# Macchine sequenziali

Capitolo 4

# Generalita'

- Macchina sequenziale (o a stati finiti)
  - E' un sistema composto da:
    - n ingressi ($x_1$,$x_2$, … $x_n$) ed m uscite ($y_1$,$y_2$, … $y_m$)
    - Un insieme finito Q=($q_1$,$q_2$, … $q_s$) di stati interni
    - Un insieme finito I=($i_1$,$i_2$, … $i_e$) di ingressi possibili
    - Un insieme finito W=($w_1$,$w_2$, … $w_k$) di uscite possibili
    - Una mappa di transizione $\tau$ (che specifica lo stato raggiunto in base allo stato attuale ed agli ingressi)
    - Una mappa delle uscite U (che specifica l'uscita in base allo stato attuale ed agli ingressi)
  - I seguenti insiemi pertanto identificano la macchina

$$M = (\mathrm{Q}, \mathrm{I}, \mathrm{W}, \tau, \mathrm{U})$$

  - Macchine complete:
    - le macchine che a partire da ogni stato ammettono qualsiasi valore di ingresso(in I), specificando per ognuno di essi i valori q' e w'
  - Sequenza di ingressi, uscite, stati
    - una qualsiasi successione ordinata di questi

# Rappresentazioni

- Grafo (o diagramma degli stati) secondo Moore
  - Gli stati sono rappresentati dai **nodi**
  - Le transizioni sono rappresentate da **rami orientati**
  - Le uscite dipendono solo dallo stato
  - In base al valore di ingresso ed allo stato attuale si definisce lo stato futuro (ed ovviamente l'uscita)

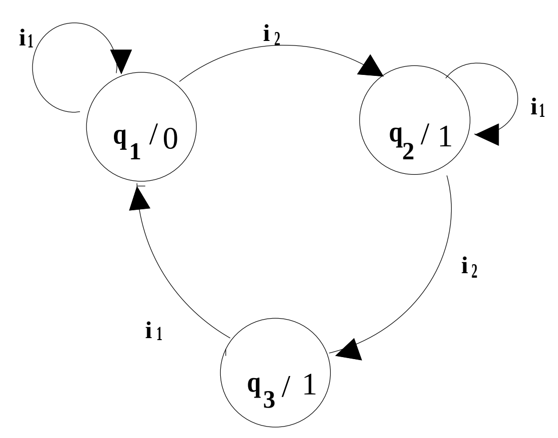


figura 4.1.1

# Rappresentazioni

- Grafo (o diagramma degli stati) secondo Mealy
  - Le uscite dipendono dagli stati e dagli ingressi
  - In base al valore di ingresso ed allo stato attuale si definisce lo stato futuro e ovviamente l’uscita

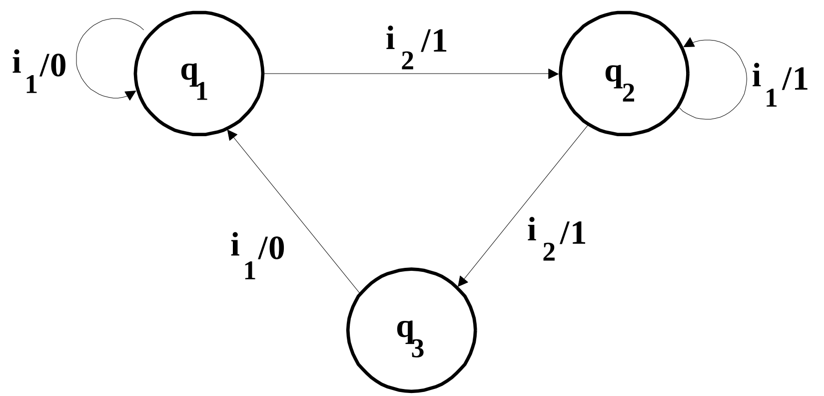


**figura 4.1.2**

# Rappresentazioni

- Tavola di Huffman
  - Rappresentazione tabellare secondo i modelli di Moore o Mealy

