Forme indeterminate

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = ?$$

- $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = ?$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = ?$$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

$\operatorname{sen} x \sim x$

$x_0 = 0$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{x} = -1} \iff \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

⊙ $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = ?$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

$$\boxed{\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e}$$

Proprietà dell'esistenza del limite

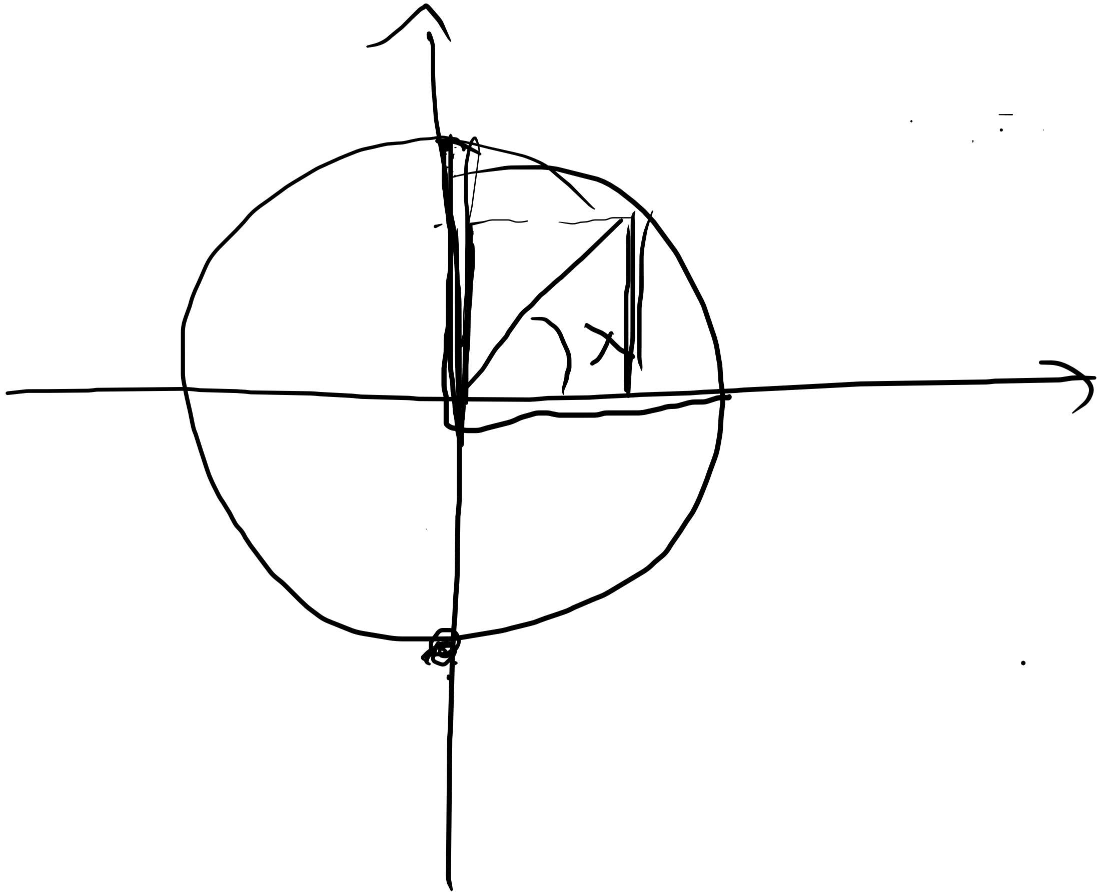
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $\quad l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

allora l è unico.

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x =$ non esiste

$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad \operatorname{sen} x_k = 1 \quad \forall k$

$y_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\quad \operatorname{sen} y_k = -1 \quad \forall k$


x

Teorema del confronto (Carabinieri)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = l \qquad \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

e se $\quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x$

in un intorno di x_0

Prop Sia f una funzione crescente (decrescente) in un intervallo illimitato $(s, +\infty)$ $[(-\infty, t)]$

Allora esiste il $\lim_{x \to +\infty [(-\infty)]} f(x) = l$

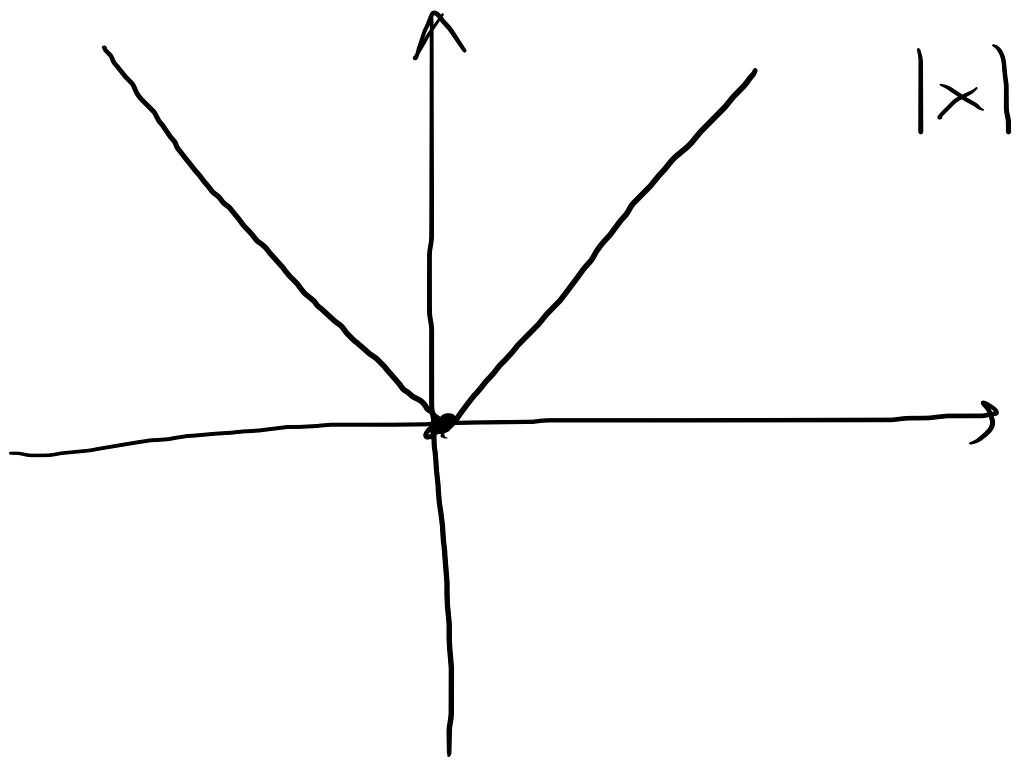
Inoltre se f è una funzione limitata allora l è finito, mentre se f è una funzione illimitata allora l non è finito

Def Sia f definita in un aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale

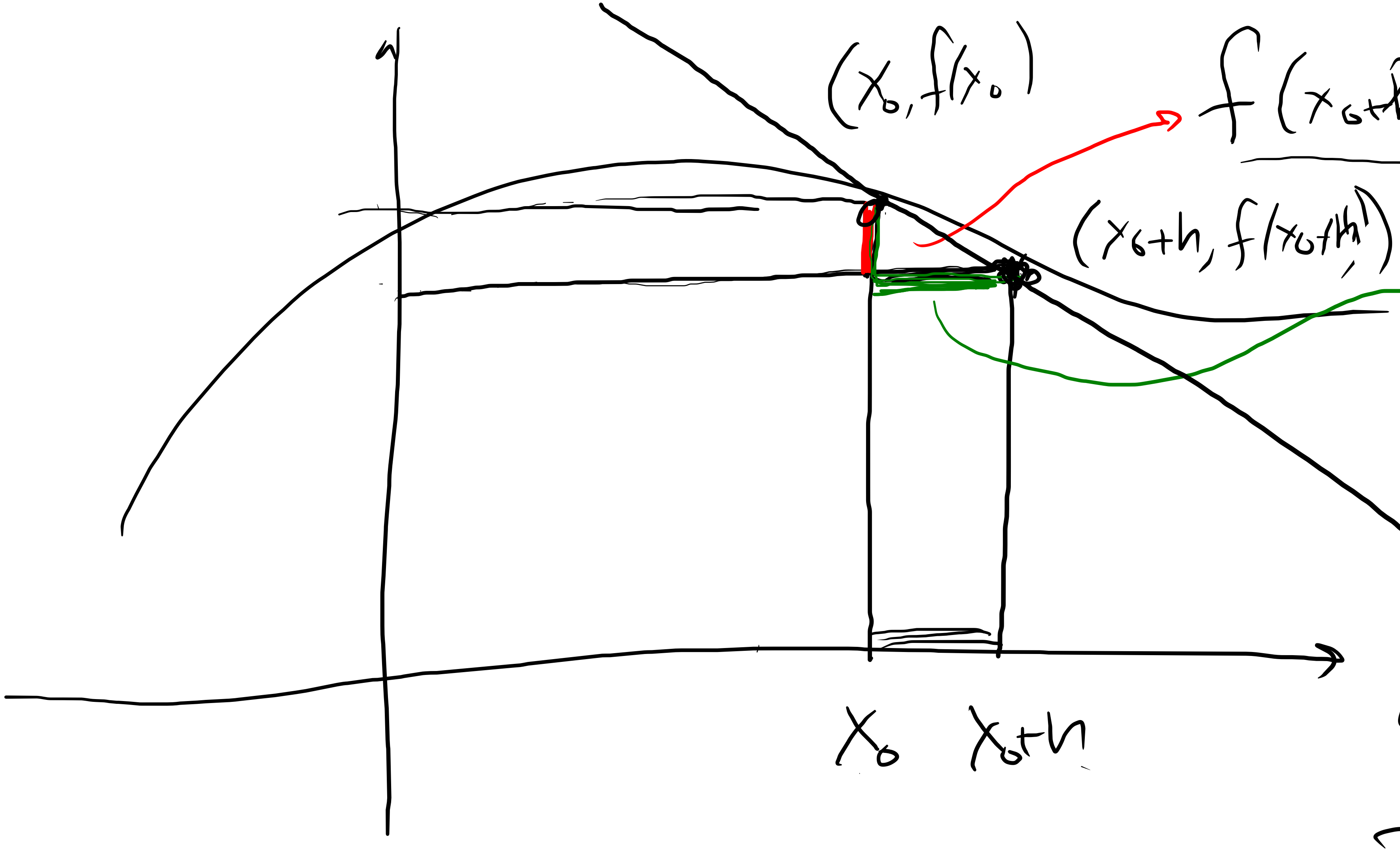
$x_0 \in A$. ($\exists$ quindi un intorno di x_0 $I_{x_0} \subset A$)

