Algebra Booleana

Capitolo 2

Introduzione

- Nata per studiare problemi di logica deduttiva
- Prevede la presenza di 2 soli elementi : 0 e 1
- Variabile logica:
  - grandezza che prende solo i valori 1 o 0
- Funzione logica:
  - rappresenta la dipendenza di una grandezza logica da altre grandezze logiche
  - le funzioni logiche in “n” variabili sono finite infatti sono 2^{2^n}
  - la funzione logica è rappresentabile con una “tabella di verità” in essa vi si contemplano tutti i casi possibili

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Funzioni ad una variabile

- Vi sono 4 tabelle possibili

x	y
0	0
1	0

x	y
0	0
1	1

x	y
0	1
1	1

x	y
0	1
1	0

  - tre funzioni sono “degeneri”
    - Uscita costante = 0
    - Uscita costante = 1
    - Uscita uguale all’ingresso
  - Una funzione ove l’uscita è l’opposto dell’ingresso

$$y = not(x) = \overline{x}$$

Funzioni a 2 variabili

- Ve ne sono 16 possibili

x1 x2	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15
00	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
01	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
10	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
11	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*

  - Alcune sono degeneri (F0, F15)
  - Altre coincidono con gli ingressi (F3=x_1, F5=x_2)
  - Altre sono gli ingressi negati (F10,F12)
  - Altre valgono 1 solo con un’unica combinazione di ingressi (termini minimi) (F1,F2,F4,F8)
  - Altre sono il negato di queste (termini massimi)(F7,F11,F13,F14)
  - Tra queste alcune prendono dei “nomi” particolari

Funzione OR (F7)

- Il risultato è pari a 1 se uno OR l'altro degli ingressi è posto a 1

$$y = x_1 + x_2$$

- Proprietà fondamentali

$$x + 0 = x \qquad x + 1 = 1$$

$$x + x = x \qquad x + \bar{x} = 1$$

  - Proprietà commutativa

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

  - Proprietà associativa

$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$$

Funzione XOR (or esculsivo) (F6)

- Il risultato e' pari a 1 se SOLO uno degli ingressi e' posto a 1

$$y = x_1 \oplus x_2$$

- Proprieta' fondamentali

$$x \oplus 0 = x \quad x \oplus 1 = \bar{x}$$

$$x \oplus x = 0 \quad x \oplus \bar{x} = 1$$

  - Proprieta' commutativa

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$$

  - Proprieta' associativa (controllore di disparita')

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$$

Funzione AND (F1)

- Il risultato e’ pari a 1 se l’uno E l’altro degli ingressi sono posti a 1

$$y = x_1 \cdot x_2$$

- Proprieta’ fondamentali

$$x \cdot 0 = 0 \qquad x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot x = x \qquad x \cdot \bar{x} = 0$$

  - Proprieta’ commutativa

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

  - Proprieta’ associativa

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$$

Proprieta' distributiva

- proprieta' per somma (OR) e prodotto (AND) logico

$$(x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) = x_1 \cdot (x_2 + x_3)$$
$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) = x_1 + (x_2 \cdot x_3)$$

  - Si puo' dimostrare o tramite le tabelle di verita' oppure ragionando sul significato dell'operazione

Funzione NOR (F8)

- Il risultato e' pari a 0 se uno OR l'altro degli ingressi e' posto a 1 (or negato)

$$y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2}$$

- Proprieta' fondamentali

$$x \downarrow 0 = \bar{x} \qquad x \downarrow 1 = 0$$

$$x \downarrow x = \bar{x} \qquad x \downarrow \bar{x} = 0$$

  - Proprieta' commutativa

$$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$$

  - La proprieta' associativa non e' verificata !

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3 \triangleq \overline{x_1 + x_2 + x_3} = (\overline{x_1 \downarrow x_2}) \downarrow x_3 \neq (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$$

Funzione NAND (F14)

- Il risultato e' pari a 0 solo se entrambi degli ingressi sono posti a 1 (and negato)

$$y = x_1 \backslash x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

- Proprieta' fondamentali

$$x \backslash 0 = 1 \quad x \backslash 1 = \bar{x}$$

$$x \backslash x = \bar{x} \quad x \backslash \bar{x} = 1$$

  - Proprieta' commutativa

$$x_1 \backslash x_2 = x_2 \backslash x_1$$

  - La proprieta' associativa non e' verificata !

$$x_1 \backslash x_2 \backslash x_3 \triangleq \overline{x_1 x_2 x_3} = (\overline{x_1 \backslash x_2}) \backslash x_3 \neq (x_1 \backslash x_2) \backslash x_3$$

Termini minimi

- Termini minimi (F1, F2, F4, F8)
  - l'uscita e' 1 solo per una certa config. degli ingressi
  - Si ottengono come prodotto di tutte le variabili (di cui alcune dirette ed alcune negate)
    Es:
    $$F4 = \overline{x_1} x_2 \qquad\qquad F2 = x_1 \overline{x_2}$$
  - Ogni funzione può essere rappresentata come somma di termini minimi (I[a] Forma canonica)
  - Conseguenza: ogni funzione e' esprimibile come somma di prodotti