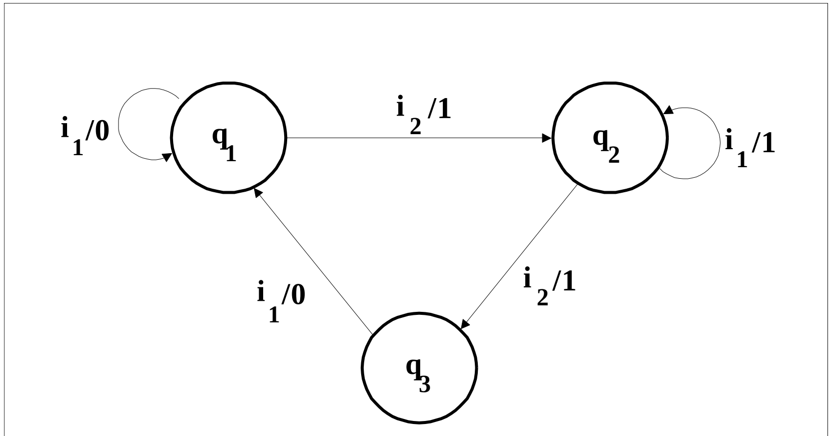


figura 4.1.2

| | ingresso | |
|---|---|---|
| **Stato** | $i_1$ | $i_2$ |
| $q_1$ | $q_1$ / 0 | $q_2$ / 1 |
| $q_2$ | $q_2$ / 1 | $q_3$ / 1 |
| $q_3$ | $q_1$ / 0 | - / - |

figura 4.1.3

# Rappresentazioni

- Le rappresentazioni di Moore e Mealy sono equivalenti
  - Passaggio Moore → Mealy
    - eliminazione dell'uscita dai **nodi**
    - associazione della relativa uscita a tutti i **rami** entranti nel nodo

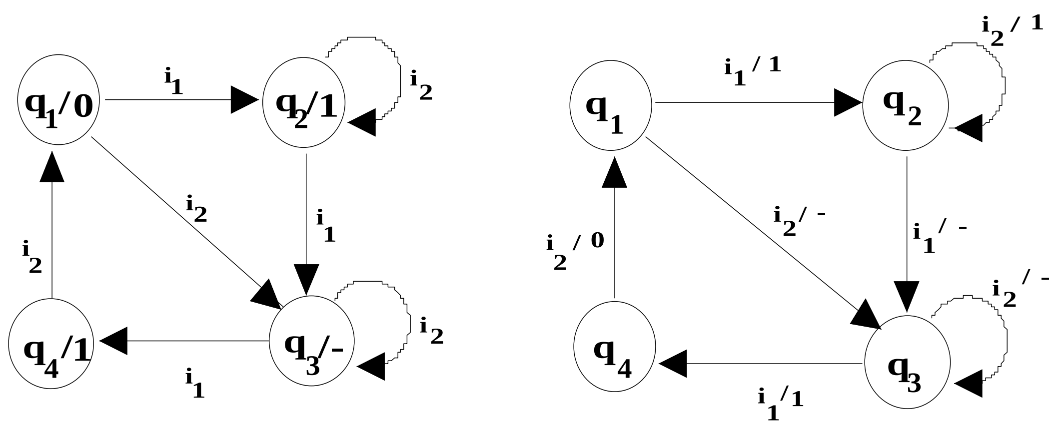


figura 4.1.4

# Rappresentazioni

- Le rappresentazioni di Moore e Mealy sono equivalenti
  - Passaggio Mealy → Moore
    - Puo' richiedere l'aggiunta di nodi (tanti quanti sono gli stati raggiunti con uscite differenti)
  - Es:
    - $q_3$ comporta sempre l'uscita 1
    - $q_4$ deve venir sdoppiato