Diremo che f è CONTINUA in x_0 se

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$



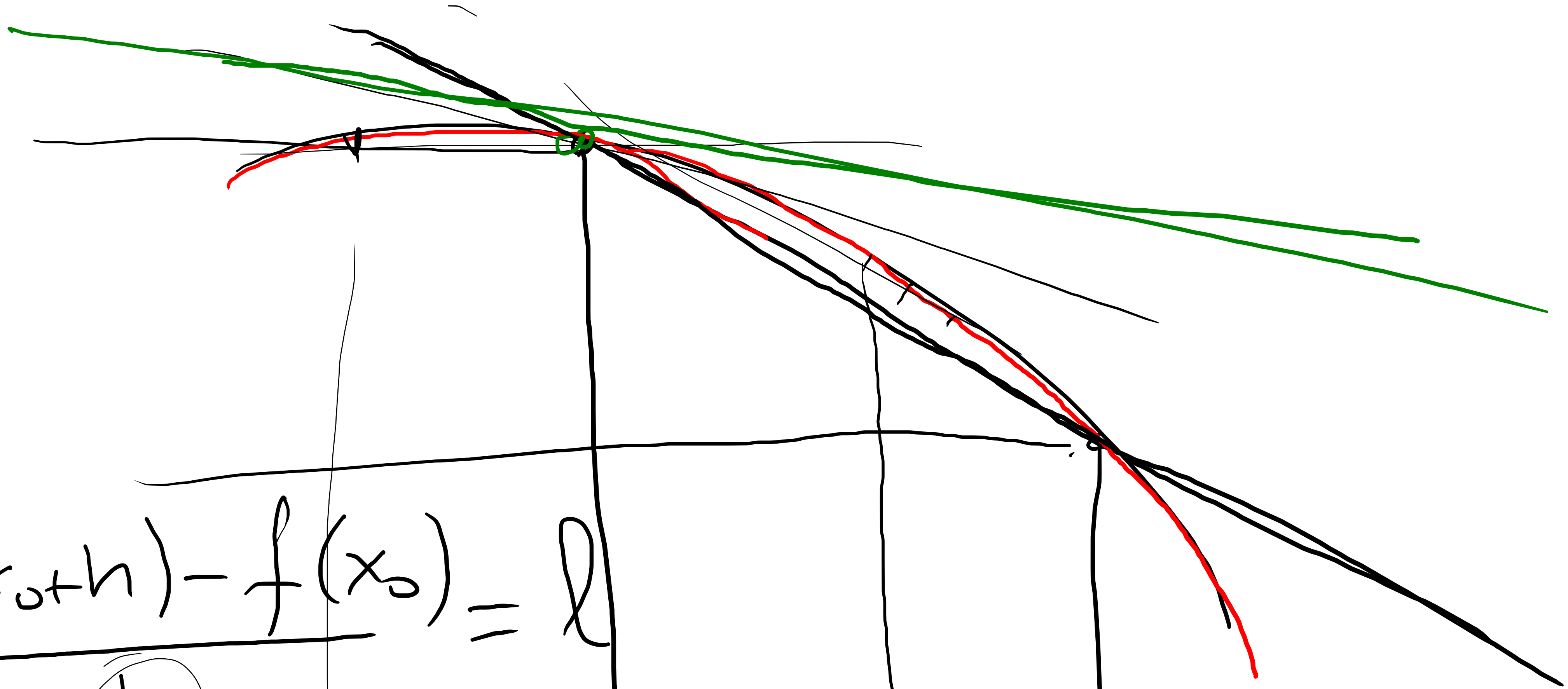
$|x|$



$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$h \in \mathbb{R}$
$h \neq 0$

Rapporto incrementale di f in x



Se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$$

l è finito

allora f è derivabile in x_0 e l è detta derivata di f in x_0

$$\ell = f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

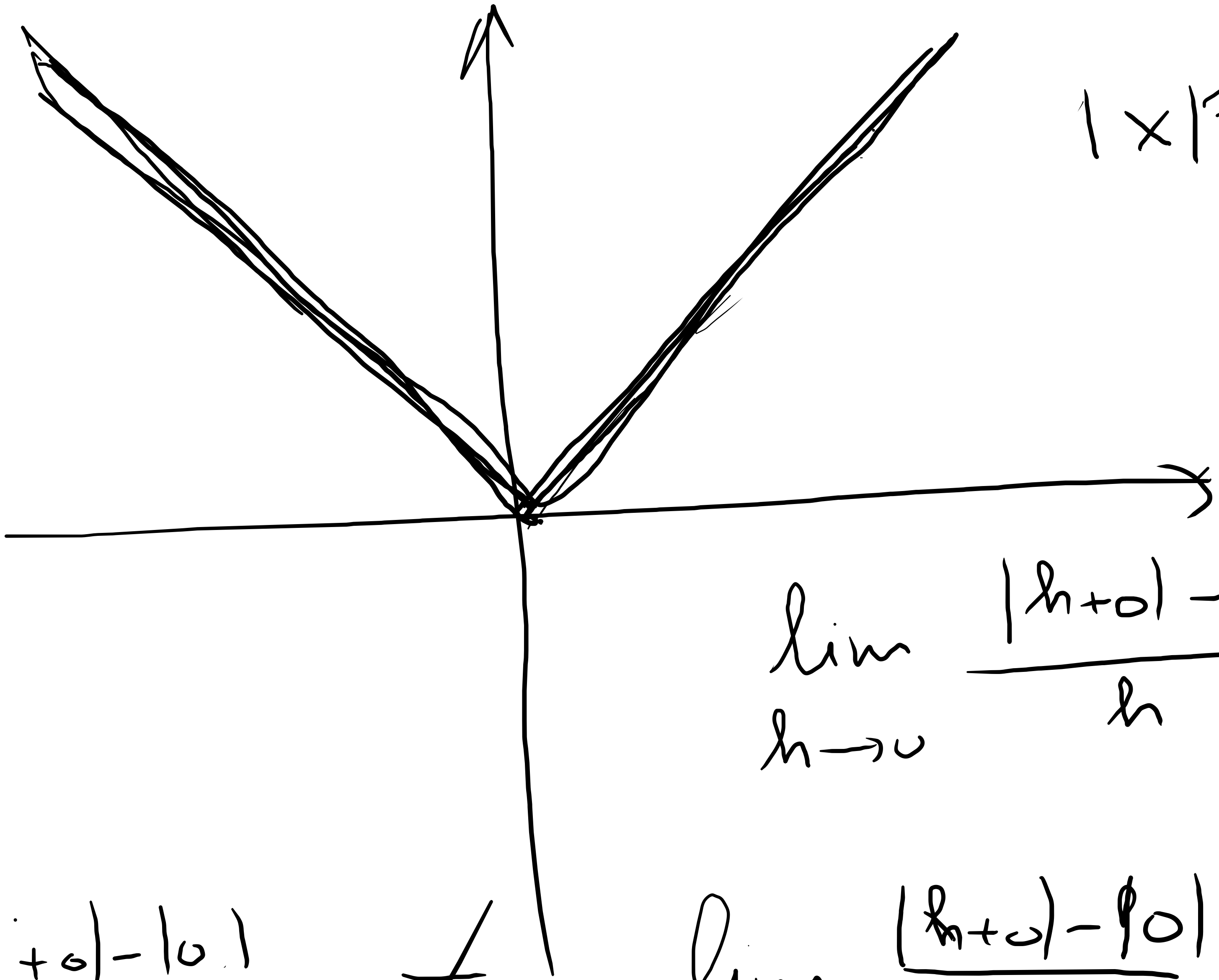
derivata di f in x_0

<u>Oss</u> Se esiste la derivata di f in x_0, si dice anche che f è DERIVABILE in x_0; dal punto di vista geometrico significa che il grafico di f in x_0 ha una retta tangente la cui pendenza è $f'(x_0)$.

Una funzione derivabile in ogni $x_0 \in (a,b)$ si dice derivabile in (a,b).

Prop Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

MA NON VALE il viceverso



$|x| = \sqrt{x^2}$ in 0 presenta un punto angoloso

$$\lim_{h \to 0} \frac{|h+0|-|0|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

$$-1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h+0|-|0|}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{|h+0|-|0|}{h} = 1$$

$$\boxed{Df = f'}$$

Siano f e g derivabili

Prop $D(f \mp g) = Df \mp Dg$

Regola di Leibniz $D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$

$\Downarrow$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) \overset{g \neq 0}{=} \frac{Df \cdot g - Dg \cdot f}{g^2}$$

Se $f(x) = k$ costante

$Df(x) = 0 \quad \forall x$

dalla formula di Leibniz

$$D\left(k \cdot g(x)\right) = k \cdot Dg(x)$$

Regola di L'Hôpital

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $(\pm\infty)$

e se f, g sono derivabili in un intorno di x_0

e se $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ esiste, allora

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l}$$

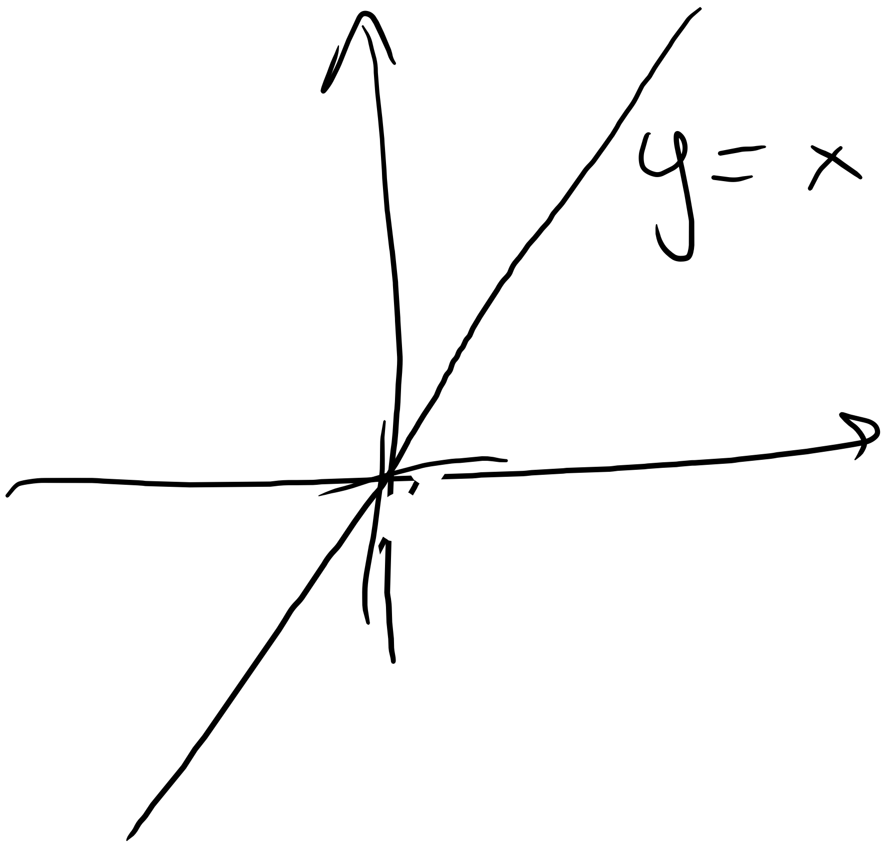
ES

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$x_0 = 0$

$\operatorname{sen} x = f(x)$

$x = g(x)$



$D\, x = 1 \quad \forall x$

$D \operatorname{sen} x = ?$

$$x \longmapsto x^{n} \qquad n \in$$

$$\boxed{D x^n = \underline{n} \cdot x^{\underline{n}-1}}$$

$$\boxed{D \operatorname{sen} x = \cos x} \quad \boxed{D \cos x = -\operatorname{sen} x}$$

