(m-w)$$

Bisogna commutare uno 1→ 0
(in w modi)
ed uno 0 → 1
(in m-w modi)

pertanto

$$P_t = N_2 p^2 = w(m-w)p^2$$

Non basta che vi sia un errore doppio, ma questo deve portare anche in un'altra configurazione significativa

Codice 2 da 5

- Usa tutte le configurazioni possibili infatti:

$$n = \binom{5}{2} = 10$$

0	01100	5	00110
1	11000	6	10001
2	10100	7	01001
3	10010	8	00101
4	01010	9	00011

- Ridondanza

$$R = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

- Prob. di errore non rilevato con p=0,01

$$P_t = 2(5-2)\,p^2 = 0{,}06\%$$

Codice biquinario

- Doppio controllo di parita' sui primi 2 e sugli ultimi 5 bits
- Ridondanza

$$R = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

0	10 10000	5	01 10000
1	10 01000	6	01 01000
2	10 00100	7	01 00100
3	10 00010	8	01 00010
4	10 00001	9	01 00001

- N_h=5
- Prob. di errore non rilevato

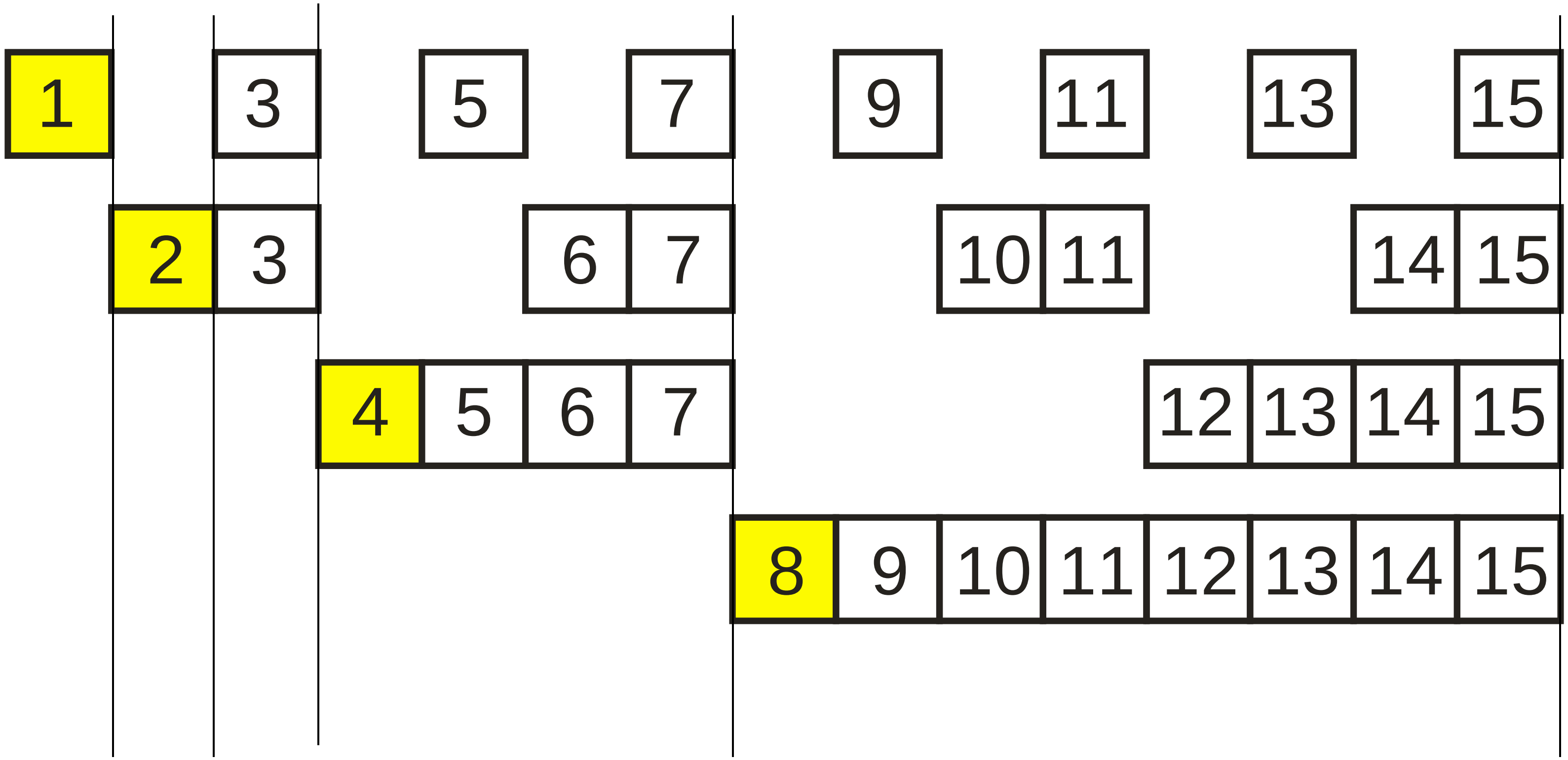
$$P_t = N_h p^h = 5 \cdot (0{,}01)^2 = 0{,}05\%$$