| Stato | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| $q_1$ | $q_4$ /1 | $q_3$ /1 |
| $q_2$ | $q_1$ /0 | - |
| $q_3$ | $q_4$ /0 | - |
| $q_4$ | $q_2$ /0 | $q_3$ /1 |

figura 4.1.5

| Stato | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| $q_1$/0 | $q_{41}$ | $q_3$ |
| $q_2$ /0 | $q_1$ | - |
| $q_3$ /1 | $q_{40}$ | - |
| $q_{40}$ /0 | $q_2$ | $q_3$ |
| $q_{41}$ /1 | $q_2$ | $q_3$ |

figura 4.1.6

# Esempi

- I grafi spesso vengono ottenuti da una descrizione verbale
  - La macchina rappresenti il risultato di una somma binaria a piu' bit
  - I bit vengano forniti sequenzialmente dal meno significativo al piu' significativo
  - Gli stati mantengano memoria del riporto al passo precedente (secondo il modello di Mealy bastano 2 stati:  riporto =1 o riporto =0)

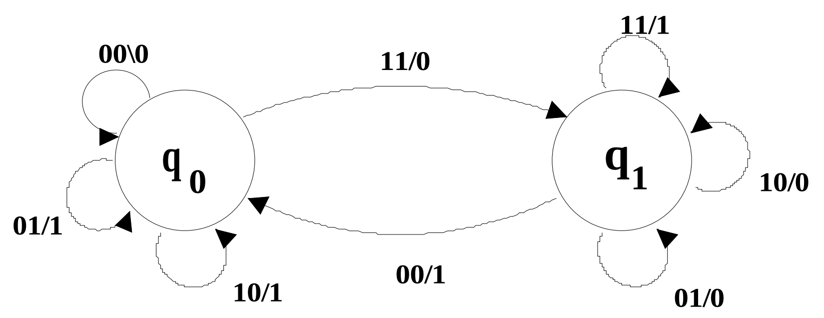


figura 4.1.7

# Esempi

- Il modello secondo Moore e' piu' complesso
  - Si deve differenziare tra gli stati in cui l'uscita e' 1 o 0 in base al riporto precedente