$$\boxed{D e^x = e^x}$$

$$D\, tg x = D \frac{sen x}{cos x} = \frac{cos^2 x - (-sen x) \cdot sen x}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} =$$

$$= \underline{1 + tg^2 x}$$

$$D\left(1 - 2x + 3x^2 - 5x^6 + 2x^7\right) =$$

$$= 0 - 2 + 3 \cdot 2 \cdot x^{1=2-1} - 5 \cdot 6 \cdot x^{5=6-1} + 14 x^6$$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Passando al rapporto di derivate delle funzioni

$\frac{\cos x}{1}$

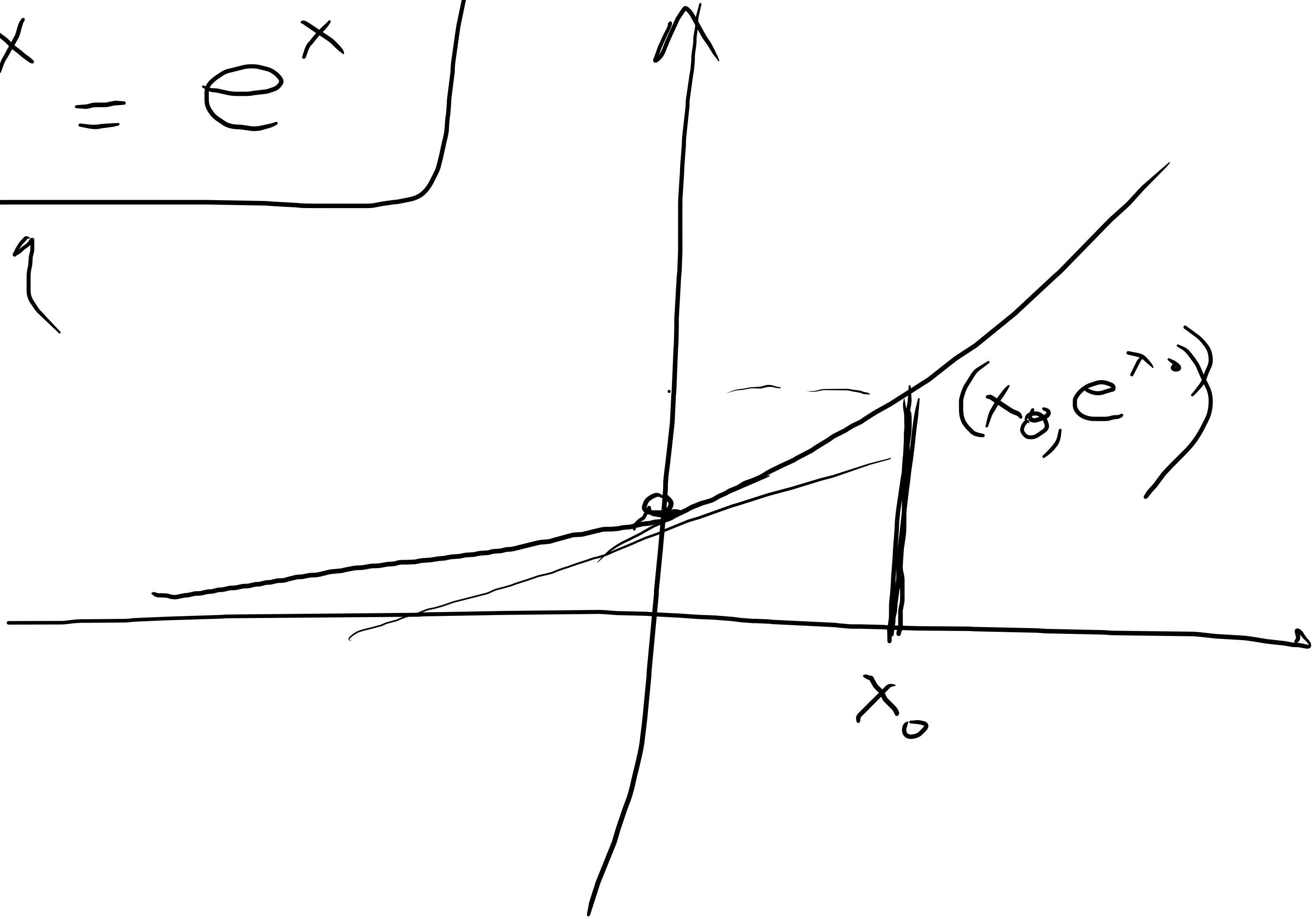
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1}$$

$\Downarrow$ per l'Hôpital

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

$$\boxed{De^x = e^x}$$

$$\boxed{e^0 = 1}$$



$$\boxed{D \log_e x = \frac{1}{x}}$$

Formula della derivata della funzione composta

Sia f derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$

Allora la funzione $g \circ f$ è derivabile in x_0

e si ha
$$D(g \circ f)\big|_{x=x_0} = Dg\big|_{x=x_0} \cdot f'(x_0)$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot \underline{f'(x_0)}$$

Regola della catena

Se f è INVERTIBILE (cioè esiste f^{-1} tale che $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_d$)

Se f è invertibile e derivabile in x_0

$(f'(x_0) \neq 0)$ allora

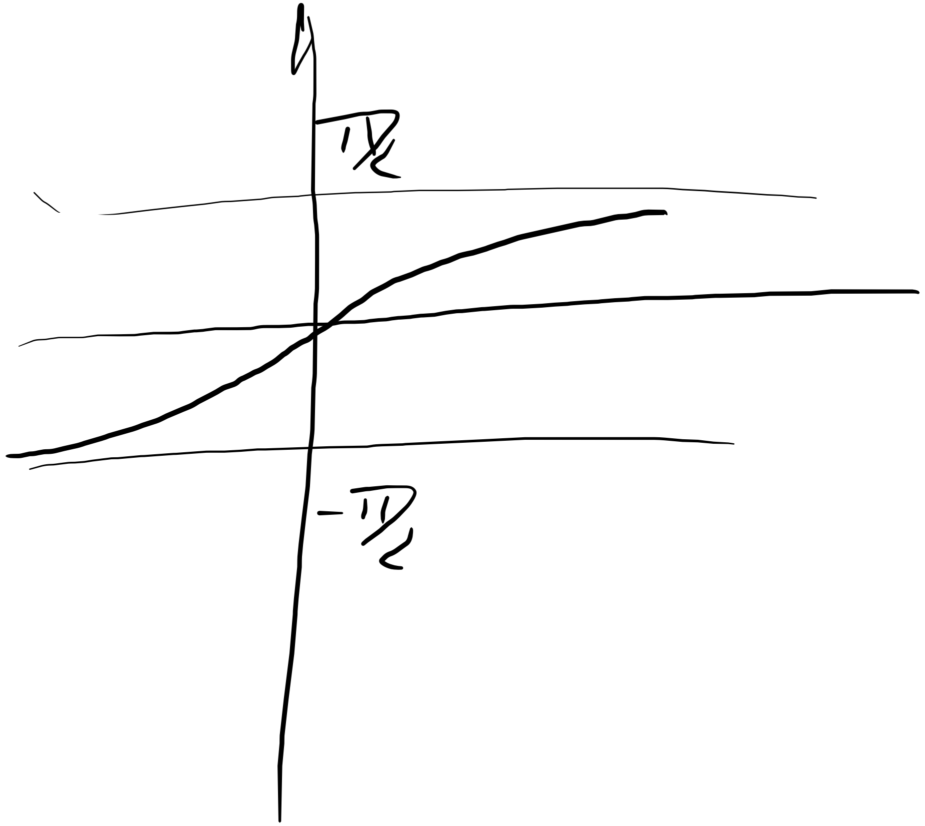
$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