Termini massimi

- Termini massimi (F7,F11,F13,F14)
  - l'uscita e' 0 solo per una certa config. degli ingressi
  - Si ottengono come somma di tutte le variabili (di cui alcune dirette ed alcune negate
    Es:

$$F7 = x_1 + x_2 \qquad\qquad F13 = \overline{x_1} + x_2$$

  - Ogni funzione puo' essere rappresentata come prodotto di termini massimi (II^a Forma canonica)
  - Conseguenza: ogni funzione e' esprimibile come prodotto di somme

Teoremi fondamentali

- Principio di dualità
  - tutti i postulati visti finora possono essere accoppiati tra loro e si puo' ottenere l'uno dall'altro pur di effettuare le sequenti sostituzioni
    - $1 \leftrightarrow 0$
    - somma $\leftrightarrow$ prodotto
  - Es:

$$(x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) = x_1 \cdot (x_2 + x_3)$$

$$(x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) = x_1 + (x_2 \cdot x_3)$$

Teoremi fondamentali

- Primo T. dell'assorbimento

$$x + xy = x(1 + y) = x$$

- Secondo T. dell'assorbimento

$$x + \bar{x}y = x + xy + \bar{x}y = x + y(x + \bar{x}) = x + y$$

- Terzo T. dell'assorbimento

$$xy + yz + \bar{x}z = xy + \bar{x}z$$

Teoremi di De Morgan

$$\overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Generalizzando:

$$\overline{F(x_1, x_2, x_3, \ldots, +, \cdot)} = F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \cdot, +)$$

Ovvero la negazione di una funzione la si ottiene negando le sue variabili e scambiando tra loro gli operatori di somma e prodotto

Es:

$$F = xy + y\bar{z}$$

$$\overline{F} = (\bar{x} + \bar{y})(\bar{y} + z)$$

Teoremi di De Morgan

- Tramite i T. di De Morgan
  - si puo’ verificare l’equivalenza fra le forme canoniche

$$y = \sum y_i m_i = \overline{\overline{y}} = \overline{\sum \overline{y}_i m_i} = \prod (y_i + \overline{m_i}) = \prod (y_i + M_i)$$

  - si puo’ verificare che l’insieme completo degli operatori necessario e sufficiente per rappresemtare qualsiasi funzione logica non e’ AND, OR, NOT ma solamente AND,NOT oppure OR,NOT

$$x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$$

$$x \cdot y = \overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$$

Teorema di Shannon

$$f(x_1, x_{2,} ..., x_n) = x_1 \cdot f(1, x_{2,} ..., x_n) + \overline{x_1} \cdot f(0, x_{2,} ..., x_n)$$

Dim:

Se $x_1=1$

$$f(1, x_{2,} ..., x_n) = 1 \cdot f(1, x_{2,} ..., x_n) + 0 \cdot f(0, x_{2,} ..., x_n)$$

Se $x_1=0$

$$f(0, x_{2,} ..., x_n) = 0 \cdot f(1, x_{2,} ..., x_n) + 1 \cdot f(0, x_{2,} ..., x_n)$$

Funzioni Universali

- Le funzioni NAND e NOR sono anche dette funzioni “universali”
  - Tramite esse si puo’ realizzare qualunque funzione logica

$$\overline{x} = x / x$$

$$x \cdot y = \overline{x / y}$$

$$x + y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{x} / \overline{y}$$

$$\overline{x} = x \downarrow x$$

$$x + y = \overline{x \downarrow y}$$

$$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$$

Interpretazione circuitale

- Costanti:
  - 0 → circuito aperto
  - 1 → circuito chiuso
- Variabili: interruttori
- OR: parallelo di interruttori
- AND: serie di interruttori
- La funzione F(x,y,z, …): Funzione del circuito

- Analisi e Sintesi di circuiti a contatti
  - Es: accensione/spegnimento di una lampada da 3 punti indipendenti

Esempio

A	B	C	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

figura 2.8.2

$$L = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.\overline{B}.\overline{C} + A.B.C =$$
$$\overline{A}.(\overline{B}.C + B.\overline{C}) + A.(\overline{B}.\overline{C} + B.C)$$

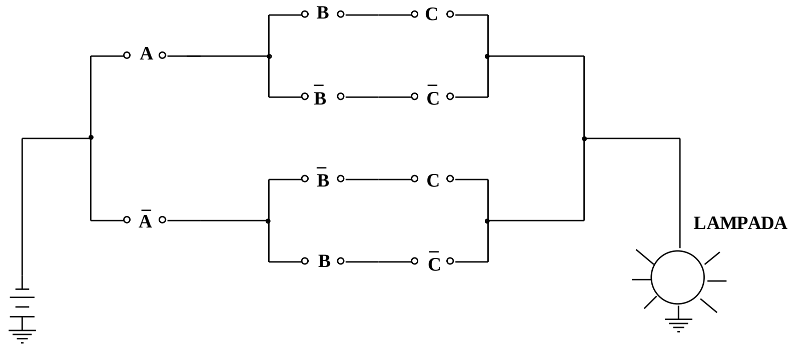


figura 2.8.3

$$L = (A+B+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C) = [A+(B+C).(\overline{B}+\overline{C})].[\overline{A}+(B+\overline{C}).(\overline{B}+C)]$$