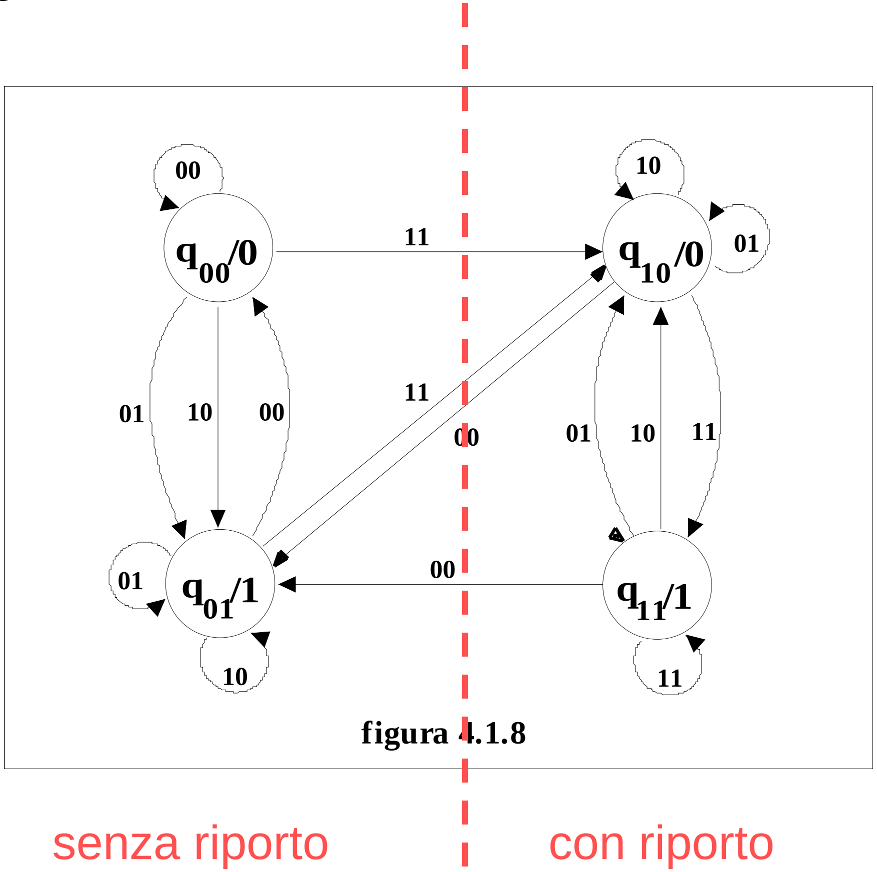


figura 4.1.8

senza riporto

con riporto

# Esempi

- Luci sequenziali
  - Con l’ingresso attivo la macchina fornisca ciclicamente le tre uscite: 001,010,100
  - Con l’ingresso disattivo il “loop” si fermi

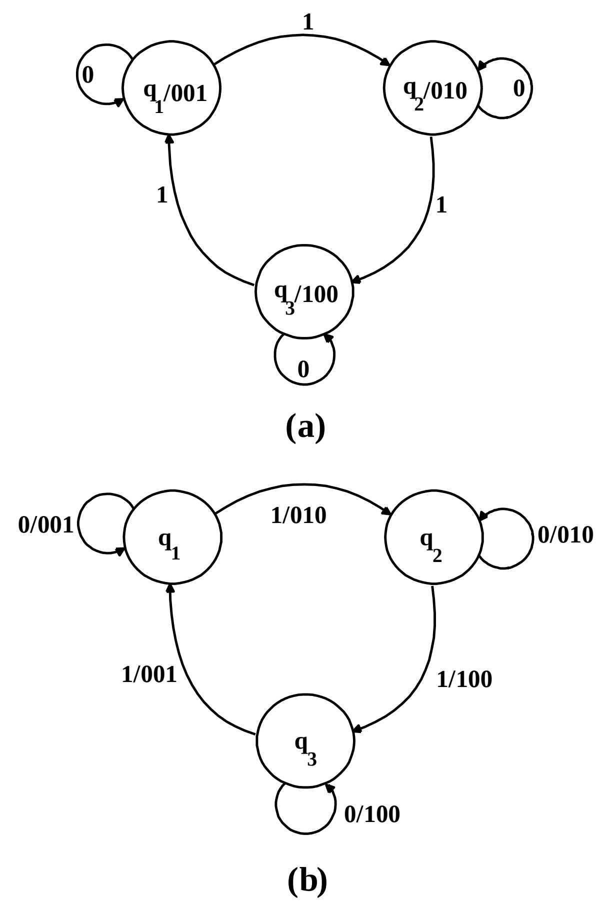


figura 4.1.9

# Definizioni

- **Stato stabile**: se ogni ingresso che porta la macchina in $q_j$ mantiene la macchina in $q_j$
- **Stato instabile**: se esiste un ingresso che porta la macchina in $q_j$ e poi la fa evolvere verso un altro stati
- **Macchina asincrona**: se tutti i suoi stati sono stabili
- **Macchina sincrona**: se almeno uno stato e' instabile

Nota: una macchina Asincrona modifica stato solo in conseguenza ad una variazione degli ingressi