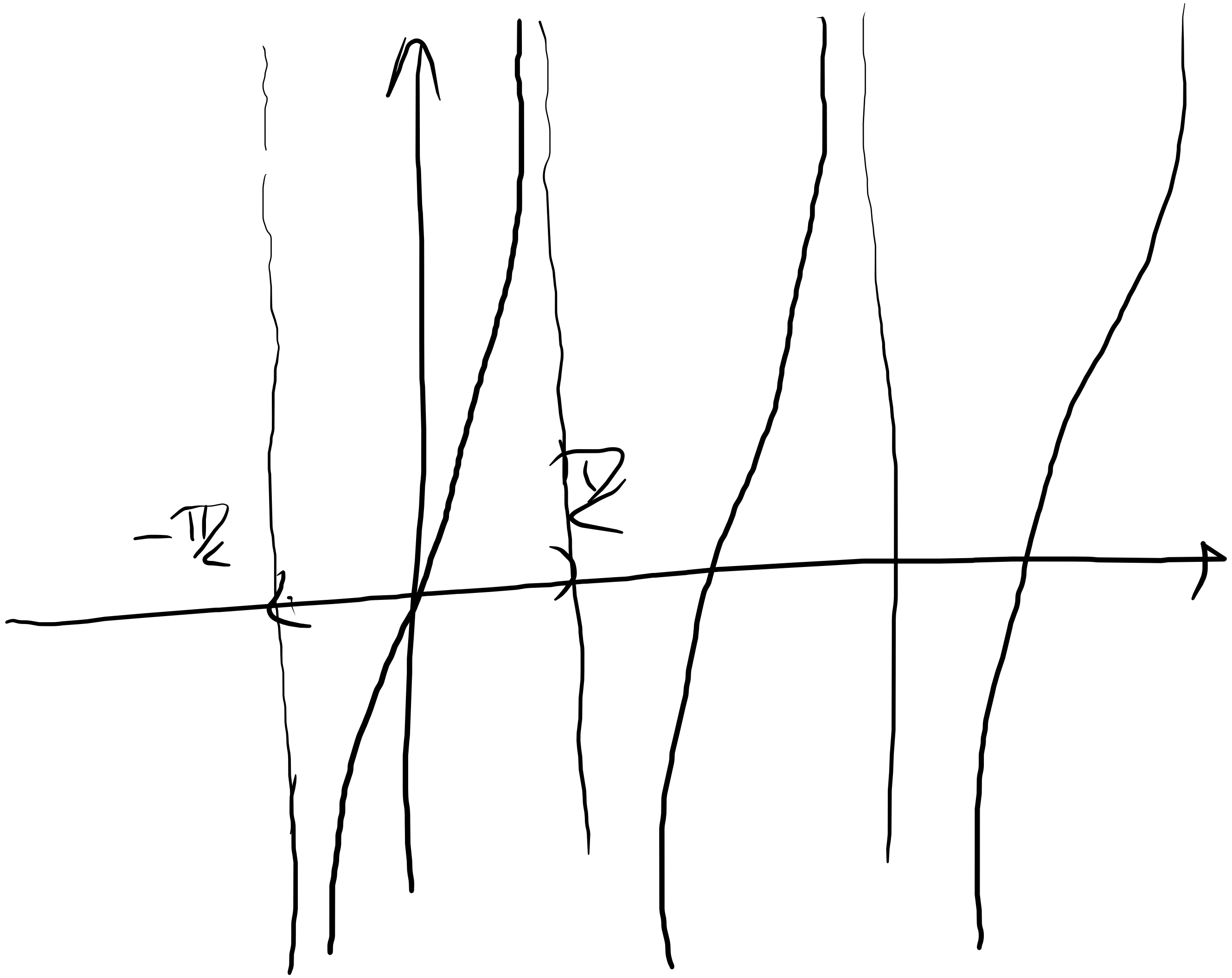
$$\boxed{e^y = x}$$

$\log_e$ come inversa di e^x

$$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{\frac{d}{dy} e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

arcotangente (inversa della funzione tangente quando essa è ristretta all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$)





$$\boxed{D \, \text{arctg}(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{x}}{x}$$

Regola L'Hopital

$$D\,(1-e^{x}) = -e^{-x}$$

$$D\,(x) = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{-e^{-x}}{1} = -1}$$

funzione	derivata
x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\ln x = \log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Regola di Leibniz

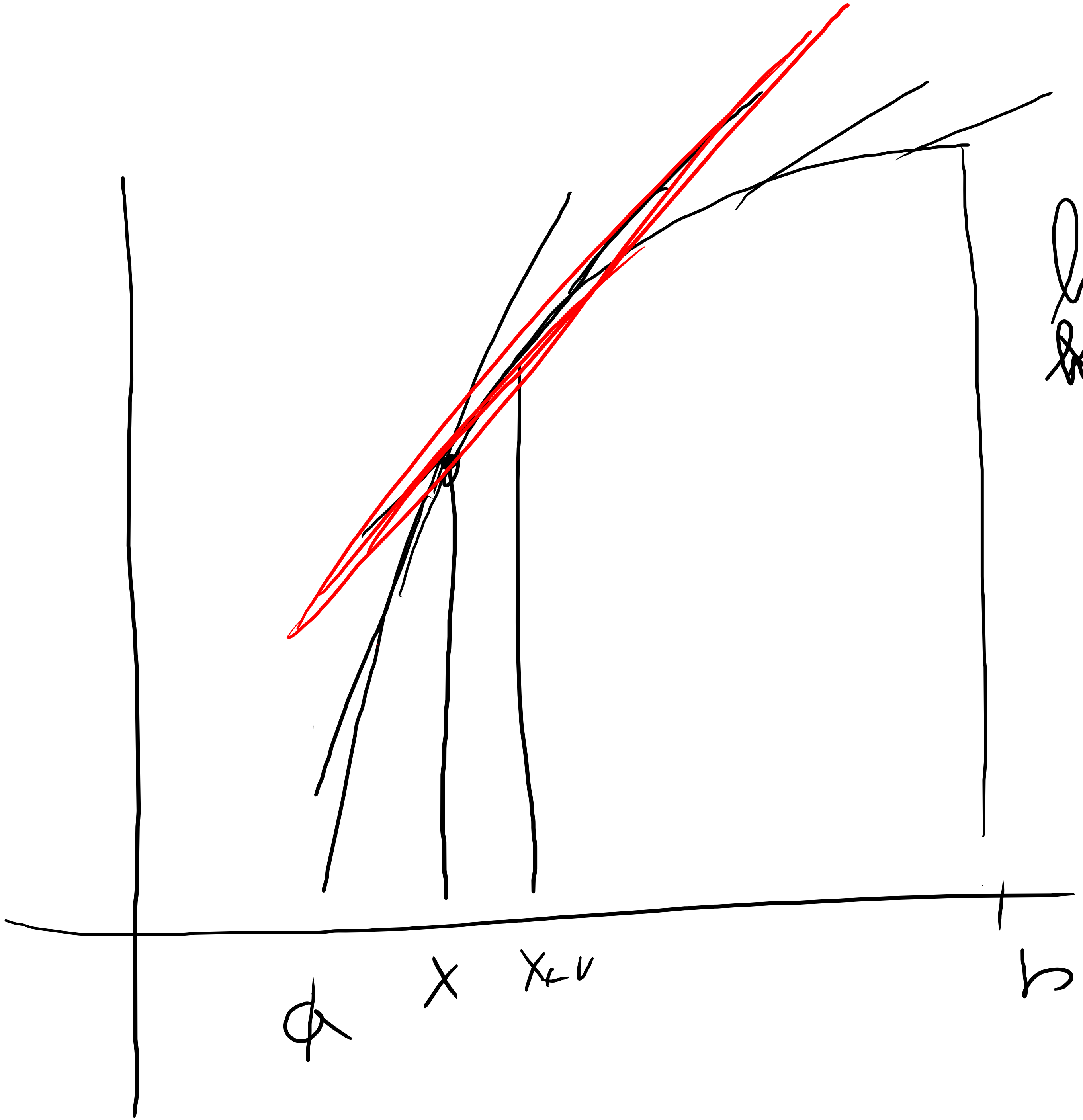
$$D\left(e^x \cdot \cos x\right) = \underbrace{e^x}_{= De^x} \cos x + e^x \cdot \left(D \cos x\right)$$

$$= e^x\left(\cos x - \operatorname{sen} x\right)$$

$$D\left(x^2 \cdot \ln x\right) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= 2x \ln x + x = x\left(2 \ln x + 1\right)$$

<u>Oss</u> Se f è derivabile in un intervallo
(a,b) e se la derivata di f in
negativa
tale intervallo risulta positiva
<
($f'(x)>0$ se $x \in (a,b)$)
decrescente
allore f è crescente nell'intervallo (a,b)