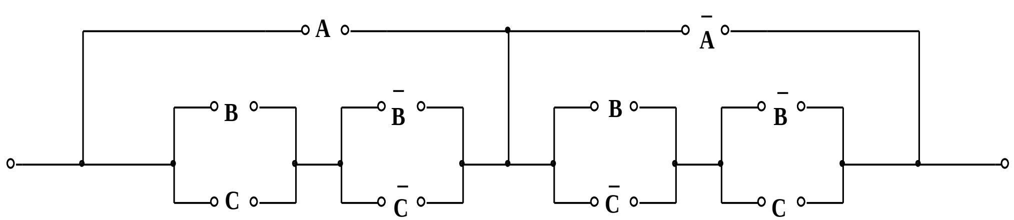


figura 2.8.4

Definizioni

- **Letterale**: coppia variabile valore, ad ogni variabile sono associati 2 letterali (a ed $\overline{a}$)
- **Implicante** di una funzione $f(x_1,\ldots x_n)$: prodotto di letterali $P=x_i\ldots x_k$ (in forma diretta o negata) tale per cui se P=1 anche f=1.
- **Termine minimo**: implicante ove compaiono tutte le variabili, ovvero e' un punto nello spazio booleano della funzione dove la funzione vale 1
- **On set** della funzione: insieme dei suoi termini minimi
- **Termine massimo**: E' un punto nello spazio booleano della funzione dove la funzione vale 0
- **Off set** della funzione: Tutti i punti dello spazio booleano della funzione che non sono termini minimi
- **Implicante**: sottocubo di soli 1 nello spazio booleano della funz.
- **Implicante primo:** se non e' contenuto in altri implicanti
- **Implicante essenziale:** se contiene almeno un 1 non incluso in altri implicanti primi
- **Copertura** di una funzione: insieme di implicanti che coprono tutti i temini minimi

Semplificazione di Funzioni

- Due funzioni sono equivalenti se hanno la stessa tavola di verita'
  - Semplificazioni
    - attraverso le relazioni fondamentali
    - individuando termini implicanti
    - Mappe di Karnaugh (forma minima a 2 livelli – somma di prodotti)
    - Metodo di Quine –McCluskey (forma minima a 2 livelli)
  - N.B. vi possono essere forme piu' "economiche" (a piu' livelli) per realizzare una funzione che questi metodi non evidenziano!

Mappe di Karnaugh

- Sono tabelle toroidali che rappresentano in piu' dimensioni la tabella di verita' della funzione

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + \overline{x_1}.x_2.x_3.x_4 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.x_4 + \overline{x_1}.x_2.x_3.\overline{x_4}$$

$x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1			
01				
11	1	1		
10		1		

figura 2.10.2

Mappe di Karnaugh (Es.)

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + \overline{x_1}.\overline{x_2}.\overline{x_3}.x_4 + \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.x_4 + \overline{x_1}.x_2.x_3.x_4 +$$
$$+ \overline{x_1}.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4} + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1.\overline{x_2}.\overline{x_3}.x_4 + x_1.\overline{x_2}.x_3.\overline{x_4} +$$
$$+ x_1.\overline{x_2}.x_3.x_4 + \overline{x_1}.x_2.\overline{x_3}.x_4$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1			1

figura 2.10.3

$$y = \overline{x_2} + \overline{x_1}.x_4$$

Mappe di Karnaugh (Es.)

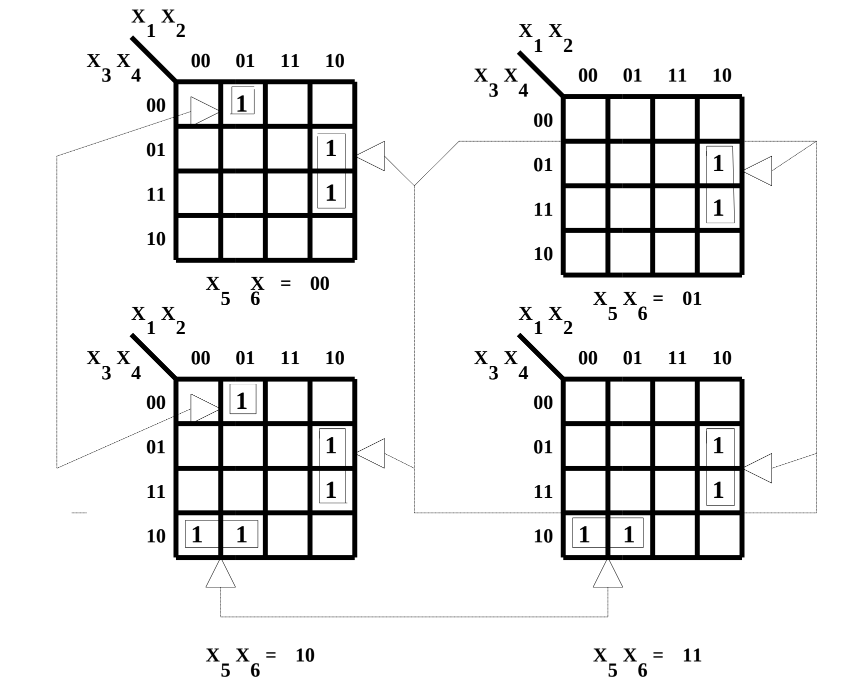


figura 2.10.5

$$y = x_1 . \overline{x_2} . x_4 + \overline{x_1} . x_3 . \overline{x_4} . x_5 + \overline{x_1} . x_2 . \overline{x_3} . \overline{x_4} . \overline{x_6}$$