Le configurazioni significative a distanza 2 da ogni parola sono SOLO 5

Codici di Hamming

- Sono codici con h=3 o h=4 usati come rilevatori/autocorrettori di errore
- molteplicità di errore rilevabile r < h-1
- molteplicità di errore correggibile c < h/2
- Dato un codice efficiente ad n bits vi si aggiungono k bits di controllo che controllano la parita' di gruppi di bits i bits aggiunti si posizionano alla posizione 2^b
  - bit 1 : controllo di parita' per 1,3,5,7,9,11,13,15,17, ….
  - bit 2 : controllo di parita' per 2,3,6,7,10,11,14,15, …..
  - bit 4 : controllo di parita' per 4,5,6,7,12,13,14,15, ….
  - bit 8 : controllo di parita' per 8,9,10,11,12,13,14,15, …..
- In ricezione si verifica la parità per ogni gruppo e si scrive 0 se verificata, 1 se non verificata. Il risultato (letto in binario) darà la posizione del bit errato

Codice di Hamming (schema)



: Bits di controllo (controllori di parita')

Nota: la commutazione di un bit della parola comporta la communtazione di almeno due bits di parita' pertanto la distanza minima tra le parole e' 3
N.B. NON tutte le parole sono distanti 3 tra loro ma tutte le parole sono sicuramente distanti ALMENO 3 altre distano molto di piu'

Cod. di Hamming (esempio)

Si voglia trasmettere : [0 1 0 1]

Si trasmettera': [b_1 b_2 0 b_4 1 0 1]

ove b_1=0 , b_2 = 1 , b_4 = 0

Si trasmettera' pertanto [0 1 0 0 1 0 1]

Supponendo di ricevere [0 1 0 1 1 0 1]

parita' dei bit 1,3,5,7: 0
parita' dei bit 2,3,6,7: 0
parita' dei bit 4,5,6,7: 1

Risultato : errore in posizione 1 0 0 → ovvero 4

Cod. di Hamming

- Per il corretto funzionamento

$$m \leq 2^k - 1$$

- Si dicono ottimi i codici in qui per la relazione di cui sopra e’ verificata con il segno uguale

$$n + k = 2^k - 1$$

$$n = 2^k - (k+1)$$

k=1	n = 0
k=2	n = 1
k=3	n = 4
k=4	n = 11
k=5	n = 26

Cod. di Hamming

- Nel caso di un cod. di Hamming a 7 bits

$P_t \leq 15 \cdot p^3$ ⇒ se p= 0,01 ⇒ $P_t \leq 15 \cdot 0.01^3 = 0{,}0015\%$

Ammetterndo che le parole a distanza 3 siano tutte parole del codice
e tutte le altre parole del codice

- Esistono anche cod. di Hamming con h=4 (vi e' un ulteriore bit di parita` globale: si rilevano errori doppi e tripli e si correggono quelli singoli

$P_t \leq 15 \cdot p^4$ ⇒ se p= 0,01 ⇒ $P_t \leq 15 \cdot 0.01^4 = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$

Cod. di Hamming (h=4)

- Esempio
  - si voglia trasmettere [1 1 0 0]
  - si crea la parola [p b_1 b_2 1 b_4 1 0 0]
  - ovvero [p 0 1 1 1 1 0 0]
  - quindi [0 0 1 1 1 1 0 0]
  - supponiamo vi sia un errore doppio [0 0 1 0 1 1 1 0]
  - che l'errore sia doppio lo si rileva perché il bit di parità è corretto, mentre le parità parziali non lo sono
    - parità complessiva : 0
    - parità bit 1,3,5,7 : 1
    - parità bit 2,3,6,7 : 0
    - parità bit 4,5,6,7 : 1
  - Vi sono 2 possibilità:
    - o sono sbagliati p e b_5 (prob. 2/N)
    - oppure sono sbagliati 2 bit interni (prob 1-2/N) (più elevata)
    - però vi sono $(2^{k-1}-1)$ possibili coppie di bit (k: bit di controllo)