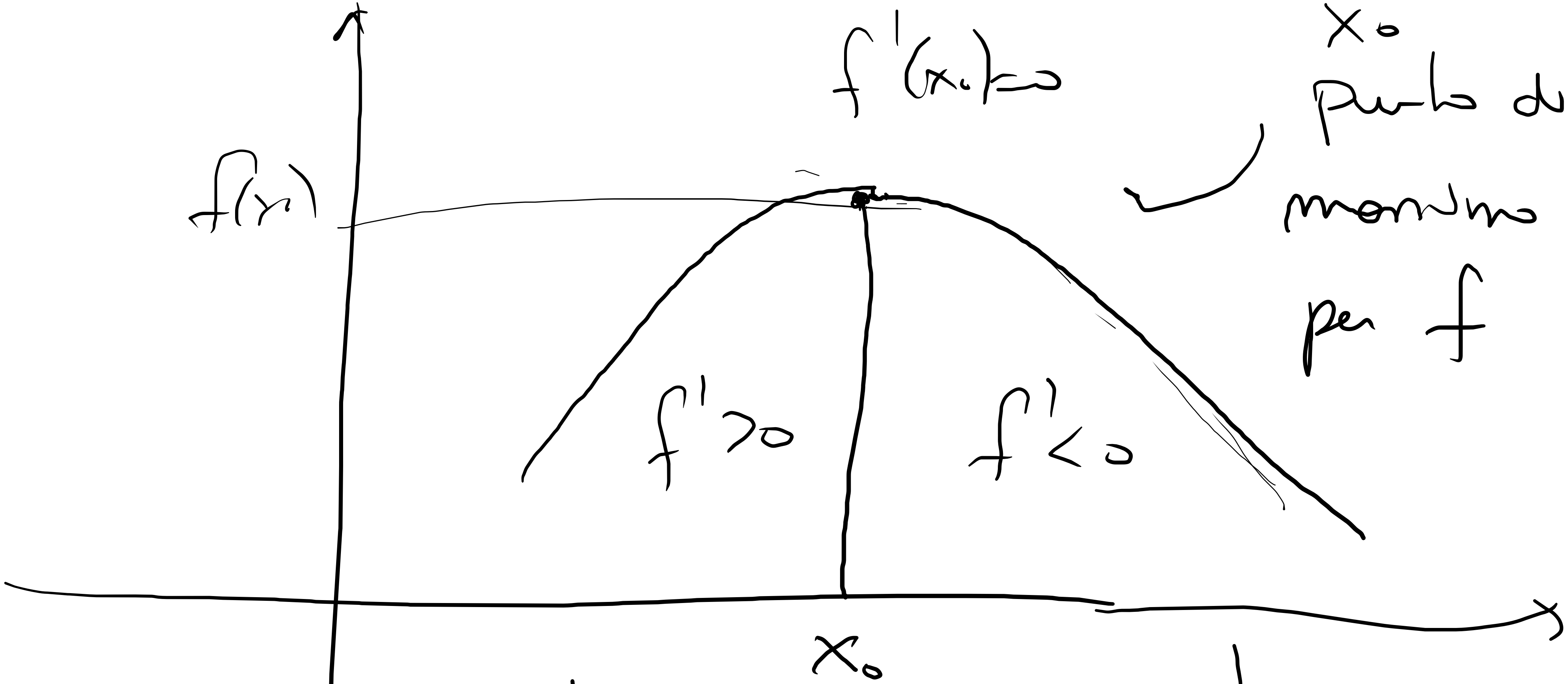


$$\lim_{h \to 0} \frac{\boxed{f(x_0+h) - f(x_0)}}{h} = l > 0$$

$\boxed{h > 0}$ $\quad x_0+h > x_0$

$f(x_0+h) > f(x_0)$

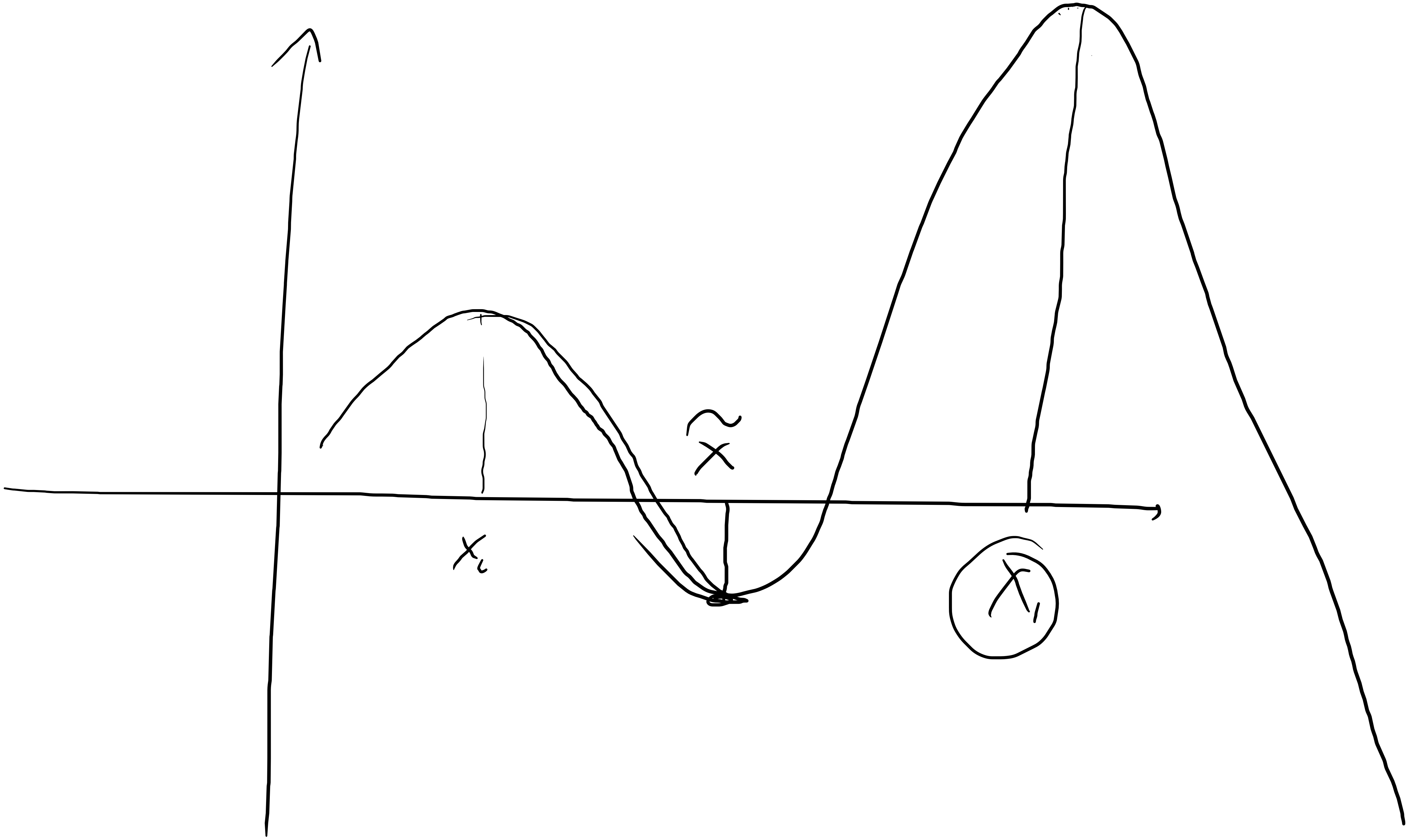
se f è crescente



x_0 punto di massimo locale per f

$f'>0$ $\qquad$ $f'<0$

$\boxed{f'=0}$



$\tilde{x}$
x_i
$\bar{x}_1$

Prop Supponiamo x_0 sia un punto di massimo (minimo) locale per f.
Se f è derivabile in x_0, allora

$f'(x_0) = 0$

x_0 MAX

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

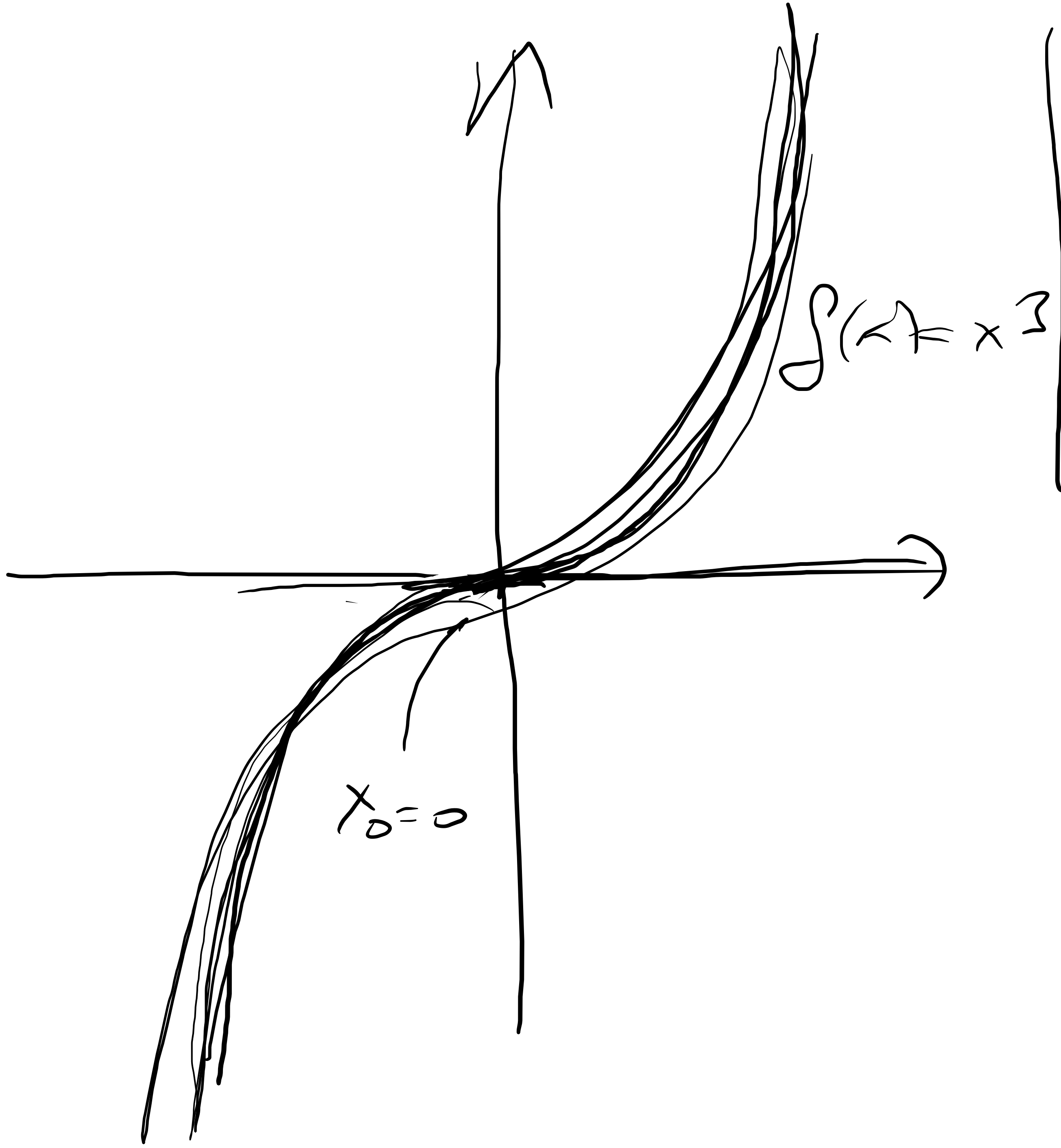
$h > 0 \qquad h < 0$

Non è vero che se $f'(x_0)=0$ allora x_0 è un punto di minimo o di massimo per f.

Infatti, $f(x)=x^3$ $\quad f'(x)=3x^2$

$$3x^2 = f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(0)=0$$

$x_0=0 \quad f'(x)>0 \text{ se } x\neq 0$



0 è un punto
di FLESSO ORIZZONTALE
per f.

$|x| = \sqrt{x^2}$ non è derivabile in $x_0 = 0$

ma lo è in ogni altro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tuttavia essendo $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \iff x = 0$

proprio in 0 tale funzione $|x|$ ha un

minimo assoluto.

Teorema di Weierstrass

Sia f continua in un intervallo CHIUSO e LIMITATO $[a,b]$. Allora f in tale intervallo è dotata sia di massimo che di minimo.

$\exists\ x_m \in [a,b]$, $x_M \in [a,b]$

tale che $m = f(x_m)$ è di minimo per f in $[a,b]$

$M = f(x_M)$ " " massimo per f in $[a,b]$

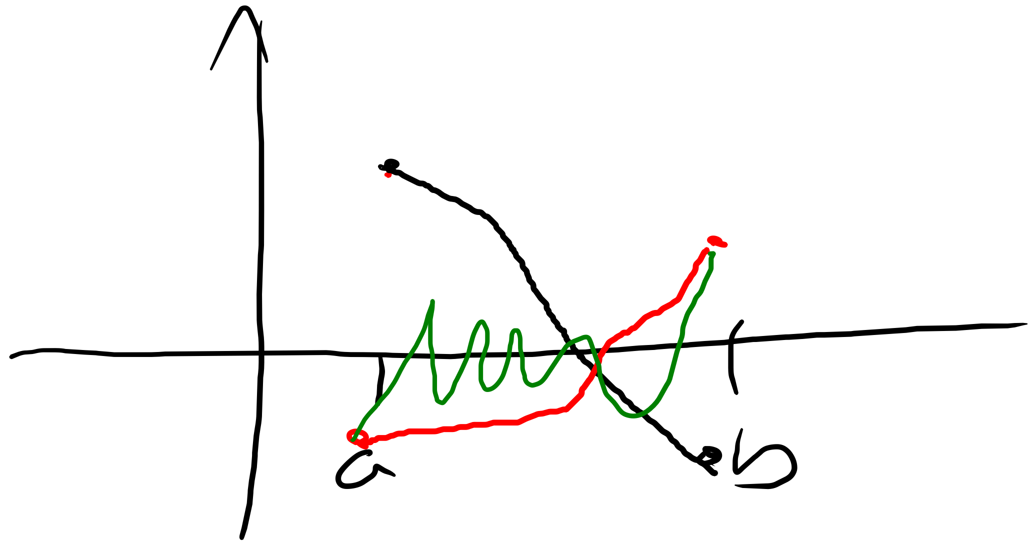
Teorema di Esistenza degli zeri

Supponiamo f continua in $[a,b]$

e $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.