Metodo di Quine Mc Cluschey

- Basato sull’applicazione sistematica della relazione:

$$f \cdot x + f \cdot \bar{x} = f$$

1. Si esprimano opportunamente tutti i termini minimi
2. Si suddividano in di ugual “livello”
3. Si costruisca una tabella con i livelli crescenti
4. Si confrontino i termini di livelli attigui operando opportune semplificazioni tra i termini che differiscono di un solo bit e si generi una tabella di ordine superiore
5. Si annoti quali termini della tabella di ord. inferiore non sono stati usati
6. Si iteri il procedimento
7. La somma di tutti i termini non usati (implicanti primi) da’ la funzione desiderata
8. Si può comunque ottenere una forma più compatta verificando quali e quanti siano gli implicanti primi più opportuni da impiegare (usando un metodo a reticolo)

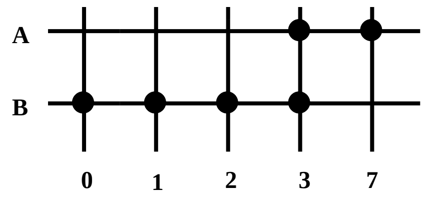
Esempio Quine Mc Cluskey

$\overline{x}_1.\overline{x}_2.\overline{x}_3$ $\overline{x}_1.\overline{x}_2.x_3$ $\overline{x}_1.x_2.\overline{x}_3$ $\overline{x}_1.x_2.x_3$ $x_1.x_2.x_3$

	Livello	Numero	Termine Minimo
ν	**0**	**0**	**000**
ν	**1**	**1** **2**	**001** **010**
ν	**2**	**3**	**011**
ν	**3**	**7**	**111**

ν	**0, 1**	**0 0 -**
ν	**0, 2**	**0 - 0**
ν	**1, 3**	**0 - 1**
ν	**2, 3**	**0 1 -**
A	**3, 7**	**- 1 1**

B 0, 1, 2, 3 0 - -



A = - 1 1 B = 0 - -

$$y = A + B = x_2 . x_3 + \overline{x}_1$$

Esempio II

$$y = \sum(1,3,4,6,7,9,10,11,12,13,14,15)_m$$

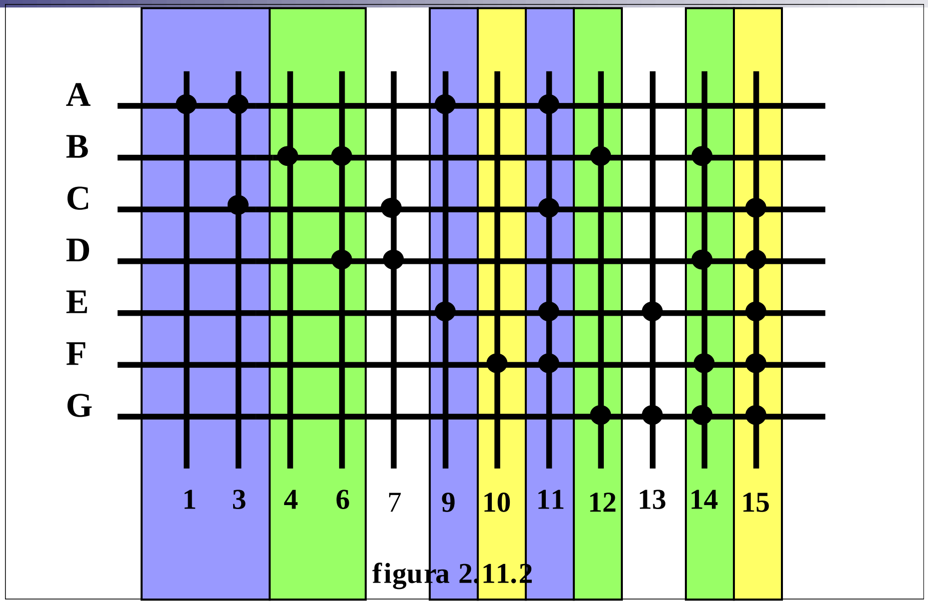
1	0 0 0 1
4	0 1 0 0
3	0 0 1 1
6	0 1 1 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
12	1 1 0 0
7	0 1 1 1
11	1 0 1 1
13	1 1 0 1
14	1 1 1 0
15	1 1 1 1

ν	1, 3	0	0	-	1
ν	1, 9	-	0	0	1
ν	4, 6	0	1	-	0
ν	4, 12	-	1	0	0
ν	3, 7	0	-	1	1
ν	3, 11	-	0	1	1
ν	6, 7	0	1	1	-
ν	6, 14	-	1	1	0
ν	9, 11	1	0	-	1
ν	9, 13	1	-	0	1
ν	10, 11	1	0	1	-
ν	10, 14	1	-	1	0
ν	12, 13	1	1	0	-
ν	12, 14	1	1	-	0
ν	7, 15	-	1	1	1
ν	11, 15	1	-	1	1
ν	13, 15	1	1	-	1
ν	14, 15	1	1	1	-