Codici riflessi

- Sono ciclici ed ogni config. differisce dalla precedente per un bit
  - producono poco “rumore”
  - non sono ponderati
  - Si dicono completi se hanno tutte le 2^n combinazioni
- Il piu’ noto e il codice di Gray

n=1	n=2	n=3	n=4
0	00	000	0000
1	01	001	0001
	11	011	0011
	10	010	0010
		110	0110
		111	0111
		101	0101
		100	0100
			1100
			…

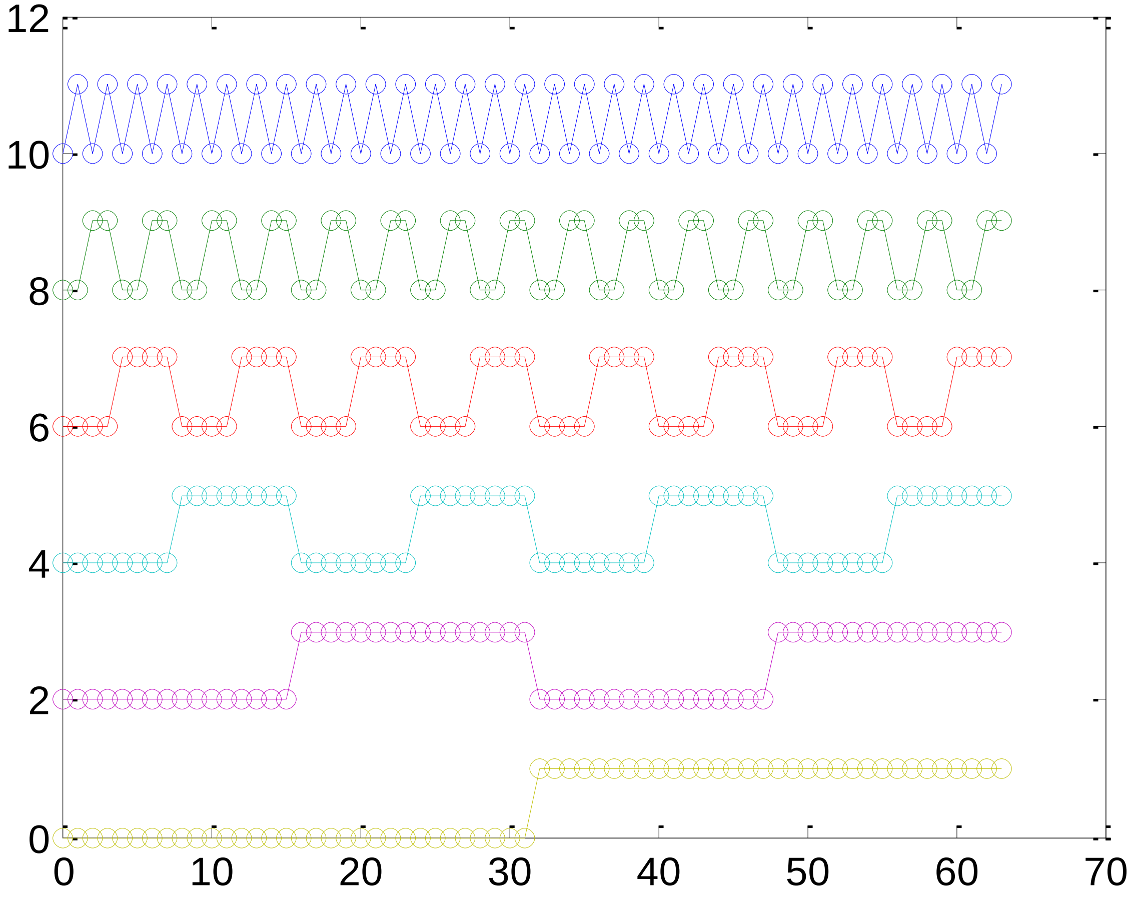
Codice di Gray

- La conversione Gray ↔ binario e' particolarmente semplice

Gray:	1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1
Binario:	1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1

- Da gray a binario procedendo da sx a dx
  - ad ogni 1 si opera un'inversione del bit
  - ad ogni 0 si copia inalterato
- Da binario a Gray procedendo da sx a dx
  - quando i 2 bit sono uguali si scrive uno 0
  - quando sono diversi si scrive un 1

Rappresentazione grafica Cod. binario



Rappresentazione grafica Cod. Gray