Allora esiste un $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f(x_0)=0$$



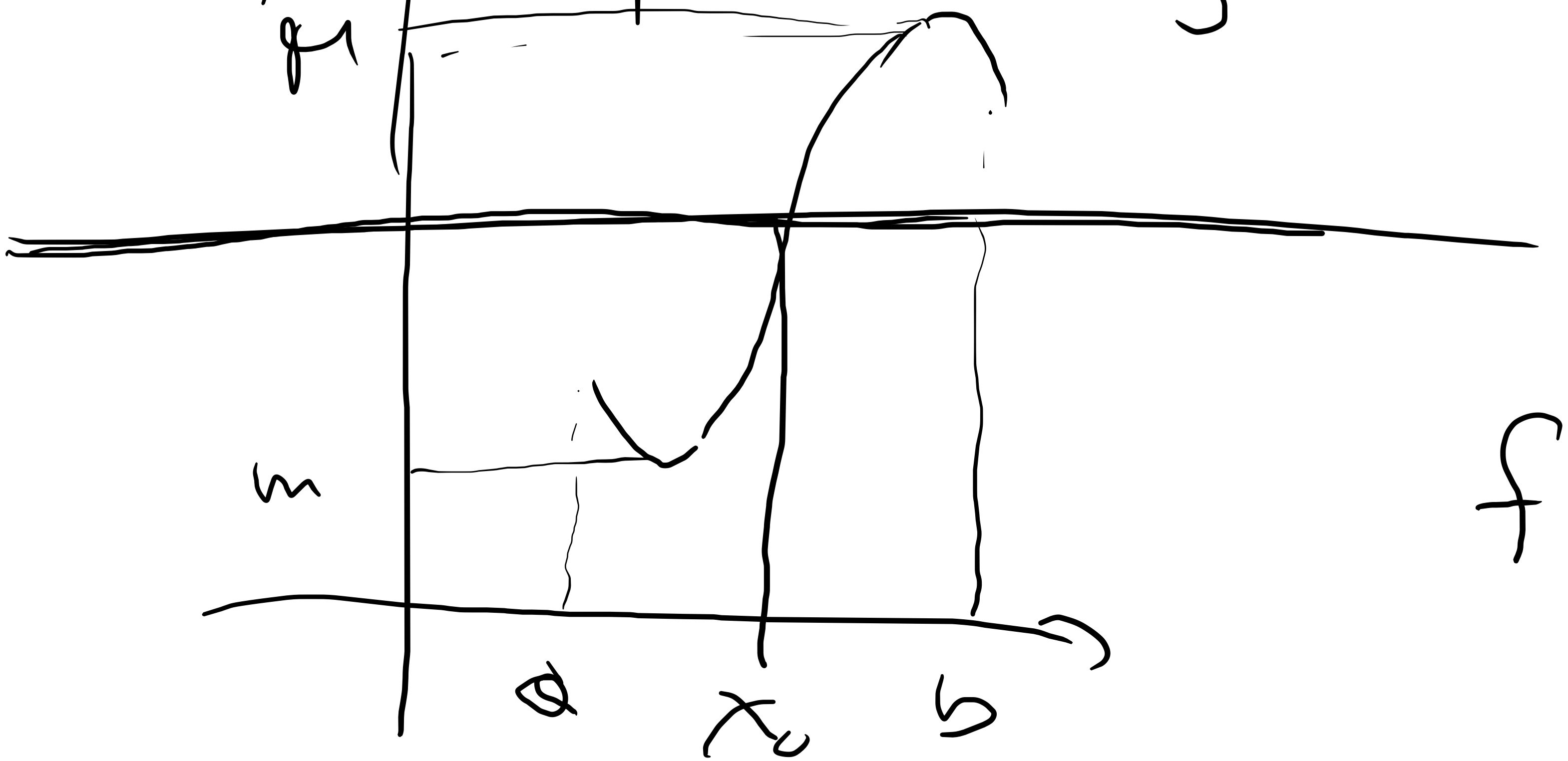
Teorema dei valori intermedi

Sia f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

Per il teorema di Weierstrass, f è dotata di minimo e massimo in $[a,b]$. Siano m ed M rispettivamente i valori minimo e massimo di f in $[a,b]$

$$m \le f(x) \le M$$

Preso comunque $y \in [m, M]$ allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che



$$f(x_0) = y$$

$$y \in [m, M]$$

$$m \le y \le M$$

$$\underline{f(x)} - y =: g(x)$$

Continuo

continue

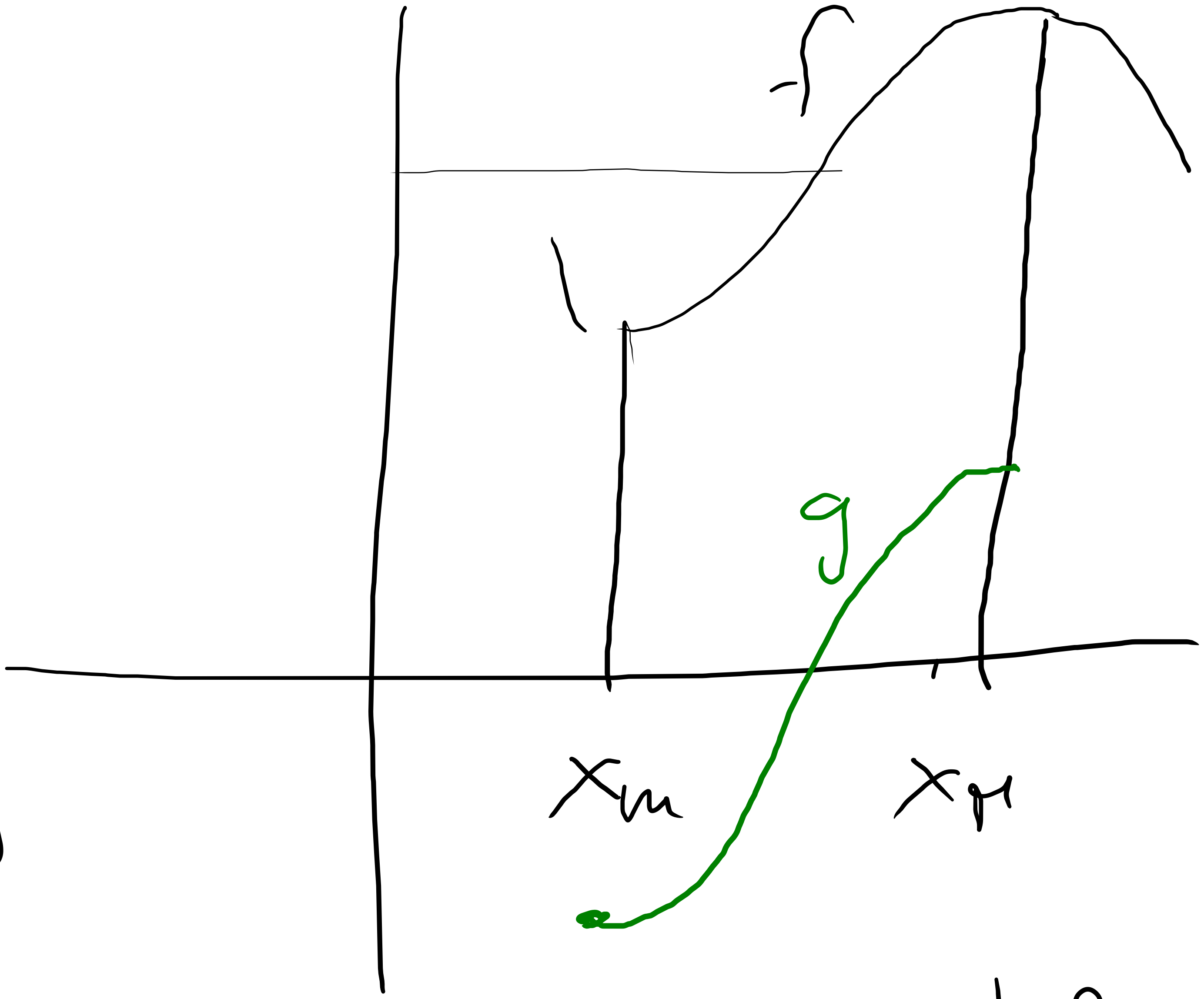
$$f(x_m) = m$$

$$f(x_M) = M$$

$$g(x_m) = f(x_m) - y = m - y \le 0$$

$$g(x_M) = f(x_M) - y = M - y \ge 0$$

$g(x) = f(x) - y$



Per il teorema di esistenza degli zeri applicato a g, $\exists\, x_0 \in [x_m, x_M] \subset [a,b]$ tale che $g(x_0) = 0 \iff \boxed{f(x_0) = y}$