1, 3, 9, 11	-	0	-	1	← A
4, 6, 12, 14	-	1	-	0	← B
3, 7, 11, 15	-	-	1	1	← C
6, 7, 14, 15	-	1	1	-	← D
9, 11,13 , 15	1	-	-	1	← E
10, 11, 14, 15	1	-	1	-	← F
12, 13, 14, 15	1	1	-	-	← G

figura 2.11.1

Reticolo per la scelta degli implicanti



Scelte obbligate: A (m1),B(m4),F(m10)
(implicanti essenziali)

Soluzioni possibili:

A+B+F+D+E
A+B+F+D+G
A+B+F+C+E
A+B+F+C+G

Condizioni non specificate (don’t care)

- Vi possono essere condizioni di ingresso che non si verificano
  - Ad esempio se gli ingressi dipendono a loro volta da una rete logica
- La presenza di queste condizioni puo’ essere ben impiegata per generare ulteriori semplificazioni
  - Una condizione don’t care si puo’ considerare diretta o negata, in funzione di quale da’ la miglior semplificazione

$x_3 x_4 \backslash x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1	ϕ	ϕ
01			ϕ	
11			1	ϕ
10			ϕ	1

Es: senza “don’t care”

$$y = \overline{x_1}.\overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1 . x_2 . x_3 . x_4 + x_1 . \overline{x_2} . x_3 . \overline{x_4}$$

con “don’t care”

$$y = \overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1 . x_3$$

Condizioni non specificate (don't care)

Tutti i possibili termini minimi

ν	0	0 0 0 0
ν	4	0 1 0 0
ν	8	1 0 0 0
ν	10	1 0 1 0
ν	12	1 1 0 0
ν	11	1 0 1 1
ν	13	1 1 0 1
ν	14	1 1 1 0
ν	15	1 1 1 1

ν	0,4	0 - 0 0
ν	0,8	- 0 0 0
ν	4,12	- 1 0 0
ν	8,12	1 - 0 0
ν	8,10	1 0 - 0
ν	12,13	1 1 0 -
ν	12,14	1 1 - 0
ν	10,11	1 0 1 -
ν	10,14	1 - 1 0
ν	13,15	1 1 - 1
ν	11,15	1 - 1 1
ν	14,15	1 1 1 1

0, 4, 8, 12	- - 0 0	A
8, 10, 12, 14	1 - - 0	B
12, 13, 14, 15	1 1 - -	C
10, 11, 14, 15	1 - 1 -	D

figura 2.12.2

$X_3 X_4$ \ $X_1 X_2$	00	01	11	10
00	1	1	ϕ	ϕ
01			ϕ	
11			1	ϕ
10			ϕ	1

Solo i termini minimi = 1

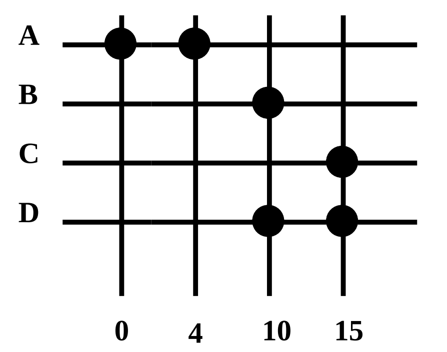


figura 2.12.3

$$y = \overline{x_3}.\overline{x_4} + x_1 . x_3$$

Funzioni simmetriche

  - Possono essere implementate facilmente con tecniche particolari
  - Non funzionano i normali metodi di semplificazione
- Funzioni totalmente simmetriche
  - Un qualsiasi scambio tra le variabili lascia immutato il risultato
  - L’intercambiabilita’ puo’ essere anche tra variabili dirette e negate (meno evidente)
- Funzioni parzialmente simmetriche
  - La proprietà di cui sopra e’ limitata ad un sottoinsieme di variabili
- Funzioni simmetriche indipendenti
  - se la simmetria esiste solo per un sottoinsieme della funzione

NB: le variabili interessate possono essere dirette, negate o miste

Funzioni simmetriche esempio

$$f(x, y,z) = x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + x.y.z$$

TABELLA 2.13.1

PERMUTAZIONE			FUNZIONE
$x \leftrightarrow x$	$y \leftrightarrow y$	$z \leftrightarrow z$	$x.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.y.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}.z + x.y.z$
$x \leftrightarrow y$	$y \leftrightarrow z$	$z \leftrightarrow x$	$y.\bar{z}.\bar{x} + \bar{y}.z.\bar{x} + \bar{y}.\bar{z}.x + y.z.x$
$x \leftrightarrow y$	$y \leftrightarrow x$	$z \leftrightarrow z$	$y.\bar{x}.\bar{z} + \bar{y}.x.\bar{z} + \bar{y}.\bar{x}.z + y.x.z$
$x \leftrightarrow z$	$z \leftrightarrow y$	$y \leftrightarrow z$	$z.\bar{x}.\bar{y} + \bar{z}.x.\bar{y} + \bar{z}.\bar{x}.y + z.x.y$
$x \leftrightarrow x$	$y \leftrightarrow z$	$z \leftrightarrow y$	$x.\bar{z}.\bar{y} + \bar{x}.z.\bar{y} + \bar{x}.\bar{z}.y + x.z.y$
$x \leftrightarrow z$	$y \leftrightarrow y$	$z \leftrightarrow x$	$z.\bar{y}.\bar{x} + \bar{z}.y.\bar{x} + \bar{z}.\bar{y}.x + z.y.x$