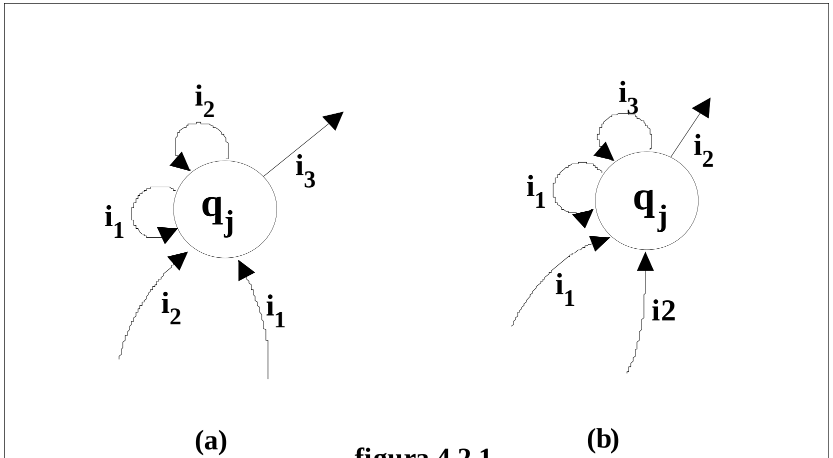


figura 4.2.1

# Definizioni

- **Sequenza applicabile**
  - la sequenza $i_1,i_2,\ldots,i_n$ si dice applicabile alla macchina M nello stato q se per ogni ingresso della sequenza esiste lo stato corrispondente $q_i$ e se e' definita l'uscita finale $w(q_n,i_n)$.
- **Macchina equivalente**:
  - Una macchina sequenziale *M'* si dice **equivalente** a una macchina sequenziale *M* se tutte le sequenze di ingresso $\sigma_i$ applicabili ad uno stato q di *M* sono applicabili ad uno stato q' di *M'* e producono la stessa uscita finale w' = w, qualsiasi sia $\sigma_i$.
  - Non vale le propoprieta' di simmetria ( Es. uscite non definite)
- **Macchina minima**: macchina equivalente col minimo numero di stati

Es. di seq. applicabile allo stato 1:
0 1 1 1 1 1 1 1 …. 1 0
(con un numero dispari di 1)

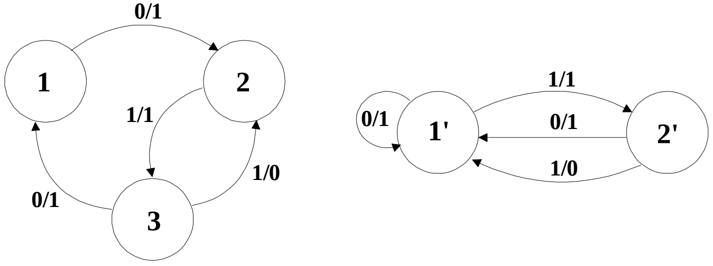


figura 4.2.2

# Minimizzazione di una macchina seq.

- Esistano due stati $q_i$ e $q_k$ tali che:
  - Qualsiasi sequenza di ingresso $\sigma_i = i_1, i_2, \dots, i_p$ applicabile a $q_i$ sia anche applicabile a $q_k$.
  - L'uscita finale $w(q_{pk}, i_p)$ sia sempre uguale a $w(q_{pi}, i_p)$, qualunque sia $\sigma_i$
  - L'evoluzione da $q_k$ non e' in contrasto con l'evoluzione da $q_i$
- Se la macchina e' completa
  (qualsiasi sequenza e' applicabile ed ogni uscita e' definita)
  - la relazione espressa tra $q_i$ e $q_k$ e' biunivoca
  - $q_i$ e $q_k$ sono **equivalenti** ($q_i = q_k$)
  - $q_i$ e $q_k$ si possono "fondere" insieme
- Se la macchina e' incompleta
  (sequenze applicabili a $q_k$ possono non esserlo a $q_i$ e vi possono essere uscite non definite)
  - la relazione non e' biunivoca
  - $q_i$ e $q_k$ sono **compatibili** ($q_i \sigma q_k$)
  - $q_i$ e $q_k$ si possono comunque "fondere" opportunamente insieme