$$g(x_0) = f(x_0) - y$$

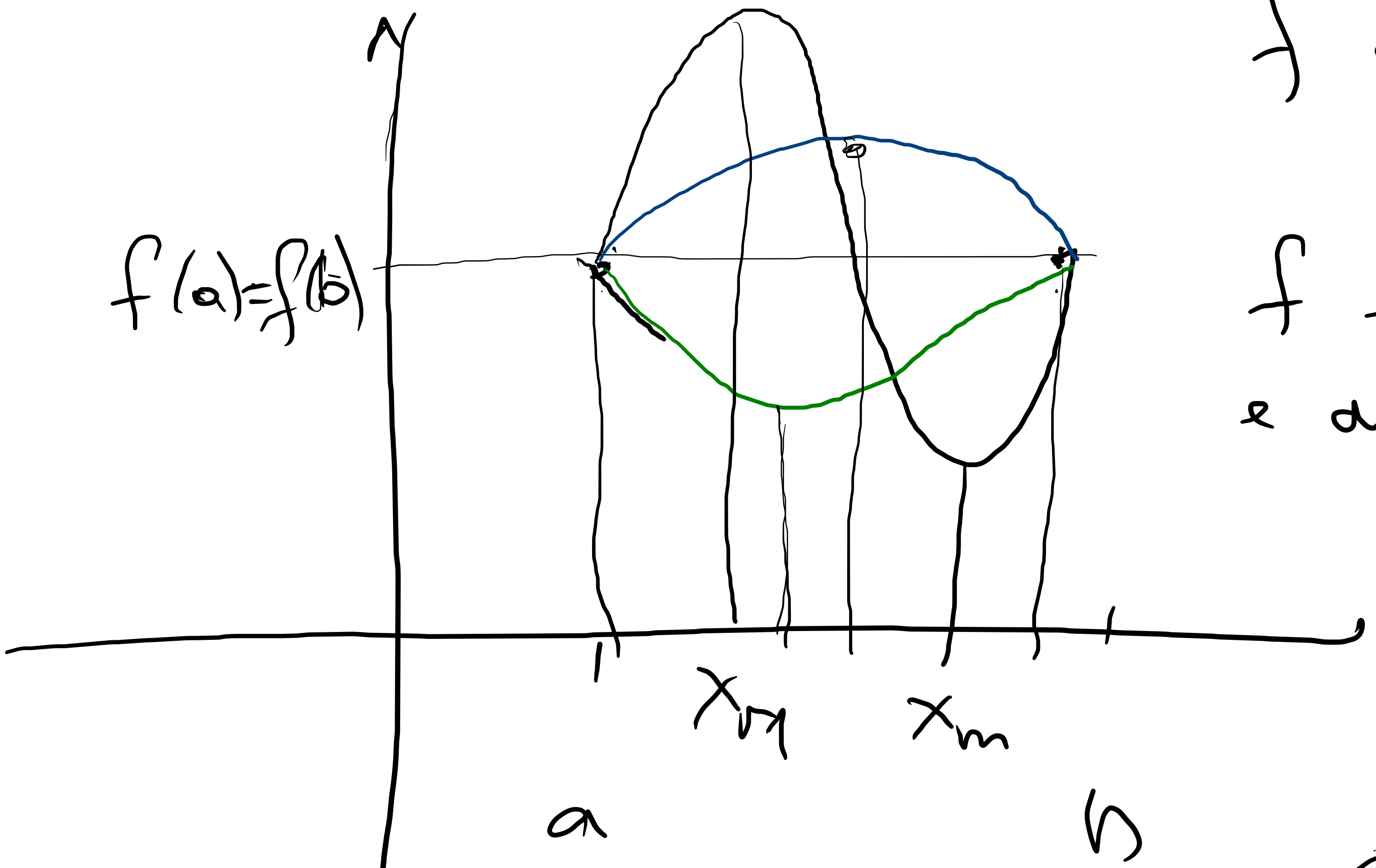
Teorema di Rolle

f continua in $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$

$f(a)=f(b)$ e f risulta derivabile in (a,b)

intervallo aperto di estremi a e b.

Allora esiste $x_0 \in (a,b)$ tale che $f'(x_0)=0$.



f è continua in $[a,b]$

$\Downarrow$ Weierstrass

f è dotata di max e di minimo in $[a,b]$.

$\Downarrow$

Se x_m o $x_M \in (a,b)$

allora $f'(x_m)=0$

(oppure $f'(x_M)=0$)

Se invece $x_m=a$ $\quad f(a)=m=f(b)$

$\Rightarrow x_M \neq b \quad x_M \neq a \quad x_M \in (a,b)$ ✓

Analogamente se $x_M=a \quad x_m \in (a,b)$ ✓

$\underline{x_m = a}$ $\quad$ $\underline{x_M = b}$ $\quad$ $\underline{f(a) = f(b)}$

$\Longrightarrow f(x) = f(a) = f(b) \quad \forall x \in [a,b]$

$\Longrightarrow f$ constant $\Rightarrow \boxed{f' = 0}$

$\square$

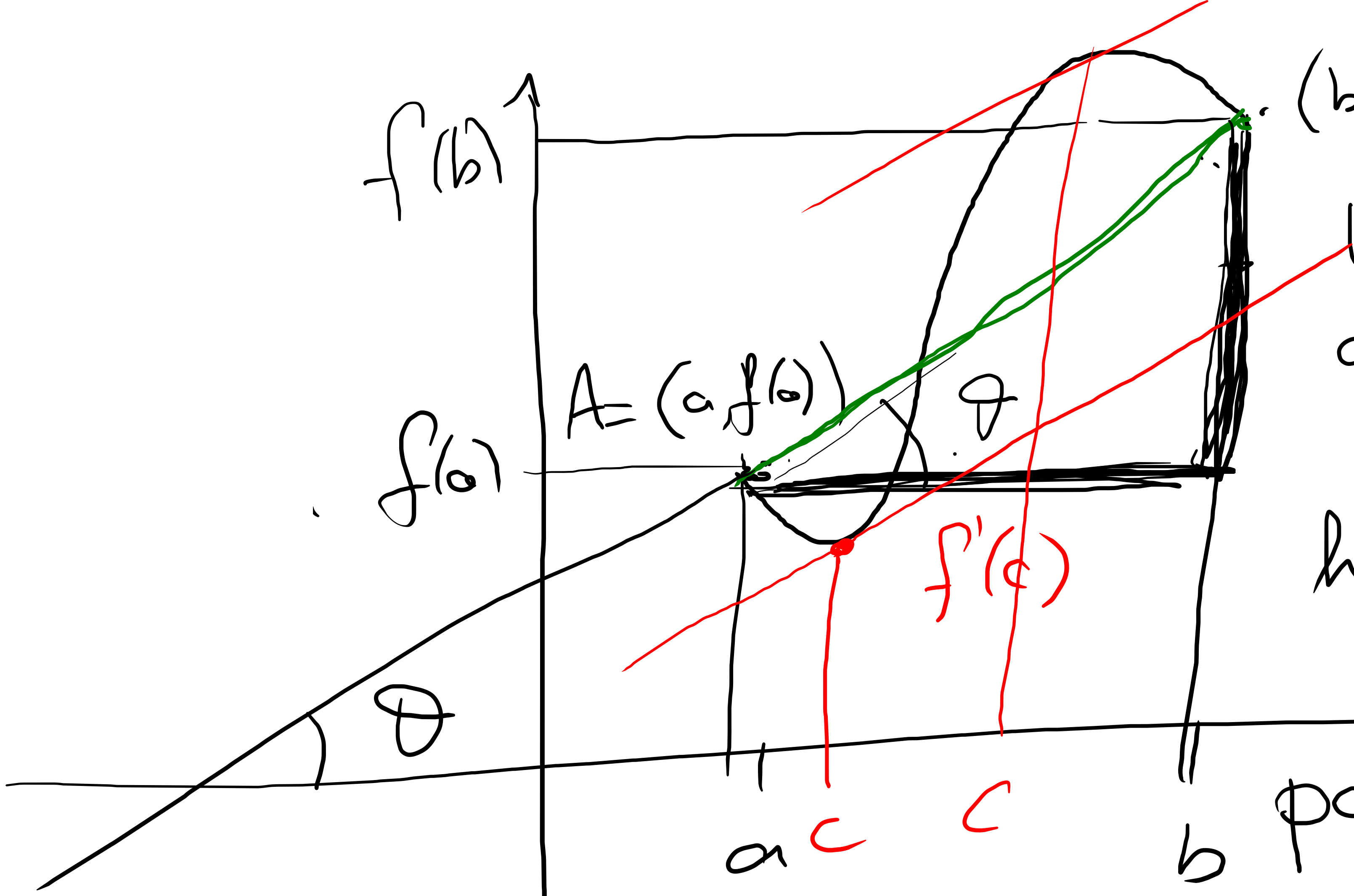
Teorema di Lagrange

f funzione continua in $[a,b]$ intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$

f derivabile in (a,b) intervallo aperto di $\mathbb{R}$

Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che

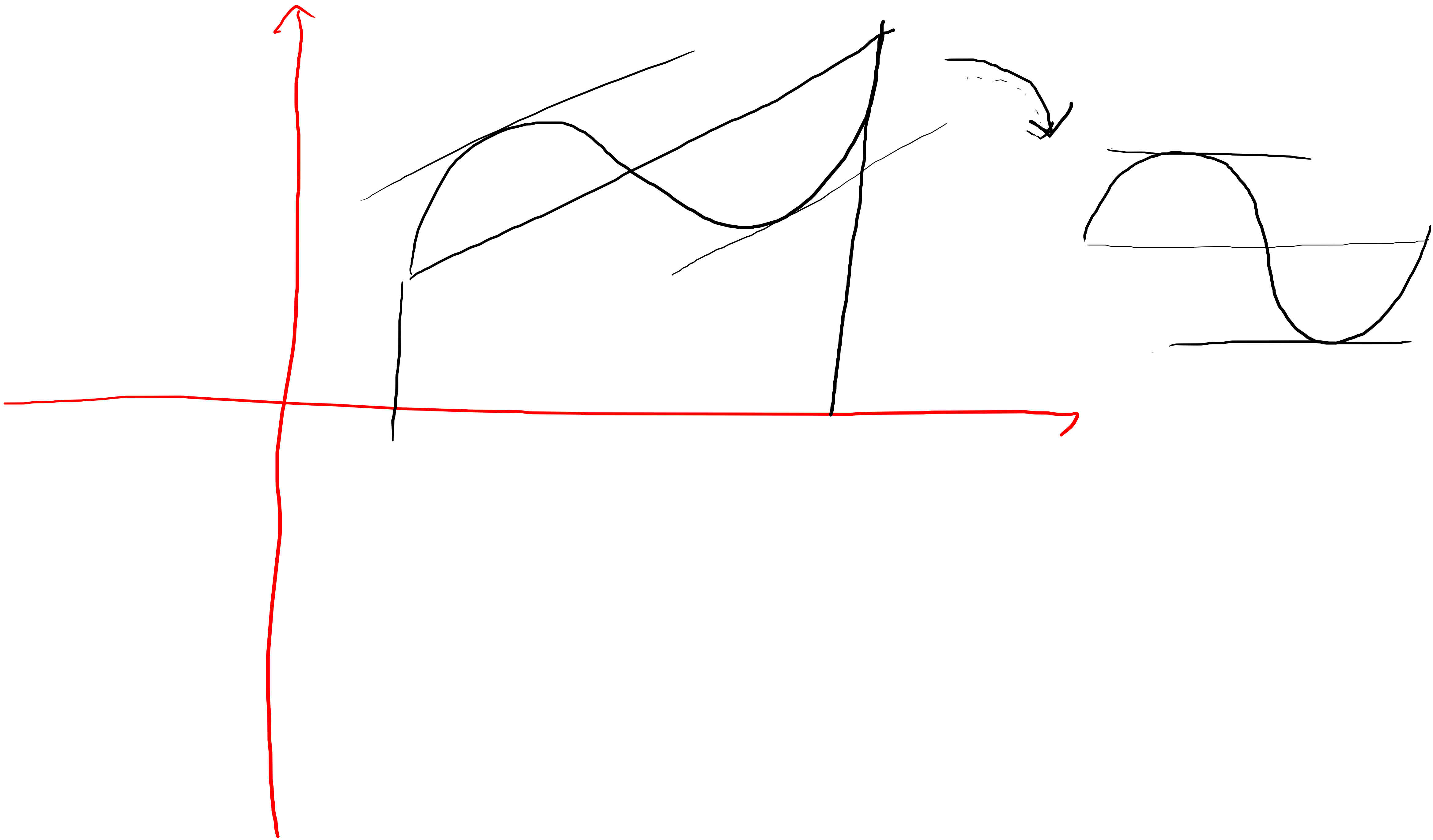
$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