pertanto e' simmetrica

Funzioni simmetriche esempio

La funzione

$$x.\overline{y}.z+\overline{x}.y.z+\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$$

con $q=\overline{z}$

diventa

$$x.\overline{y}.\overline{q}+\overline{x}.y.\overline{q}+\overline{x}.\overline{y}.q$$

e pertanto e' simmetrica

Funzioni simmetriche

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1		
11	1		1	
10		1		

Funzione totalmente simmetrica
Esiste un'intercambiabilita' tra le variabili A, B, $\overline{C}$, D

fig. 2.13.1

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11	1		1	
10		1		

Funzione parzialmente simmetrica

L'intercambiabilita' esiste solo tra

le variabili B, $\overline{C}$, D

fig. 2.13.2

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01	1		1	
11		1		
10				

E = 0

AB \ CD	00	01	11	10
00				1
01	1		1	
11				1
10				

E = 1

Funzione a simmetria indipendente

Nel sottoinsieme E = 0 esiste un'intercambiabilita' tra le variabili

$\overline{A}$, B , $\overline{C}$, D

mentre nel sottoinsieme E = 1 l'intercambiabilita' si ha tra le variabili

$\overline{A}$, B , C , $\overline{D}$

fig. 2.13.3

Funz. Simmetriche: Teoremi

- **Teorema 1**:Il valore della funzione dipende da **quante** variabili valgono 1 e non da **quali**

Condizione necessaria e sufficiente affinche' una funzione di commutazione di n variabili sia simmetrica e' che essa possa essere individuata da un insieme di interi $\{a_k\}$ con $0< a_k < n$, in modo che se esattamente a_m (m = 1,2, ..., k) delle variabili valgono 1, la funzione valga 1, mentre valga 0 negli altri casi.

- **Sufficiente**: se esite l’insieme → funzione simmetrica

Si consideri una funzione che vale 1 se e solo se N ($N = a_m$) variabili sono poste a 1: scambiando 2 variabili qualunque si ottiene lo stesso risultato ovvero la funzione e’ simmetrica

- **Necessaria**: se **NON** esite l’insieme → funzione **NON** e’ simmetrica

Si consideri una funzione in cui non e’ definibile l’insieme di cui sopra. Esistera’ pertanto almeno un caso in cui la funzione con certe variabili poste a 1 vale 1, mentre, pur mantenendo lo stesso numero di variabili poste a 1, ma organizzate in altro modo vale 0. Poiche’ a questa condizione si puo’ pervenire tramite scambio tra variabili ne consegue che la funzione NON sara’ simmetrica

Es: F(1,1,0,0,1,0,1) = 1 e F(1,1,1,0,1,0,0) = 0

Funz. Simmetriche: Teoremi

- T1: Conseguenze
  - Una funzione simmetrica puo’ essere rappresentata tramite l’insieme caratteristico e le variabili di simmetria

$$S^{n}_{\{a_k\}}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \ldots, x_n^{j_n})$$

Esempi:

$$f(x,y,z) = x.\overline{y}.\overline{z} + \overline{x}.y.\overline{z} + \overline{x}.\overline{y}.z + x.y.z$$

z \ xy	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$$S^{3}_{\{1,3\}}(x, y, z)$$

$$f(x,y,z) = x.\overline{y}.z + \overline{x}.y.z + \overline{x}.\overline{y}.\overline{z}$$

z \ xy	00	01	11	10
0	1			
1		1		1

$$S^{3}_{\{1\}}(x, y, \overline{z})$$

Nota: i livelli di simmetria possono essere piu’ di uno

Funz. Simmetriche: Teoremi

- **Teorema 2**:La somma di piu' funzioni simmetriche delle stesse variabili e' ancora una funzione simmetrica avente come livelli di simmetria tutti i livelli delle funzioni simmetriche di partenza.
  - **Dim. di simmetria:** essendo le funzioni di partenza simmetriche, uno scambio tra variabili non altera il risultato dei singoli termini e pertanto nemmeno della somma
  - **Dim. di unione tra i livelli**: ogni funzione vale 1 se e solo se n variabli sono affermate (con n = a_m,- livello proprio di qella funzione) . La funzione somma sara' uguale a 1 se almeno una delle funzioni componenti sara' 1

Es:

$$S_0^4(x,y,z,w)+S_3^4(x,y,z,w)+S_4^4(x,y,z,w)=S_{0,3,4}^4(x,y,z,w)$$

$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\cdot\bar{w} \qquad \bar{x}yzw+x\bar{y}zw+xy\bar{z}w+xyz\bar{w} \qquad xyzw$$

Funz. Simmetriche: Teoremi

- **Teorema 3**:Il prodotto di piu' funzioni simmetriche delle stesse variabili e' ancora una funzione simmetrica avente come livelli di simmetria tutti i livelli comuni alle funzioni simmetriche di partenza.
  - **Dim. di simmetria:** essendo le funzioni di partenza simmetriche, uno scambio tra variabili non altera il risultato dei singoli termini e pertanto nemmeno del prodotto
  - **Dim. di intersezione tra i livelli**: ogni funzione vale 1 se e solo se n variabli sono affermate (con n = a_m,- livello proprio di qella funzione) .
    La funzione prodotto sara' uguale a 1 se tutte le funzioni componenti sara' 1