# Minimizzazione di una macchina seq.

- Stati equivalenti

$$q_i = q_k \quad \text{and} \quad q_i = q_e \quad \Rightarrow \quad q_k = q_e$$

- Stati compatibili

$$q_i \;\sigma\; q_k \quad \text{and} \quad q_i \;\sigma\; q_e \quad \not\Rightarrow \quad q_k \;\sigma\; q_e$$

  - Nel caso di macchine incomplete la fusione degli stati puo' portare a risultati diversi e quindi a piu' soluzioni

# Metodo di Ginsburg

- Fornisce tutte e sole le coppie di stati compatibili (o equivalenti)

1. Tavola di flusso della macchina sequenziale
2. Eliminazione degli stati doppi (con uguali ingressi hanno uguali uscite ed uguali stati futuri) – Linee uguali nella tabella

| stato | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 2/1 | 3/0 |
| 2 | 3/0 | 4/1 |
| 3 | 2/1 | 1/0 |
| 4 | 2/1 | 3/0 |

| stato | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 2/1 | 3/0 |
| 2 | 3/0 | 1/1 |
| 3 | 2/1 | 1/0 |

figura 4.4.1

Es: 1 e 4 rappresentano uno stato doppio

3. Si evidenzino le coppie con uguali uscite (compatibili rispetto l’uscita)

# Metodo di Ginsburg

4. Nuova tabella
   1. Tante righe quante sono le coppie di stati compatibili rispetto l'uscita
   2. Tante colonne quanti sono gli ingressi
   3. Le caselle rappresentino gli stati verso cui  il sistema evolve

| Stato | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4/00 | 4/11 | 4/11 |
| 2 | 5/01 | 4/10 | 2/01 |
| 3 | 4/00 | 5/00 | 6/00 |
| 4 | 5/01 | 6/10 | 2/01 |
| 5 | 6/00 | 6/11 | 6/11 |
| 6 | 1/01 | 6/10 | 2/01 |

| Stato | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|
| 1,5 | 4,6 | 4,6 | 4,6 |
| 2,4 | 5,5 | 4,6 | 2,2 |
| 2,6 | 5,1 | 4,6 | 2,2 |
| 4,6 | 5,1 | 6,6 | 2,2 |

Es: 1,5 e 2,4;  2,6;  4,6 sono coppie di stati compatibili rispetto l'uscita

5. Analisi della tabella
   1. evidenziare se l'evoluzione avviene verso coppie di stati compatibili
   2. Si eliminino le righe ove compaiono coppie di stati non compatibili
   3. Si eliminino anche le righe che evolvono verso la predetta coppia di stati

# Metodo di Ginsburg

6. Rimangono le coppie di stati compatibili (o equivalenti)
   1. Si evidenzino relazioni di mutua compatibilita'
   2. Si raggruppino tra loro gli stati compatibili
   3. Si suddividano gli stati in sottoinsiemi $S_1$, $S_2$,......,$S_s$ con s minimo

      1) Ogni $S_i$ contenga solo stati compatibili.

      2) Ogni stato $q_j$ di *M* sia contenuto in almeno un sottoinsieme $S_i$. Se M e' una macchina completa $q_j$ comparira' in uno solo degli $S_i$.

      3) Per ogni ingresso i e ogni sottoinsieme $S_j$ esista un $S_k$ tale che l'ingresso i faccia evolvere tutti gli stati di $S_j$ in stati di $S_k$.
7. Si sostituiscano a questi sottoinsiemi dei nuovi stati nella macchina minima M'