La retta individuata da $(a,f(a))=A$ e $(b,f(b))=B$ ha coefficiente angolare pari a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \iff$$

$$f'(c) \cdot (b-a) = f(b) - f(a)$$

$$\iff$$

$$f(\underline{\underline{b}}) = f(a) + f'(c) \cdot (\underline{\underline{b}} - a)$$

$a = x_0 \qquad b = x$

$$f(x) = f(x_0) + f'(c_x) \cdot (x - x_0)$$

varia con x

Se sostituisco x_0 a c_x

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{} + R_f(x, x_0)$$

differenza fra $f(x)$ e $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} 0 = 0$ $\quad$ $D\,\operatorname{sen} = \cos$

x è in un intorno di $x_0 = 0$

$$\operatorname{sen} x = \underset{\substack{\| \\ 0}}{\operatorname{sen} 0} + \underset{\substack{\uparrow \\ 1}}{\cos 0} \cdot (x - \underset{\substack{\uparrow \\ =0}}{x_0}) + R_{\operatorname{sen}}(0, x)$$

$$= 0 + x \cdot (x - 0) + R$$

$$= x + R_{\operatorname{sen} x}(x, x_0)$$

$e^x \qquad x_0 = 0 \qquad De^x = e^x$

$$e^x = e^0 + De^x\Big|_{x=0} \cdot (x-0) + R_e(x,\ldots$$

$$= 1 + e^0 \cdot (x-0) + R_e =$$

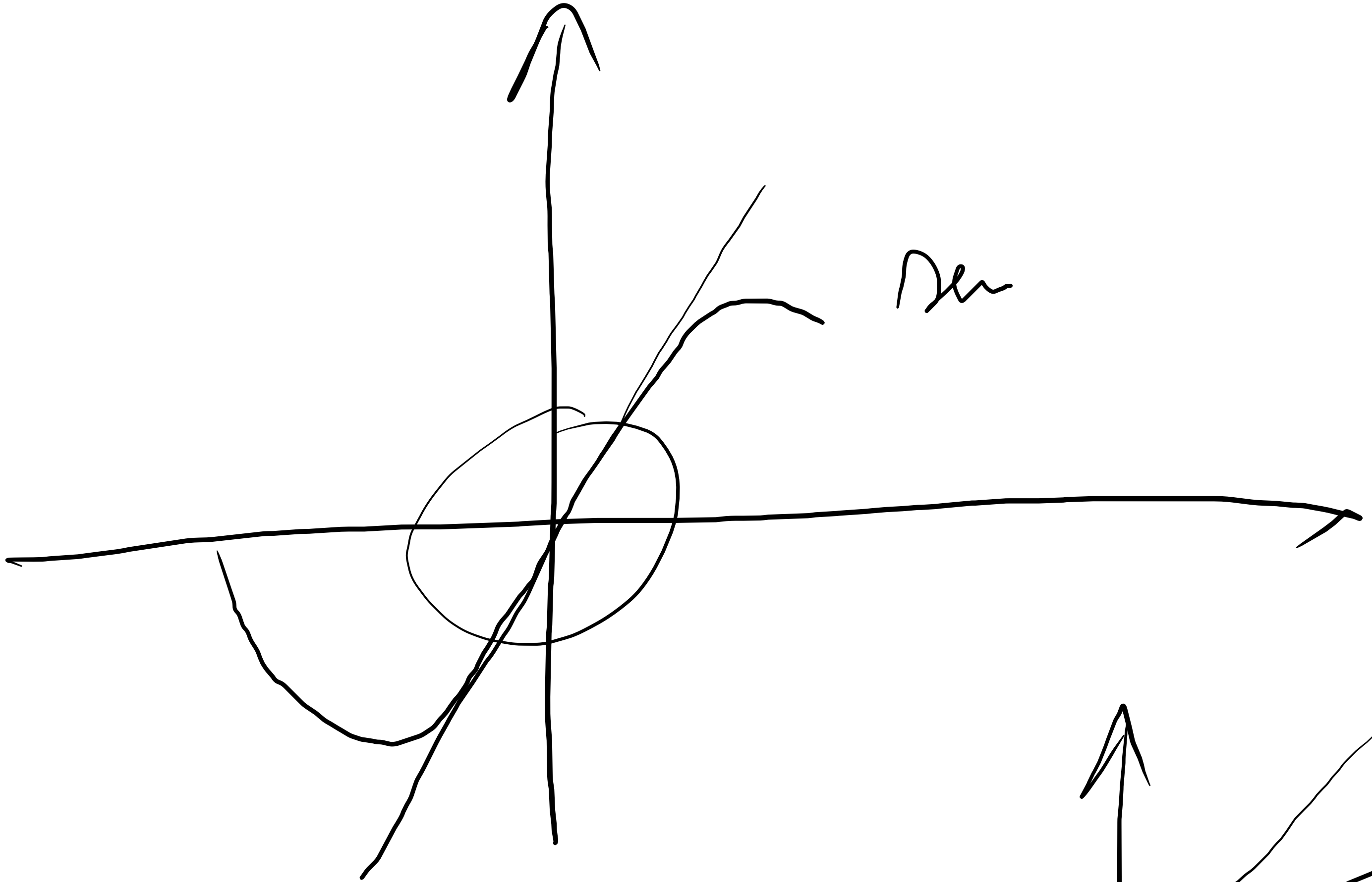
$$= 1 + x + R$$

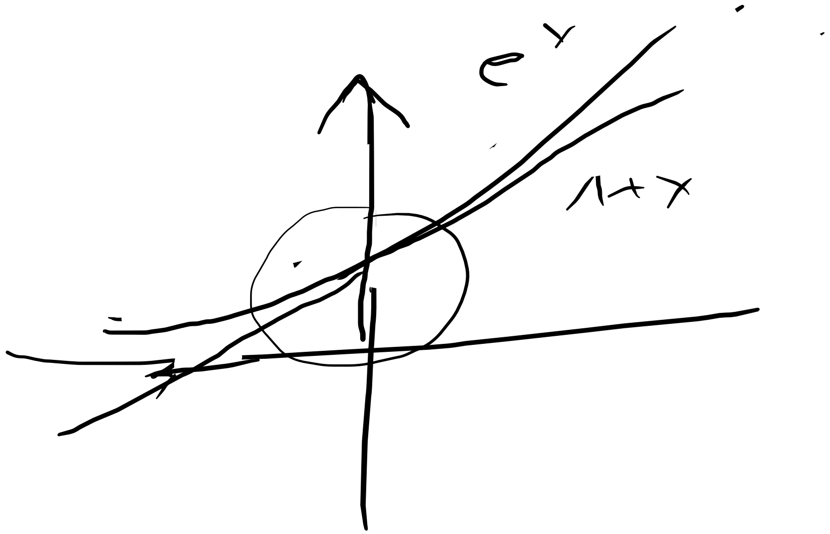
$\operatorname{arctg} x \qquad x_0 = 0 \qquad D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

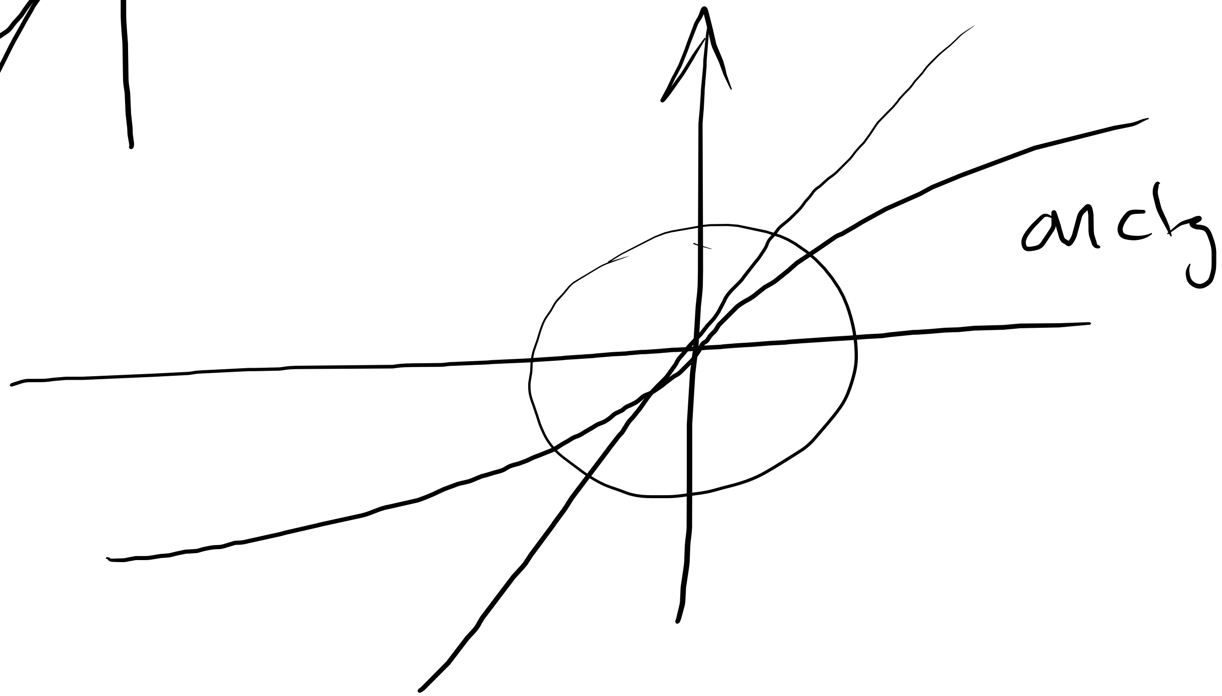
$$\operatorname{arctg} x = \underset{\overset{\|}{0}}{\operatorname{arctg}(0)} + D\operatorname{arctg}\big|_{x=0} (x-0) + R$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_{x=0} \cdot (x-0) + R$$

$$= 1 \cdot x + R$$


sin


e^x
$1+x$


arctg