Es:

$$S_0^4(x,y,z,w)\cdot S_{0,4}^4(x,y,z,w)=S_0^4(x,y,z,w)$$

$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}$$

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w}+xyzw$$

$$\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}\cdot\bar{w}$$

Funz. Simmetriche: Teoremi

- **Teorema 4**:La negazione di una funzione simmetrica d n variabili e di libelli $\{a_k\}$ e' ancora una funzione simmetrica di n variabili i cui livelli di simmetria $\{a_j\}$ sono il complemento dei livelli $\{a_k\}$
  - **Dim. di simmetria:** essendo la funzione di partenza simmetriche, uno scambio tra variabili non altera il risultato i e pertanto nemmeno il risultato dell'inversione
  - **Dim. di complementarieta' tra gli insiemi di livelli**: poiche' per definizione la funzione originale vale 1 se e solo se n variabli sono affermate (con n = a_m, appartenente ad $\{a_k\}$), la funzione negata sara' uguale a 1 se e solo se (n ≠ a_m appartenente ad $\{a_k\}$ ovvero se n = $a_{m'}$ appartenente ad $\{a_j\}$

Es:

$$\overline{S_2^3(x,y,z)} = S_{(0,1,3)}^3(x,y,z)$$

$$\overline{\bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}}$$

$$xyz + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Funz. Simmetriche: Teoremi

- **Teorema 5**:negando le variabili di una funzione simmetrica si ottiene ancora una funzione simmetrica I cui livelli di simmetria sono il complemento a N dei livelli di simmetria della funzione originale (sono tanti livelli quanti quelli della funzione originale)

  Dim. di simmetria: essendo la funzione di partenza simmetrica, uno scambio tra variabili non altera il risultato dei singoli termini e pertanto se si opera una negazione di **tutte** le variabili la proprieta' non cambia

  Dim. di complementarieta' tra i livelli: poiche' per definizione la funzione originale vale 1 se e solo se n variabli sono affermate (con n = a_m, appartenente ad $\{a_k\}$), negando tutte le variabili l'uscita sara' uguale a 1 se e solo se n variabili saranno uguali a 0 (con n = a_m appartenente ad $\{a_k\}$ ovvero se le variabili affermate sono N – n)

Es:

$$S_2^3(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = S_1^3(x,y,z)$$

$$S_2(x,y,z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

$$S_2(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} = S_{(3-2)}(x,y,z)$$

Funz. Simmetriche: Teoremi

- Conseguenza:
  - Ogni funzione simmetrica possiede almeno due centri di simmetria il primo rispetto certe variabili ed un altro rispetto alle variabili negate

Es: $$S_1^3(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = S_2^3(x,y,z)$$

  - Vi possono essere peraltro molti centri di simmetria

Es: $$S_{0,2}^3(x,y,z) = S_{1,3}^3(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = S_{1,3}^3(\bar{x},y,z) = S_{0,2}^3(x,\bar{y},\bar{z}) = \ldots.$$

  - I centri di simmetria vengono enumerati in mase al relativo termine minimo (sono ben visibili nelle mappe di Karnaugh)

Funz. Simmetriche: Teoremi

- **Teorema 6**:Qualunque funzione simmetrica ad n variabili puo' essere ottenuta come somma di un sottoinsieme di funzioni simmetriche elementari. Ciascuna con un solo livello di simmetria: k
  - Ogni funzione simmetrica sara' composta da $\binom{n}{k}$ termini ciascuno con k variabili affermate e n-k negate

Es:

$$\delta_0 = xyz$$

$$\delta_1 = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$

$$\delta_2 = \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

$$\delta_3 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Nota bene: le variabili potrebbero essere negate es. (q=not(z))

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 1
  - In base al T6 in una funz. simmetrica il numero dei termini minimi risulta vincolato
  - Si codifichino tutti i termini minimi costituenti la funzione e si ordino in una tabella
  - Su oni riga si riporti il numero degli 1 (livello) “**k**”
  - Su ogni colonna si riporti il rapporto tra 0 e 1 “**r**”
  - **IPOTESI** :Se tutte le variab. di simmetria fossero **affermate** e la funzione fosse **simmetrica elementare** k ed r sarebbero costanti e varrebbe la relazione:

$$n \cdot r = k \cdot (r+1)$$

Dimostrazione:

In una funz. simm. elementare vi sono

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

termini minimi ed altrettante righe della tabella.
In ogni riga vi sono **k** uni ed **(n - k)** zeri
In ogni colonna vi saranno C_1 uni e C_o zeri ove

$$C_1 = \binom{n-1}{k-1} \quad , \quad C_o = \binom{n-1}{k} \quad , \quad C_0 + C_1 = \binom{n}{k}$$

quindi

$$r = \frac{C_1}{C_0} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k}} = \frac{\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\dfrac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}} = \frac{k}{n-k}$$