# Metodo di Ginsburg

- Esempio 1

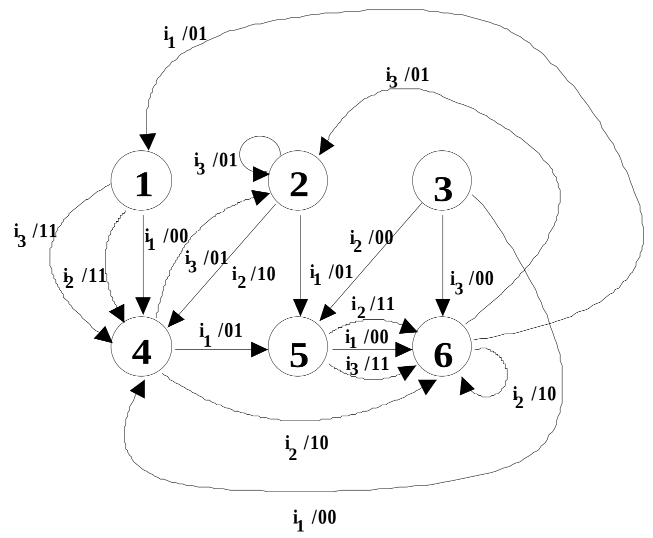


**figura 4.4.2**

| Stato | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4/00 | 4/11 | 4/11 |
| 2 | 5/01 | 4/10 | 2/01 |
| 3 | 4/00 | 5/00 | 6/00 |
| 4 | 5/01 | 6/10 | 2/01 |
| 5 | 6/00 | 6/11 | 6/11 |
| 6 | 1/01 | 6/10 | 2/01 |

# Metodo di Ginsburg

- Esempio 1

| Stato | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4/00 | 4/11 | 4/11 |
| 2 | 5/01 | 4/10 | 2/01 |
| 3 | 4/00 | 5/00 | 6/00 |
| 4 | 5/01 | 6/10 | 2/01 |
| 5 | 6/00 | 6/11 | 6/11 |
| 6 | 1/01 | 6/10 | 2/01 |

| Stato | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|
| 1,5 | 4,6 | 4,6 | 4,6 |
| 2,4 | 5,5 | 4,6 | 2,2 |
| 2,6 | 5,1 | 4,6 | 2,2 |
| 4,6 | 5,1 | 6,6 | 2,2 |

Nessuna riga va cancellata

Vi e' una mutua compatibilita' tra le coppie 2-4, 4-6 e 6-2 che possono pertanto essere fuse assieme

$S_1 = \{1,5\}$ $S_2 = \{2,4,6\}$ $S_3 = \{3\}$

| Stati equivalenti | Stati di M' | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 1' | 2'/00 | 2'/11 | 2'/11 |
| 2,4,6 | 2' | 1'/01 | 2'/10 | 2'/01 |
| 3 | 3' | 2'/00 | 1'/00 | 2'/00 |

# Metodo di Ginsburg

- Esempio 1

| Stati equivalenti | Stati di M' | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,5 | 1' | 2'/00 | 2'/11 | 2'/11 |
| 2,4,6 | 2' | 1'/01 | 2'/10 | 2'/01 |
| 3 | 3' | 2'/00 | 1'/00 | 2'/00 |

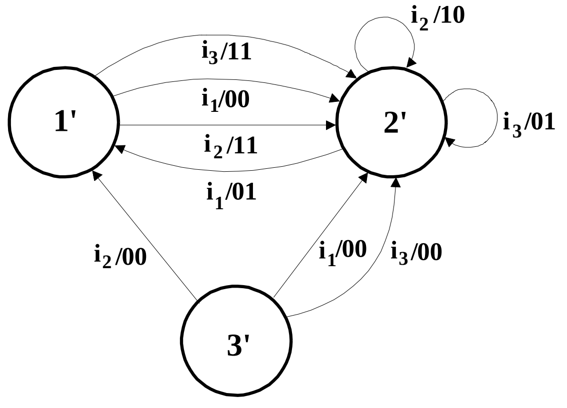


figura 4.4.3

# Metodo di Ginsburg

- Esempio 2

1 e 5 stati doppi

| Stato | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 4/1 | 6/3 | 6/4 |
| 2 | 6/3 | 4/3 | 1/1 | 7/4 |
| 3 | 3/3 | 6/2 | 4/4 | 8/1 |
| 4 | 6/3 | 4/3 | 5/1 | 3/4 |
| 5 | 1/4 | 4/1 | 6/3 | 6/4 |
| 6 | 3/1 | 5/3 | 6/2 | 3/3 |
| 7 | 7/3 | 6/2 | 2/4 | 8/1 |
| 8 | 1/3 | 8/2 | 4/4 | 6/1 |