Esempio

$$F = \bar{x}.y.z + x.\bar{y}.z + x.y.\bar{z}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
0 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
2 & 2 & 2 &
\end{array}$$

k = 2
r = 2
n = 3

$$r = \frac{C_1}{C_0} = \frac{k}{n-k} = \frac{2}{3-2} = 2$$

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 1 – (cont.)
  - **IPOTESI** :Se tutte le variab. di simmetria fossero **affermate** e la funzione fosse **a piu' livelli di simmetria,** r sarebbe costante, mentre k no. In particolare vi dovrebbero essere $\binom{n}{k}$ righe per ogni livello di simmetria
  - Si possono pertanto evidenziare le singole funzioni simmetriche elementari costituenti
- Esempio:

$$f = x.y.\bar{z}.\bar{w} + x.\bar{y}.z.\bar{w} + \bar{x}.y.z.\bar{w} + x.\bar{y}.\bar{z}.w + \bar{x}.y.\bar{z}.w + \bar{x}.\bar{y}.z.w +$$
$$+ x.y.z.\bar{w} + x.y.\bar{z}.w + x.\bar{y}.z.w + \bar{x}.y.z.w$$

1	1	0	0	2
1	0	1	0	2
0	1	1	0	2
1	0	0	1	2
0	1	0	1	2
0	0	1	1	2
1	1	1	1	

1	1	1	0	3
1	1	0	1	3
1	0	1	1	3
0	1	1	1	3
3	3	3	3	

1	1	0	0	2
1	0	1	0	2
0	1	1	0	2
1	0	0	1	2
0	1	0	1	2
0	0	1	1	2
1	1	1	0	3
1	1	0	1	3
1	0	1	1	3
0	1	1	1	3
$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$	

$$f = S^4_{\{2,3\}}(x, y, z, w)$$

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 1 – (cont.)
  - **IPOTESI** :Se vi sono piu' livelli di simmetria ma alcune variabili sono negate non sono costanti ne' k ne' r, ma esistono due soli valori possibili di r (l'uno ed il reciproco)
  - Si possono pertanto evidenziare quali variabili sono negate e ricondursi al caso precedente
- Esempio:

$$f = x.y.z + \bar{x}.\bar{y}.z + \bar{x}.y.\bar{z}$$

1	**1**	**1**	**3**
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
$\frac{1}{2}$	**2**	**2**	

(a)

0	**1**	**1**	**2**
1	**0**	**1**	**2**
1	**1**	**0**	**2**
2	**2**	**2**	

(b)

1	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

figura 2.14.1

$$F = S_2^3(\bar{x}, y, z) = S_1^3(x, \bar{y}, \bar{z})$$

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 1 – (cont.)
  - **ECCEZIONE** : se n e' pari, k=n/2 e non tutte le variabili sono affermate si puo' essere tratti in inganno infatti in questo caso r=1 e non si riesce a discriminarlo dal suo reciproco

$$r = \frac{C_1}{C_0} = \frac{k}{n-k}$$

n=4

k	r
0	0
1	1/3
2	1
3	3

n=5

k	r
0	0
1	1/4
2	2/3
3	3/2
4	4

  - Esempio:

$$f = \bar{x}.\bar{y}.z.\bar{w} + \bar{x}.y.\bar{z}.\bar{w} + \bar{x}.y.z.w + x.\bar{y}.\bar{z}.\bar{w} + x.\bar{y}.z.w + x.y.\bar{z}.w$$

0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	3
1	0	0	0	1
1	0	1	1	3
1	1	0	1	3
1	1	1	1	

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 1 – (cont.)
  - **SOLUZIONE** :si espande la funzione secondo una variabile qualsiasi (ad esempio la prima) In pratica ci si riporta a 2 funzioni con n-1 variabili

0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	3
1	0	0	0	1
1	0	1	1	3
1	1	0	1	3
1	1	1	1	

0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	3
2	2	$\frac{1}{2}$	

x = 0

0	0	0	0
0	1	1	2
1	0	1	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	

x = 1

si complementano opportunamente le colonne

0	1	1	2
1	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	

0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

0	0	1	1	2
0	1	0	1	2
0	1	1	0	2
1	0	0	1	2
1	0	1	0	2
1	1	0	0	2
1	1	1	1	

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 2:
  - Usa solo calcoli in forma decimale
  - siano :
    - n : il numero di variabili
    - m: numero di termini minimi
    - e: il numero di term ini minimi pari
    - k: il valore numerico dei temini minimi
  - I centri di simmetria sono in:

$$m_{c1} = \frac{1}{2}\left[(2^n - 1) - \frac{m(2^n - 1) - 2\sum k}{m - 2e}\right] \qquad m_{c1} = (2^n - 1) - m_{c2}$$

  - N.B. In caso la funzione presenti 2^n centri di simmetria l'equazione fornisce un valore indeterminato (0/0)

Riconoscimento di funz. simmetriche

- Metodo 2:
  - Determinati i centri di simmetria si valuta la distanza di tutti i termini minimi dal centro
  - Si riuniscono in gruppi a pari distanza
  - Questi devono essere in numero pari a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - A questo punto si possono calcolare tutti i parametri della funzione simmetrica
    - Centri di simmetria – Variabili di simmetria
    - Livelli di simmetria

Funzioni parzialmente simmetriche

- Secondo tutte le variabili della funzione si operi una partizione

$$f(x,y,z,w,...) = x \cdot g(y,z,w,...) + \overline{x} \cdot h(y,z,w,...)$$

- Si verifichi la simmetria per "g" ed "h" per le medesime variabili di simmetria
- Si operi ugualmente per ogni coppia di variabili …
- Si passi poi alle triplette di variabili ….

- Così si individuano anche le funzioni separatamente simmetriche