| Coppie di stati | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 2,4 | 6,6 | 4,4 | 1,1 | 3,7 |
| 3,7 | 3,7 | 6,6 | 4,2 | 8,8 |
| 3,8 | 3,1 | 6,8 | 4,4 | 8,6 |
| 7,8 | 7,1 | 6,8 | 2,4 | 8,6 |

figura 4.4.4

3-8 e 7-8 evolvono verso coppie non compatibili

$S_1=\{1\}$ $S_2=\{2,4\}$ $S_3=\{3,7\}$ $S_4=\{6\}$ $S_5=\{8\}$

| Stati di M | Stati di M' | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1' | 1'/4 | 2'/1 | 4'/3 | 4'/4 |
| 2,4 | 2' | 4'/3 | 2'/3 | 1'/1 | 3'/4 |
| 3,7 | 3' | 3'/3 | 4'/2 | 2'/4 | 5'/1 |
| 6 | 4' | 3'/1 | 1'/3 | 4'/2 | 3'/3 |
| 8 | 5' | 1'/3 | 5'/2 | 2'/4 | 4'/1 |

# Metodo di Ginsburg

- Esempio 3

| Stati | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| 1 | 1/- | 2/1 |
| 2 | 3/1 | 1/1 |
| 3 | 2/0 | 1/1 |

| Coppie di stati | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|
| 1,2 | 1,3 | 2,1 |
| 1,3 | 1,2 | 2,1 |

$S_1=\{1,2\}$ $S_2=\{1,3\}$

| Stati di M | Stati di M' | $i_1$ | $i_2$ |
|---|---|---|---|
| 1,2 | 1' | 2'/1 | 1'/1 |
| 1,3 | 2' | 1'/0 | 1'/1 |

# Metodo di Ginsburg

- Esempio 4

| Stati | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -/- | 5/0 | 4/1 | 3/1 |
| 2 | 3/- | 2/1 | 4/- | 1/0 |
| 3 | 6/1 | 5/1 | 1/1 | 3/0 |
| 4 | -/- | 6/0 | -/- | 6/1 |
| 5 | 5/1 | 1/0 | -/- | 3/1 |
| 6 | 5/1 | -/- | 4/1 | -/- |

| Coppie di stati | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,4 | -,- | 5,6 | 4,- | 3,6 |
| 1,5 | -,5 | 5,1 | 4,- | 3,3 |
| 1,6 | -,5 | 5,- | 4,4 | 3,- |
| 2,3 | 3,6 | 2,5 | 4,1 | 1,3 |
| 2,6 | 3,5 | 2,- | 4,4 | 1,- |
| 3,6 | 6,5 | 5,- | 1,4 | 3,- |
| 4,5 | -,5 | 6,1 | -/- | 6,3 |
| 4,6 | -,5 | 6,- | -,4 | 6,- |
| 5,6 | 5,5 | 1,- | -,4 | 3,- |

figura 4.4.5

Si eliminino le coppie 2-3 e 2-6

Mutua compatibilita' tra le coppie: 1,4 1,5 1,6 4,5 4,6 5,6

| Stati di M | Stati di M' | $i_1$ | $i_2$ | $i_3$ | $i_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,4,5,6 | 1' | 1'/1 | 1'/0 | 1'/1 | 3'/1 |
| 2 | 2' | 3'/- | 2'/1 | 1'/- | 1'/0 |
| 3,6 | 3' | 1'/1 | 1'/1 | 1'/1 | 3'/0 |